

# Αναζήτηση Κατά Πλάτος

---

Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

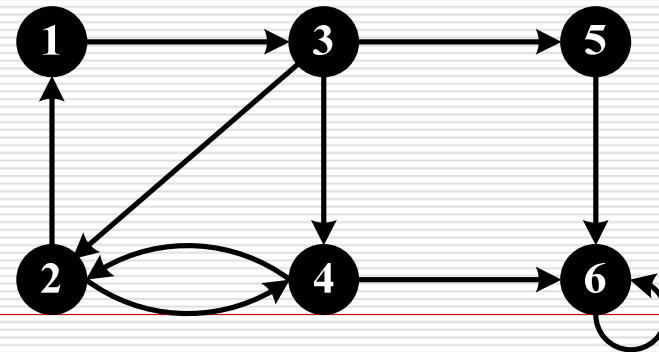
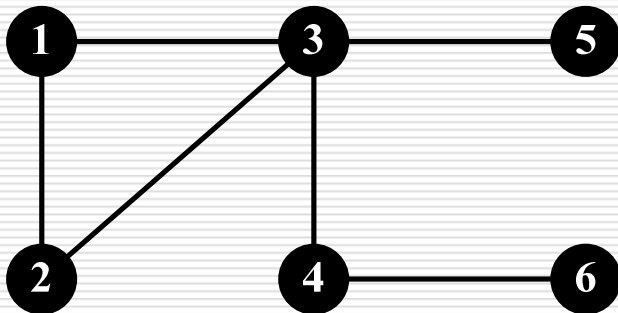
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών  
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



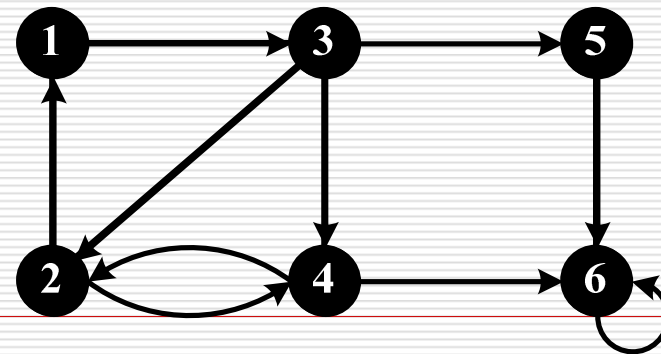
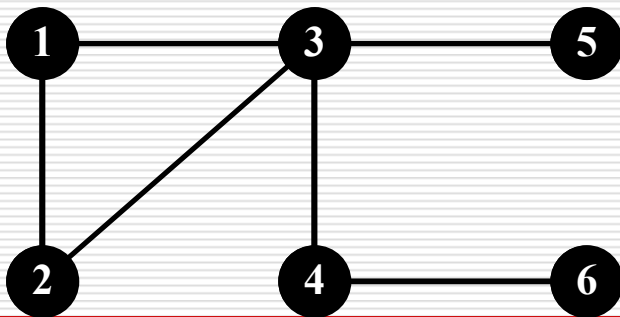
# Γραφήματα

- Μοντελοποίηση πολλών σημαντικών προβλημάτων (π.χ. δίκτυα – συνεκτικότητα, διαδρομές, δρομολόγηση – ανάθεση πόρων, layouts, ...).
- Γράφημα  $G(V, E)$ :  $V$  κορυφές  
 $E$  ακμές (ζεύγη σχετιζόμενων κορυφών)
  - Τάξη  $|V| = n$  και μέγεθος  $|E| = m$ .
  - Κατευθυνόμενα και μη-κατευθυνόμενα, απλά μη-κατευθ.
  - Βάρη (μήκη) στις ακμές  $G(V, E, w)$ ,  $w : E \mapsto \mathbb{R}$



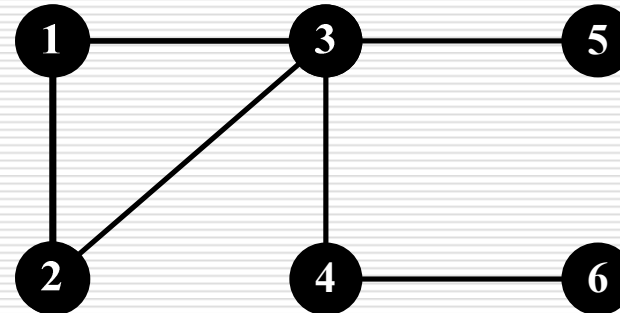
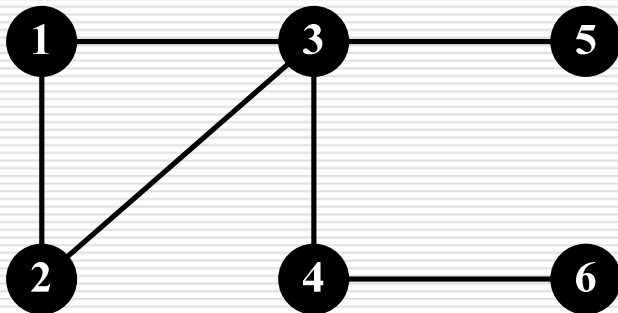
# Γραφήματα

- **Βαθμός** κορυφής  $\text{deg}(u)$ : #ακμών εφραπτόμενων στη  $u$ .
  - Κατευθυνόμενα: **εισερχόμενος** και **εξερχόμενος** βαθμός.
  - Μη-κατευθυνόμενο  $G(V, E)$ :  $\sum_{v \in V} \text{deg}(v) = 2|E|$
- Διαδρομή, μονοκονδυλιά, **μονοπάτι** (απλό).
- Κλειστή διαδρομή, κύκλωμα, **κύκλος** (απλός).
- **Απόσταση**  $d(u, v)$  (χωρίς και με βάρη).
- **Συνεκτικό**: μονοπάτι μεταξύ κάθε ζεύγους κορυφών.
- **Δέντρο**: ακυκλικό συνεκτικό γράφημα. **Δάσος**.



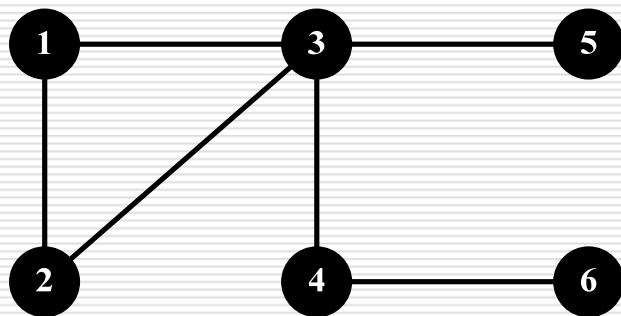
# Υπο-Γραφήματα

- Υπογράφημα  $G'(V', E')$  του  $G(V, E)$  όταν  $V' \subseteq V$  και  $E' \subseteq E$ .
  - Επικαλύπτον (spanning) όταν  $V' = V$ , δηλ. έχει όλες τις κορυφές του αρχικού γραφήματος.
  - Επαγόμενο (induced) όταν  $E' = \{(u, v) \in E : u, v \in V'\}$  δηλ. έχει όλες τις ακμές του αρχικού μεταξύ των επιλεγμένων κορυφών.



# Αναπαράσταση Γραφημάτων

- ... με **πίνακα γειτνίασης**:  $A[i, j] = \begin{cases} 1 & (v_i, v_j) \in E \\ 0 & (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$ 
  - Αν έχουμε βάρη,  $A[i, j] = w(v_i, v_j)$
  - Μη-κατευθυνόμενο: **συμμετρικός** πίνακας.

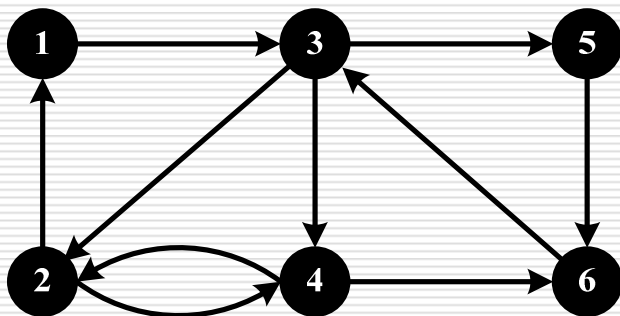


	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	0	0	0
2	1	0	1	0	0	0
3	1	1	0	1	1	0
4	0	0	1	0	0	1
5	0	0	1	0	0	0
6	0	0	0	1	0	0

# Αναπαράσταση Γραφημάτων

□ ... με **πίνακα γειτνίασης**:  $A[i, j] = \begin{cases} 1 & (v_i, v_j) \in E \\ 0 & (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$

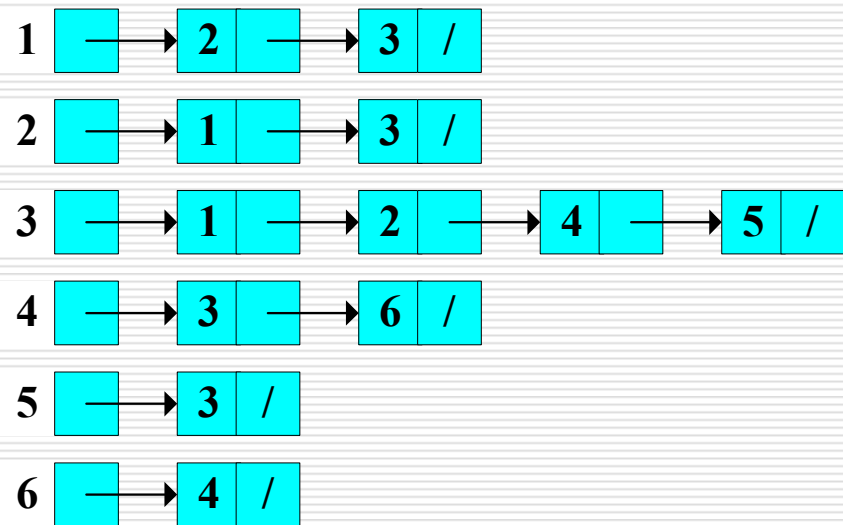
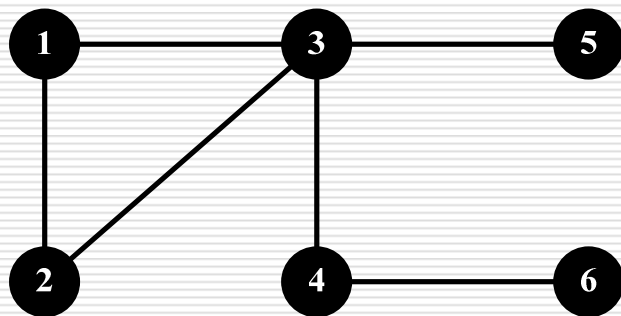
- Αν έχουμε βάρη,  $A[i, j] = w(v_i, v_j)$
- Μη-κατευθυνόμενο: **συμμετρικός** πίνακας.
- Χώρος  $\Theta(n^2)$ .
- Άμεσος έλεγχος για ύπαρξη ακμής.



	1	2	3	4	5	6
1	0	0	1	0	0	0
2	1	0	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0	1
5	0	0	0	0	0	1
6	0	0	1	0	0	0

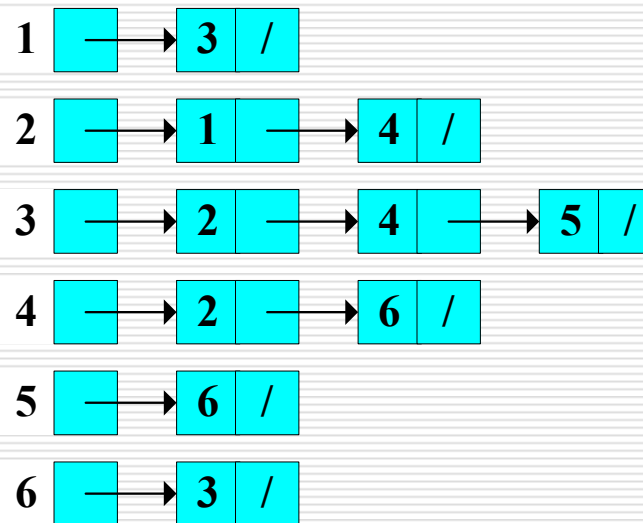
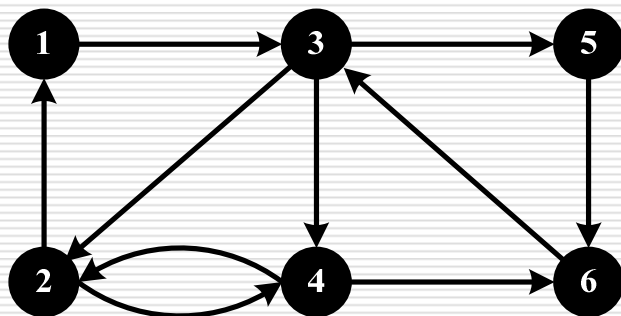
# Αναπαράσταση Γραφημάτων

- ... με **λίστα γειτνίασης**: γειτονικές κορυφές σε λίστα.
  - Βάρη αποθηκεύονται στους κόμβους της λίστας.



# Αναπαράσταση Γραφημάτων

- ... με **λίστα γειτνίασης**: γειτονικές κορυφές σε λίστα.
  - Βάρη αποθηκεύονται στους κόμβους της λίστας.
  - Χώρος  $\Theta(m)$ .
  - Έλεγχος για ύπαρξη ακμής σε χρόνο  $O(\text{deg}(u))$ .





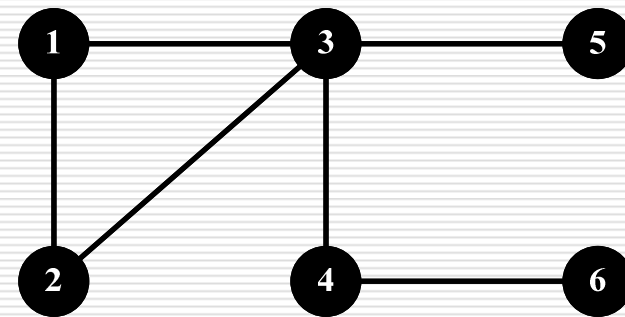
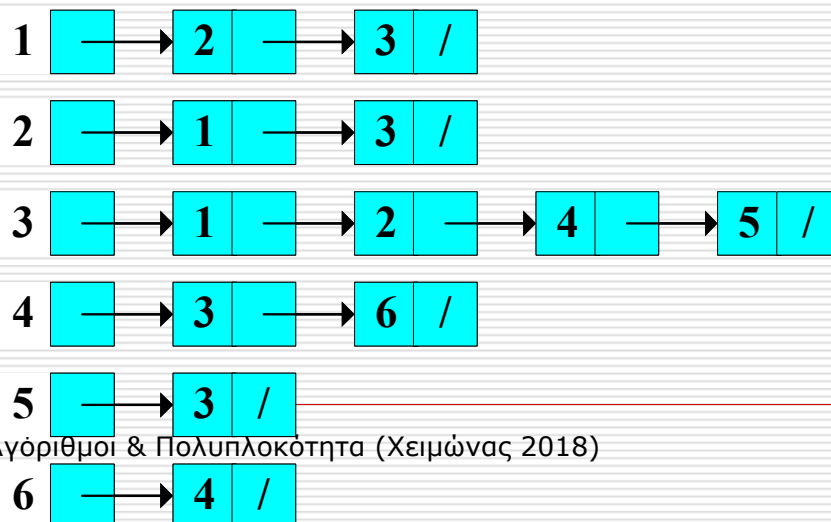
# Ασκήσεις

---

- **Μετατροπή** από μία αναπαράσταση σε άλλη;
- **Τετράγωνο**  $G^2(V, E')$  γραφήματος  $G(V, E)$  έχει **ακμές** μεταξύ κορυφών σε **απόσταση  $\leq 2$  στο  $G$** .
  - Δίνεται λίστα (πίνακας) γειτνίασης του αρχικού γραφήματος.
  - Να υπολογισθεί λίστα (πίνακας) γειτνίασης **τετραγώνου**.
  - Ποιοι είναι οι αντίστοιχοι **χρόνοι εκτέλεσης**;
- **Ανάστροφο** (κατευθυνόμενο) γράφημα  $G^T(V, E^T)$  προκύπτει από αρχικό γράφημα  $G(V, E)$  με **αντιστροφή φοράς ακμών**.
  - Δίνεται λίστα (πίνακας) γειτνίασης του αρχικού γραφήματος.
  - Να υπολογισθεί λίστα (πίνακας) γειτνίασης **ανάστροφου**.
  - Ποιοι είναι οι αντίστοιχοι **χρόνοι εκτέλεσης**;

# Εξερεύνηση Γραφημάτων

- Συστηματική «επίσκεψη» όλων των κορυφών και ακμών και εξαγωγή συμπερασμάτων σχετικά με βασικές ιδιότητες:
  - (Ισχυρά) συνεκτικές συνιστώσες.
  - Διμερές γράφημα.
  - Γέφυρες και σημεία κοπής.
  - Τοπολογική διάταξη για DAG.
  - ...



# Αναζήτηση Κατά Πλάτος (BFS)

---

- Εκκίνηση από **αρχική κορυφή  $s$**  και εξέλιξη σε **φάσεις**.
  - 1<sup>η</sup> φάση: εξερεύνηση **γειτόνων  $s$**  (σε **απόσταση 1** από  $s$ ).
  - 2<sup>η</sup> φάση: εξερεύνηση **γειτόνων κορυφών 1<sup>ης</sup> φάσης** που δεν έχουν εξερευνηθεί ακόμη (σε **απόσταση 2** από  $s$ ).
  - 3<sup>η</sup> φάση: εξερεύνηση **γειτόνων κορυφών 2<sup>ης</sup> φάσης** που δεν έχουν εξερευνηθεί ακόμη (σε **απόσταση 3** από  $s$ ).
  - ....
  - φάση  $k$ : εξερεύνηση **γειτόνων κορυφών φάσης  $k - 1$**  που δεν έχουν εξερευνηθεί ακόμη (σε **απόσταση  $k$**  από  $s$ ).
- «Κατά Πλάτος»: ολοκληρώνει **εξερεύνηση** κορυφών σε **απόσταση  $k$**  από  $s$  **πριν** επεκταθεί σε κορυφές σε **απόσταση  $k+1$** .
- Εξέλιξη αναζήτησης: **BFS-δέντρο** (ή δάσος).

# Αναζήτηση Κατά Πλάτος (BFS)

---

- **Τρία είδη** κορυφών:
  - **Ανεξερεύνητη**: όχι επίσκεψη ακόμη.
  - **Υπο-εξέταση**: επίσκεψη αλλά όχι εξερεύνηση γειτόνων.
  - **Εξερευνημένη**: επίσκεψη και εξερεύνηση γειτόνων.
- Κορυφές περνούν από παραπάνω στάδια με αυτή τη σειρά.
  - Αρχικά όλες οι κορυφές **ανεξερεύνητες**.
  - Πρώτη επίσκεψη ανεξερεύνητης κορ. → **υπό-εξέταση**.
  - Επίσκεψη των γειτόνων υπο-εξέταση κορ. → **εξερευνημένη**.
- «Κατά Πλάτος»: σειρά που **γίνονται υπο-εξέταση ίδια με σειρά** που γίνονται **εξερευνημένες**.
  - **(FIFO) ουρά**: εισαγωγή όταν γίνονται υπο-εξέταση και εξαγωγή για εξερεύνηση γειτόνων.

# Υλοποίηση

---

- Πίνακας κατάστασης:  $m[v] = \{ A, Y, E \}$ .
- Πίνακας γονέων:  $p[v]$  = πατέρας  $v$  στο BFS-δάσος.
- Χρόνος εκτέλεσης  $\Theta(n + m)$ .

**BFS**( $G(V, E), s$ )

**addToQueue**( $s$ );  $m[s] \leftarrow Y$ ;  $p[s] \leftarrow \text{NULL}$ ;

**for all**  $v \in V \setminus \{s\}$  **do**

$m[v] \leftarrow A$ ;  $p[v] \leftarrow \text{NULL}$ ;

**while not emptyQueue**() **do**

$u \leftarrow \text{extractFromQueue}$ ();  $m[u] \leftarrow E$ ;

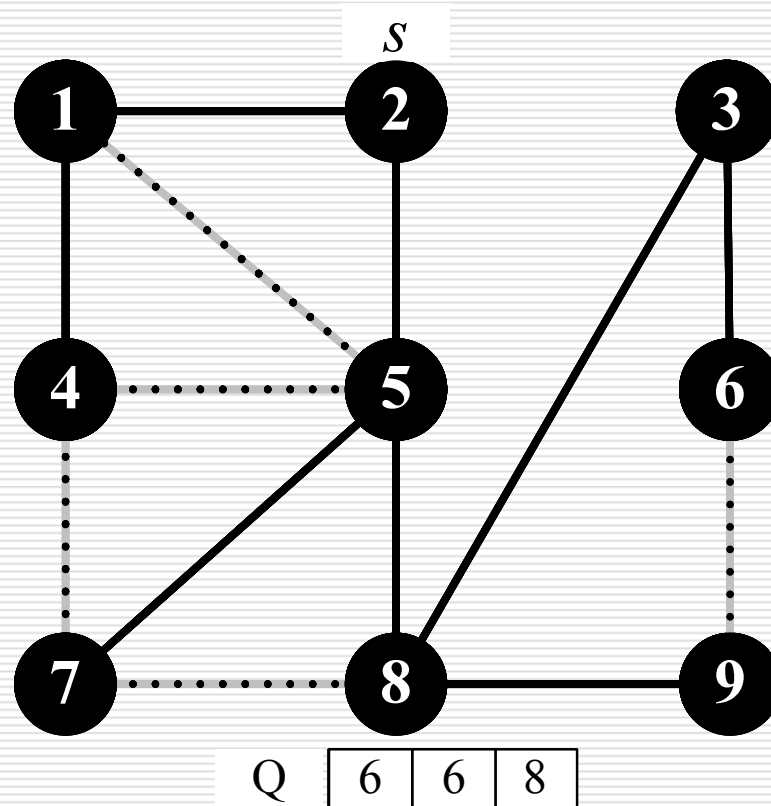
**for all**  $v \in L[u]$  **do**

**if**  $m[v] = A$  **then**

**addToQueue**( $v$ );  $m[v] \leftarrow Y$ ;  $p[v] \leftarrow u$ ;

# Παράδειγμα

---



# Παραδείγματα – Ιδιότητες

---

- BFS σε (α) πλήρες γράφημα, (β) δέντρο, (γ) κύκλο.
- Ψευδοκώδικας ολοκληρώνεται με κορυφές **εξερευνημένες ή ανεξερευνητες.**
  - Αν γράφημα συνεκτικό, όλες εξερευνημένες.
  - Αν όχι, εξερευνημένες σε ίδια συνεκτική συνιστώσα με  $s$ . Υπόλοιπες ανεξερευνητες
  - Τροποποίηση για ολοκλήρωση **με όλες εξερευνημένες;**

# Ιδιότητες

- **BFS-Δάσος:** υπογράφημα  $G_p(V_p, E_p)$  εξερευνημένων κορυφών και ακμών από όπου έγινε πρώτη επίσκεψη.  
 $V_p = \{v \in V : m[v] = E\}$  και  $E_p = \{(p[v], v) \in E : v \in V_p \setminus \{s\}\}$ 
  - Νδο ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα **συνεκτικό** ανν BFS παράγει **spanning tree**.
  - Τροποποίηση για συνεκτικές συνιστώσες;
- **Συνεκτικό** γράφημα: BFS δέντρο είναι δέντρο συντομότερων μονοπατιών από  $s$  (ακμές θεωρούνται μοναδιαίου μήκους).
  - Πώς υπολογίζουμε **αποστάσεις**;
- Γραμμικός αλγόριθμος για αναγνώριση **διμερούς γραφήματος**;

