

# Αναζήτηση Κατά Βάθος

---

Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**  
διαφάνειες για SCC: Α. Παγουρτζής

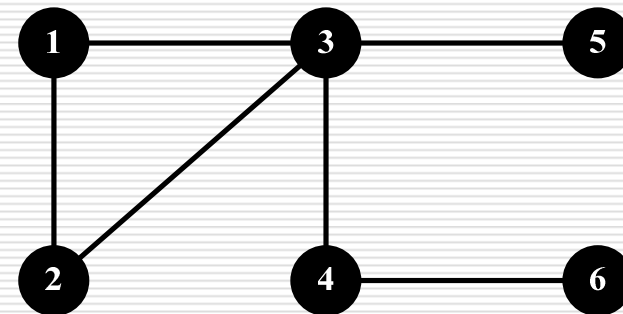
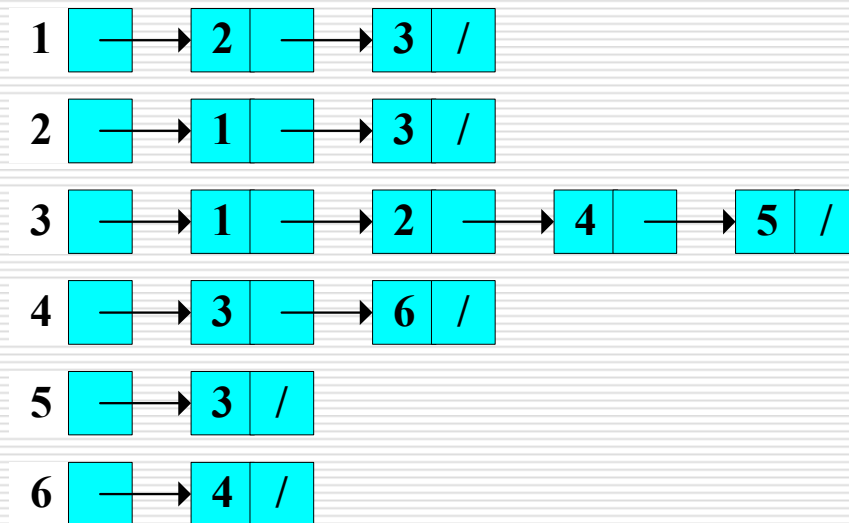
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών  
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



# Αναζήτηση Κατά Βάθος (DFS)

- Εξερεύνηση νέων κορυφών με απομάκρυνση από αρχική.
- Πρώτη επίσκεψη σε ανεξερεύνητη κορυφή  $u$ :
  - Εξερεύνηση (αναδρομικά) όλων των (ανεξερεύνητων) γειτόνων της  $u$ , πριν ολοκληρώσουμε με  $u$ .



# Αναζήτηση Κατά Βάθος (DFS)

- Εξερεύνηση νέων κορυφών με **απομάκρυνση** από αρχική.
- **Πρώτη** επίσκεψη σε **ανεξερεύνητη** κορυφή  $u$ :
  - **Εξερεύνηση** (αναδρομικά) **όλων** των (ανεξερεύνητων) **γειτόνων** της  $u$ , πριν ολοκληρώσουμε με  $u$ .
- Φύσει **DFS(κορυφή  $u$ )**  
**αναδρομική διαδικασία:** **for** κάθε κορυφή  $v$  γειτονική της  $u$  **do**  
**if** δεν έχω επισκεφθεί τη  $v$  προηγουμένως **then**  
σημείωσε ακμή  $(u, v)$ ; **DFS( $v$ )**;
- **Τρία είδη** κορυφών:
  - **Ανεξερεύνητη:** όχι επίσκεψη ακόμη.
  - **Υπο-εξέταση:** επίσκεψη και εξερευνούμε γείτονες.
  - **Εξερευνημένη:** ολοκλήρωση διαδικασίας.

# Αναζήτηση Κατά Βάθος (DFS)

---

- Κορυφές περνούν από παραπάνω στάδια:
  - Αρχικά όλες οι κορυφές **ανεξερευνήτες**.
  - Πρώτη επίσκεψη ανεξερευνήτης κορ. → **υπό-εξέταση**.
  - Ολοκλήρωση DFS για (ανεξερ.) γείτονες κορ. → **εξερευνημένη**.
- Κορυφή  $u$  τίθεται **υπό-εξέταση**:
  - Όλες οι κορυφές που είναι **προσπελάσιμες από  $u$**  και είναι **ανεξερευνήτες** θα τεθούν **εξερευνημένες πριν  $u$  τεθεί εξερευνημένη**.
- Εξέλιξη διαδικασίας αποτυπώνεται σε **DFS-δάσος** και «**χρόνους**» πρώτης επίσκεψης και αναχώρησης.
  - DFS-δάσος: **ακμές πρώτης επίσκεψης, ακυκλικό**.

# Υλοποίηση

- Πίνακας κατάστασης:  $\mathbf{m[v]} = \{ A, Y, E \}$ .
- Πίνακας προγόνων:  $\mathbf{p[v]} =$  πατέρας  $v$  στο DFS-δάσος.
- «Χρόνοι» πρώτης επίσκεψης  $\mathbf{d[v]}$  και αναχώρησης  $\mathbf{f[v]}$ .
- Χρόνος εκτέλεσης  $\Theta(n + m)$ .
- DFS σε (α) δέντρο, (β) πλήρες γράφημα, (γ) κύκλο.

**DFS\_Init( $G(V, E)$ )**

$t \leftarrow 0;$

**for all  $v \in V$  do**

$m[v] \leftarrow A; p[v] \leftarrow \text{NULL};$

**for all  $v \in V$  do**

**if  $m[v] = A$  then DFS( $v$ );**

**DFS( $v$ )**

$m[v] \leftarrow Y; d[v] \leftarrow ++t;$

**for all  $u \in L[v]$  do**

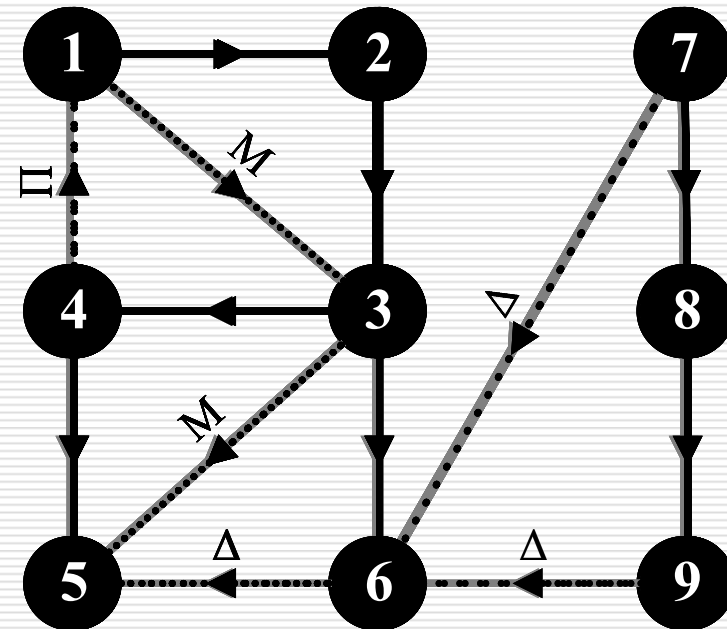
**if  $m[u] = A$  then**

$p[u] \leftarrow v; \text{DFS}(u);$

$m[v] \leftarrow E; f[v] \leftarrow ++t;$

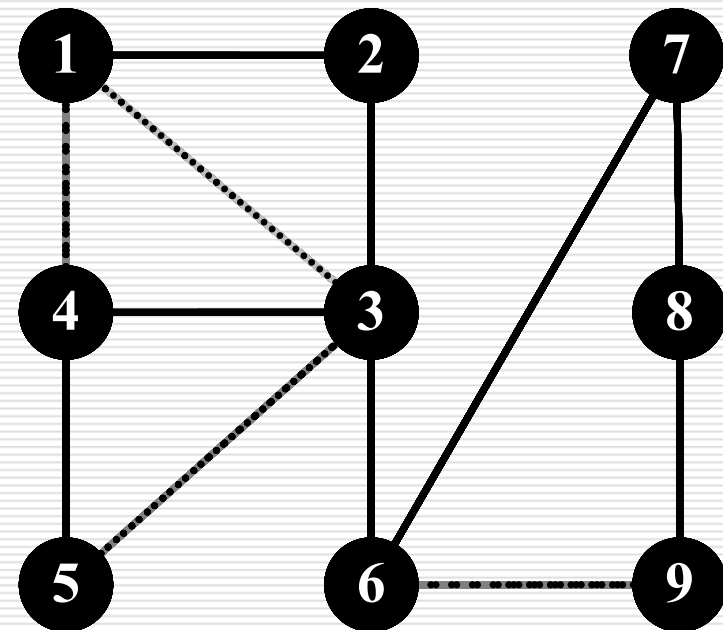
# Παράδειγμα – Κατηγορίες Ακμών

- Ακμές δάσους / δέντρου:
  - Εξερεύνηση  $(u, v)$  όταν  $v$  ανεξερεύνητη.
- Πίσω ακμές:
  - Εξερεύνηση  $(u, v)$  όταν  $v$  υπό-εξέταση: κύκλος.
- Μπροστά ακμές:
  - Εξερεύνηση  $(u, v)$  όταν  $v$  εξερευνημένη και  $v$  απόγονος  $u$  στο δέντρο.
- Ακμές διασταύρωσης:
  - Εξερεύνηση  $(u, v)$  όταν  $v$  εξερευνημένη και  $v$  **όχι** απόγονος  $u$  στο δέντρο.



# Παράδειγμα

- DFS σε μη-κατευθ. γράφημα παράγει μόνο ακμές δέντρου και πίσω ακμές.
  - Ακμή  $\{v, u\}$  με  $d[v] < d[u]$  (πρώτα πρώτη επίσκεψη σε  $v$ ).
  - Πρώτα  $v$  ΥΕ, μετά  $u$  ΥΕ, μετά  $u$  Εξερ, τέλος  $v$  Εξερ.
  - Αν κατεύθυνση  $(v, u)$  εξερευνήθηκε πρώτη, τότε  $\{v, u\}$  ακμή δέντρου.
  - Αν κατεύθυνση  $(u, v)$  εξερευνήθηκε πρώτη, τότε  $\{v, u\}$  πίσω ακμή.



# Μερικές Ιδιότητες

- Για μη-κατευθυνόμενα γραφήματα, DFS υπολογίζει **συνεκτικές συνιστώσες** (όπως και BFS).
- Αν  $v$  απόγονος  $u$  στο DFS-δάσος,  $[d[v], f[v]] \subset [d[u], f[u]]$   
Αν  $v$  όχι απόγονος  $u$  στο DFS-δάσος,  $[d[v], f[v]] \cap [d[u], f[u]] = \emptyset$
- Γράφημα **ακυκλικό** ανν DFS **δεν** παράγει πίσω ακμές.
  - Εξερεύνηση πίσω ακμής  $(u, v)$  όταν  $v$  ΥΕ  $\Rightarrow$  Μονοπάτι  $v \rightarrow u$  και ακμή  $(u, v) \Rightarrow$  κύκλος.
  - Έστω κύκλος  $C$ ,  $v$  πρώτη κορυφή  $C$  που τίθεται ΥΕ, και  $(u, v)$  ακμή  $C$  που εισέρχεται στην  $v$ .
  - $u$  απόγονος της  $v$  στο DFS-δάσος γιατί:
    - Υπάρχει  $v \rightarrow u$  μονοπάτι.
    - Όλες οι άλλες κορυφές του  $C$  είναι Α όταν  $v$  γίνεται ΥΕ.
  - Άρα  $(u, v)$  πίσω ακμή.



# Εφαρμογές

---

- «Χρόνοι» πρώτης επίσκεψης και αναχώρησης δίνουν πληροφορίες για δομή γραφήματος:
  - Τοπολογική διάταξη σε Directed Acyclic Graphs (DAGs).
  - Σημεία κοπής και γέφυρες σε μη-κατευθυνόμενα γραφήματα.
  - Ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες σε κατευθυνόμενα γραφήματα.

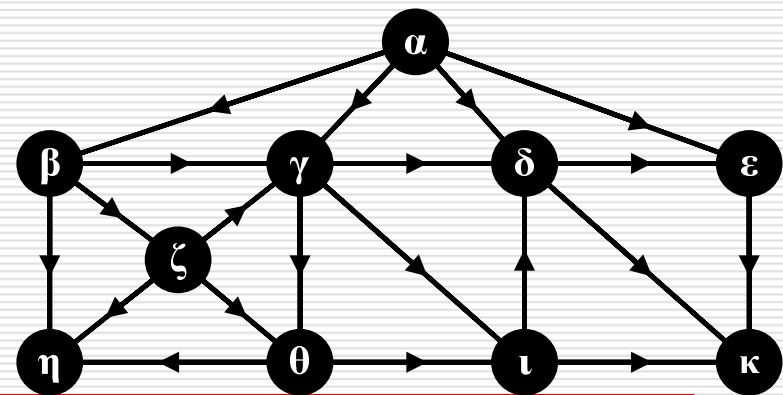
# Τοπολογική Διάταξη

---

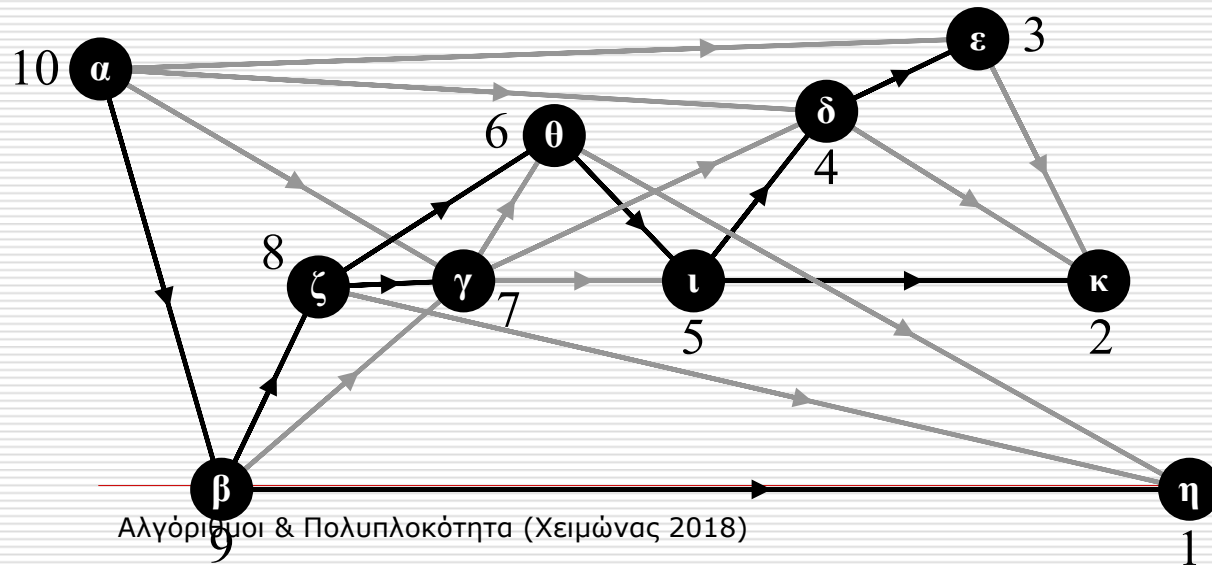
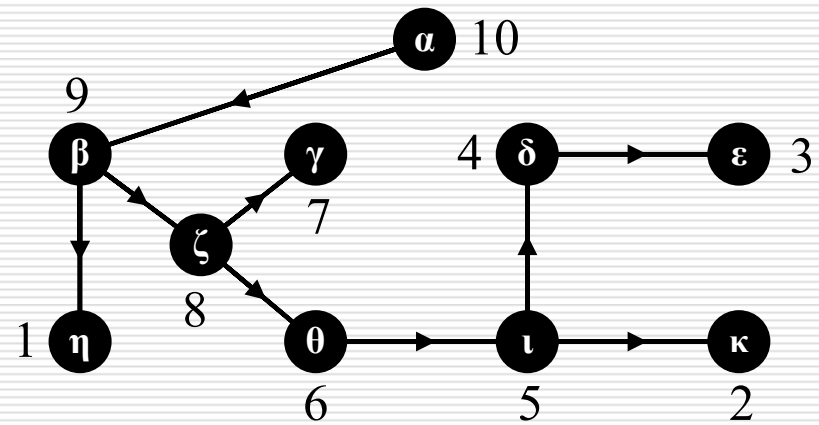
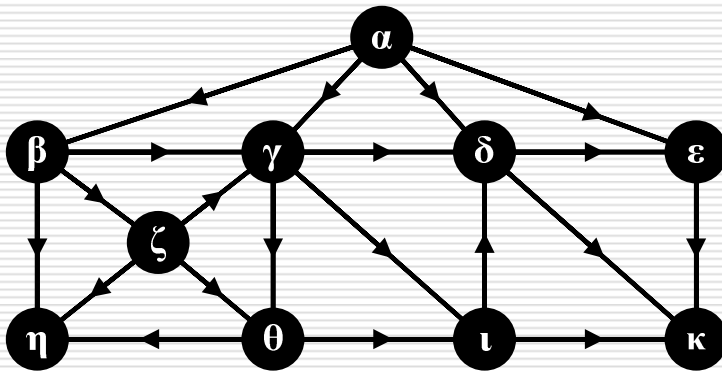
- **DAG** (Directed Acyclic Graph) αντιστοιχεί σε σχέση μερικής διάταξης:
  - Ακμή  $(u, v) \Leftrightarrow u \leq v$  (δηλ.  $u$  «προηγείται»  $v$ ).
  - Σειρά υπολογισμού αλγεβρικών εκφράσεων, π.χ.  
 $(ac)x^2 + [(a + c)(b + d) - ac - bd]x + bd$
  - Προγραμματισμός εργασιών σε σύνθετα έργα.
- Ύπαρξη κύκλου δεν συνάδει με «διάταξη», έστω μερική.
- DFS ελέγχει για ύπαρξη κύκλων και υπολογίζει «σειρά» κορυφών **συμβατή** με μερική διάταξη του DAG.
  - Τοπολογική διάταξη.

# Τοπολογική Διάταξη

- ... μετάθεση  $n$  κορυφών κατευθυνόμενου  $G(V, E)$  ώστε
$$\forall (u, v) \in E, \pi(u) < \pi(v)$$
  - Δηλ. κορυφές σε ευθεία ώστε όλες οι ακμές να έχουν φορά από αριστερά προς τα δεξιά.
- Τοπολογική διάταξη ανν γράφημα ακυκλικό (DAG).
  - Κορυφές σε φθίνουσα σειρά χρόνων αναχώρησης του DFS, δηλ.  $f[v_1] > f[v_2] > \dots > f[v_n]$
  - Υλοποίηση με στοίβα: Εξερευνημένη κορυφή μπαίνει στην ουρά.
  - Σειρά στην ουρά αντιστοιχεί σε τοπολογική διάταξη.
  - Χρόνος  $\Theta(n+m)$ .

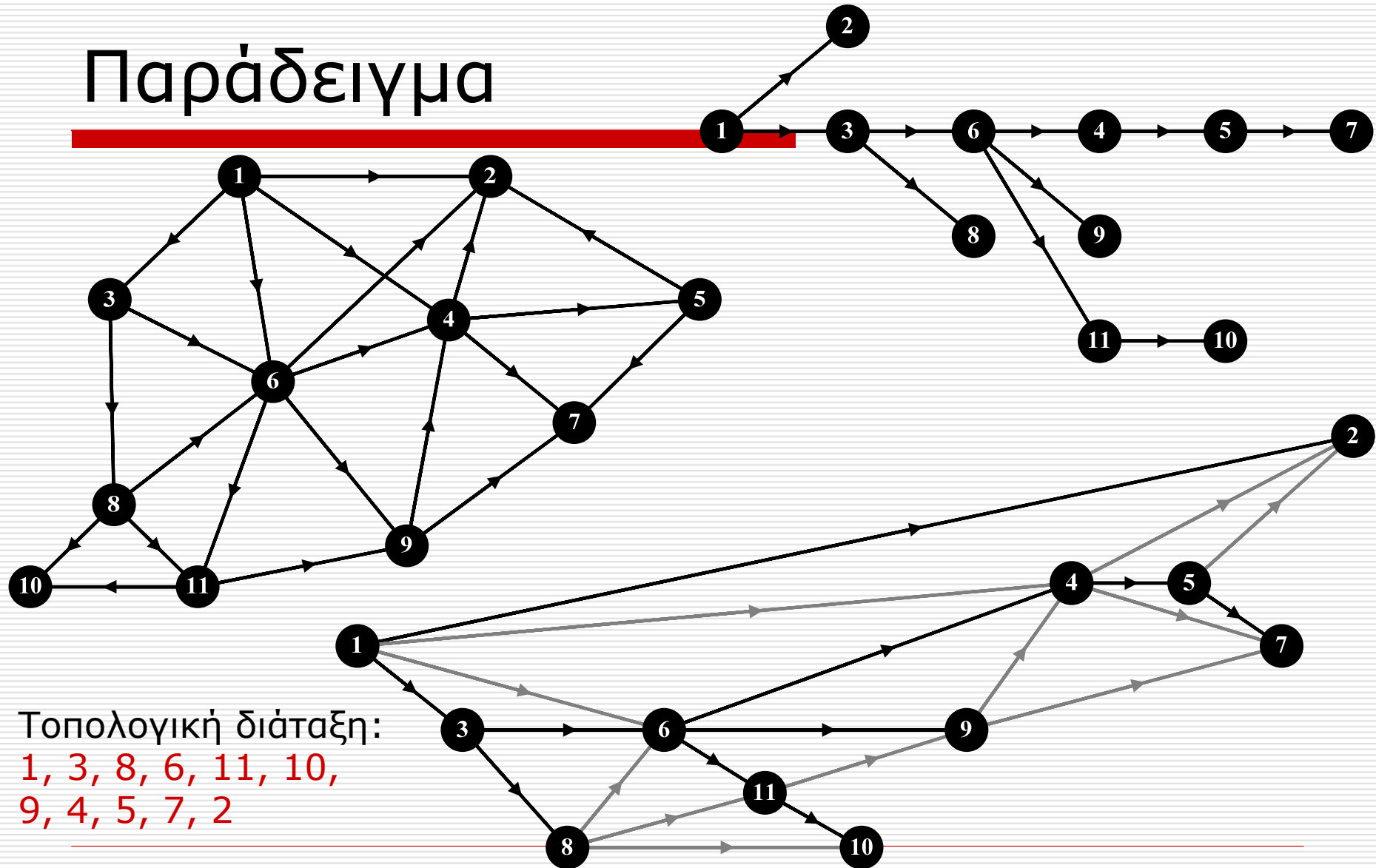


# Παράδειγμα



Τοπολογική διάταξη:  
*α, β, ζ, γ, θ, ι, δ, ε, κ, η*

# Παράδειγμα



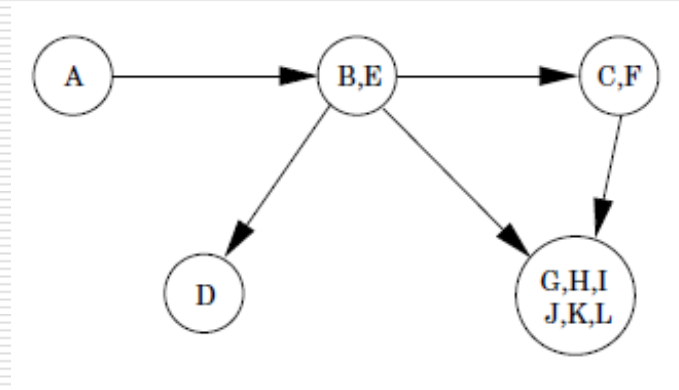
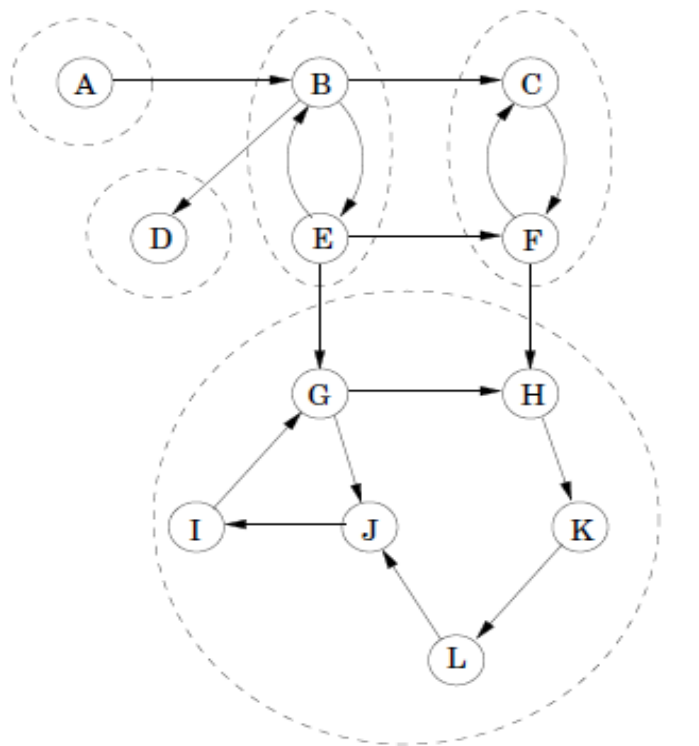
Τοπολογική διάταξη:  
1, 3, 8, 6, 11, 10,  
9, 4, 5, 7, 2

# Τοπολογική Διάταξη: Ορθότητα

- Έστω DAG  $G(V, E)$ . Θδο  $\forall (u, v) \in E, f[u] > f[v]$ .
  - Εξερεύνηση  $(u, v)$  συμβαίνει όταν  $u$  ΥΕ και  $v$  Ανεξ. ή Εξερ.
    - Αν  $v$  ΥΕ, τότε  $(u, v)$  πίσω ακμή  $\Rightarrow$  κύκλος!
    - Αν  $v$  Εξερ., τότε εξερεύνηση της  $v$  ολοκληρώθηκε πριν ολοκληρωθεί εξερεύνηση  $u$ , άρα  $f[u] > f[v]$ .
    - Αν  $v$  Ανεξ., τότε  $v$  απόγονος της  $u$  στο DFS-δάσος.
      - Άρα  $f[u] > f[v]$ , γιατί πρώτα τίθεται  $f[v]$  και μετά  $f[u]$ .
- Έστω σύστημα με  $n$  (πραγματικές) μεταβλητές  $x_1, \dots, x_n$  και  $m$  περιορισμούς της μορφής  $x_i < x_j$ .
  - Αλγόριθμος με χ.ε.  $O(n+m)$  που υπολογίζει μια λύση του συστήματος ή αποφαινεται ότι το σύστημα δεν έχει λύση;

# Ισχυρά Συνεκτικές Συνιστώσες

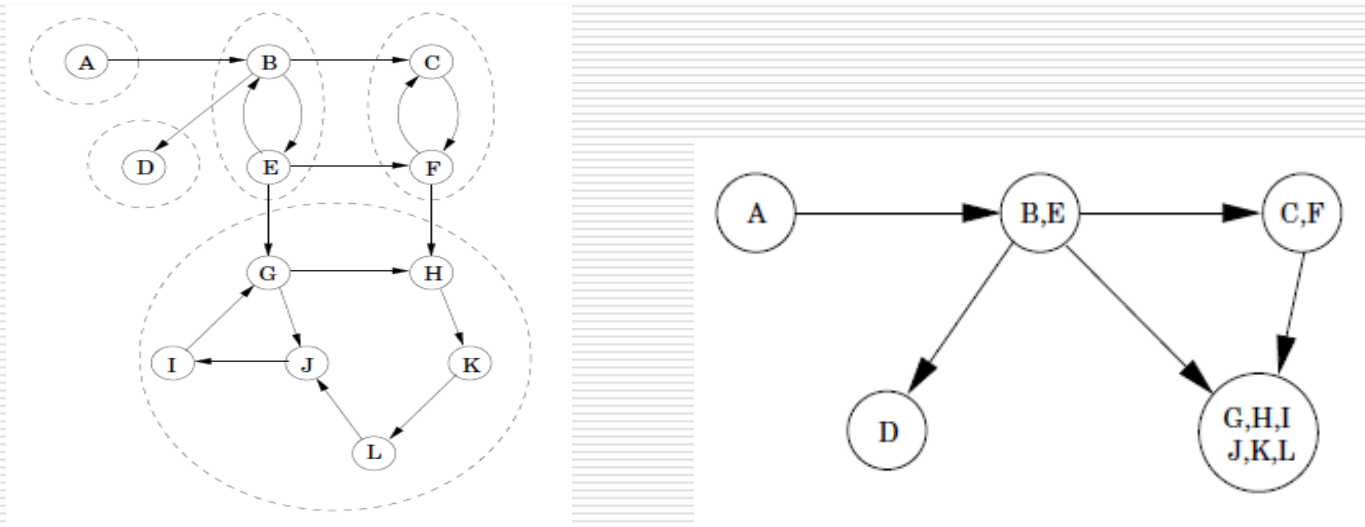
- Δίνεται κατευθυνόμενος **γράφος** και αναζητώ τις ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες του (SCC)
- Κάθε γράφος μπορεί να παρασταθεί ως **DAG των SCC** του:



Σχήματα από βιβλίο "Algorithms"  
(Dasgupta-Papadimitriou-Vazirani)

# Ισχυρά Συνεκτικές Συνιστώσες

- Δίνεται κατευθυνόμενος γράφος και αναζητώ τις ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες του(SCC)
- Κάθε γράφος μπορεί να παρασταθεί ως DAG των SCC του:

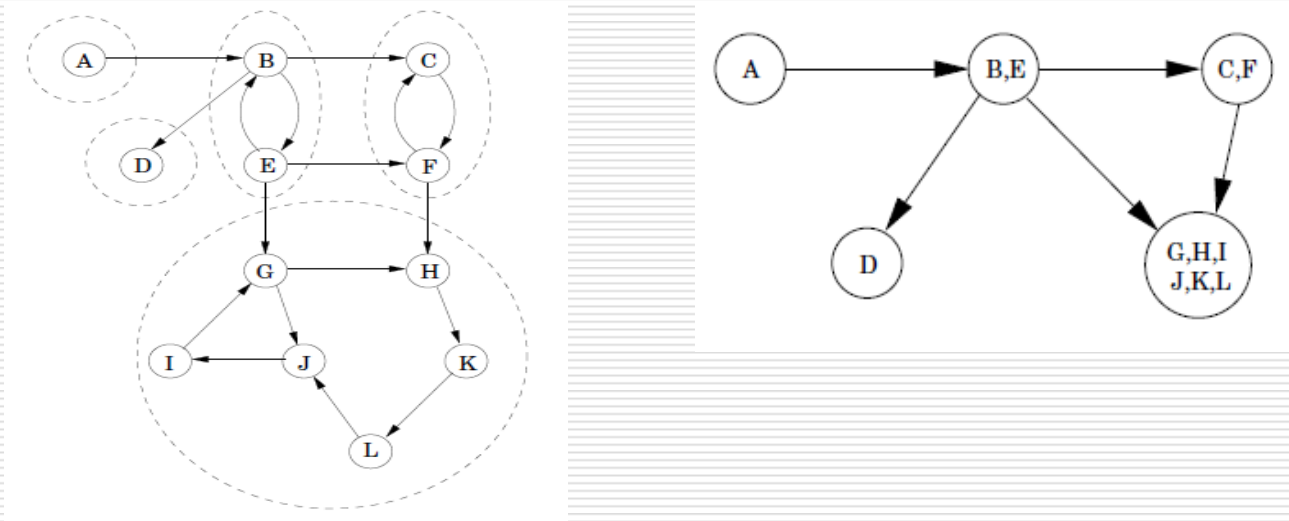


- Τι θα εξερευνήσει η DFS αν ξεκινήσει από τυχαίο κόμβο;
- Από ποιά κόμβο πρέπει να ξεκινήσει η DFS;



# Ισχυρά Συνεκτικές Συνιστώσες

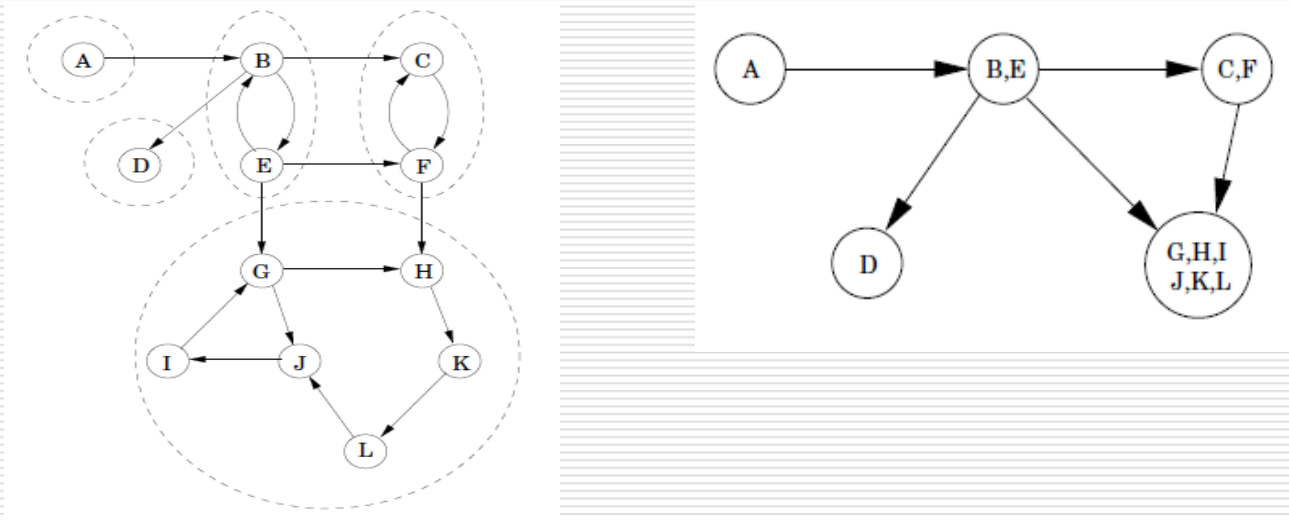
- Σωστό σημείο εκκίνησης: (κόμβος σε) **συνιστώσα-καταβόθρα** (sink component)



- Αποτέλεσμα: πλήρης εξερεύν. συνιστώσας αυτής και μόνο!
- Πώς βρίσκουμε κόμβο σε συνιστώσα-καταβόθρα;
- Ιδέα: μπορώ να βρώ κόμβο σε **συνιστώσα-πηγή**: **μέγιστο  $f(u)$**

# Ισχυρά Συνεκτικές Συνιστώσες

- Σωστό σημείο εκκίνησης: (κόμβος σε) **συνιστώσα-καταβόθρα** (sink component)



- Πώς βρίσκουμε κόμβο σε συνιστώσα-καταβόθρα;
- Ιδέα: μπορώ να βρώ κόμβο σε **συνιστώσα-πηγή**: μέγιστο  $f(u)$
- Και: συνιστώσα-καταβόθρα = συνιστώσα-πηγή σε  $G^R$  !!

# Ισχυρά Συνεκτικές Συνιστώσες

- Αλγόριθμος
  - Εκτέλεση DFS σε  $G^R$ , καταγραφή  $f^R(u)$
  - Εκτέλεση DFS σε  $G$ , επιλογή ανεξερ. κόμβων κατά φθίνουσα σειρά  $f^R(u)$

