Μέγιστη Ροή – Ελάχιστη Τομή

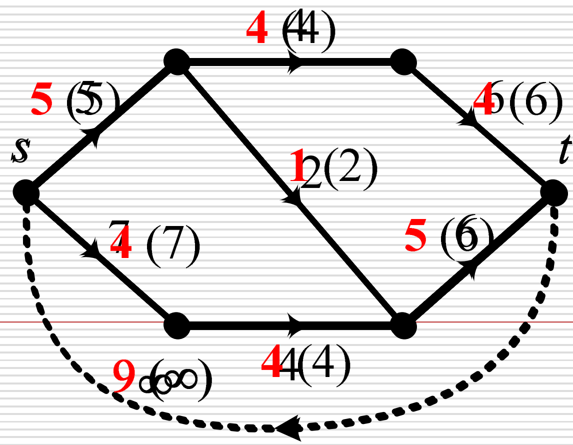
Δημήτρης Φωτάκης

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Δίκτυα και Ροές

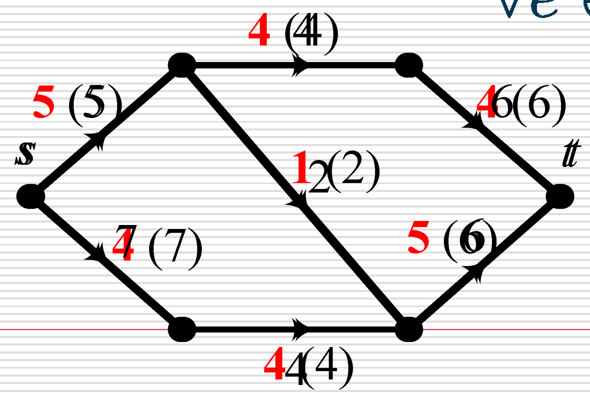
- **Δίκτυο** : κατευθυνόμενο γράφημα *G*(*V*, *E*).
  - Πηγή *s*, προορισμός *t*, χωρητικότητα ακμής b_e .
- *s* – *t* ροή μεγέθους *d* : $f : E \mapsto \mathbb{R}_+$:
  - Χωρητικότητα: $\forall e \in E \;\; f_e \leq b_e$
  - Διατήρηση ροής: $\forall v \in V \quad \sum_{e \in in(v)} f_e = \sum_{e \in out(v)} f_e$
  - Μέγεθος: $f_{ts} = d$



Μέγιστη s – t Ροή

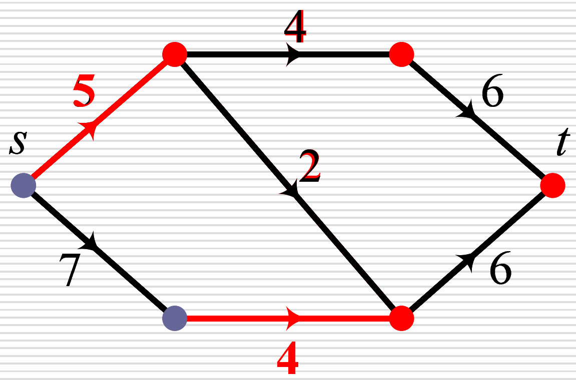
- Πρόβλημα Μέγιστης s – t Ροής (Max-Flow):
  - Δεδομένου δικτύου $G(V, E, s, t, b)$
  - Υπολόγισε s – t ροή με μέγιστη τιμή.

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & f_{ts} & \\
\text{s.t.} \quad & f_e \le b_e & \forall e \in E \\
& \sum_{e \in in(v)} f_e - \sum_{e \in out(v)} f_e \le 0 & \forall v \in V \\
& f_e \ge 0 & \forall e \in E
\end{aligned}
$$



s – t Τομή

- s – t τομή χωρητικότητας d :
  - Διαμέριση $(S, V \setminus S)$ με $s \in S$ και $t \in V \setminus S$.
  - Χωρητικότητα $b(S, V \setminus S) = \sum_{(u,v): u \in S, v \notin S} b_{uv} = d$
  - Ακμές χωρητικότητας d που χωρίζουν s από t.



Ελάχιστη s–t Τομή

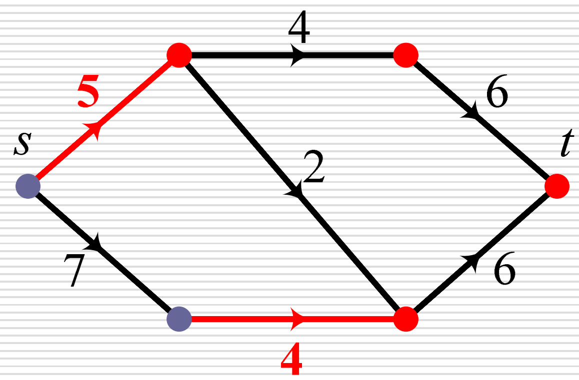
- Πρόβλημα Ελάχιστης s – t Τομής (Min s–t Cut):
  - Δεδομένου δικτύου $G(V, E, s, t, b)$
  - Υπολόγισε s – t τομή με ελάχιστη χωρητικότητα.

$$\min \sum_{(u,v)\in E} d_{uv} b_{uv}$$

$$\text{s.t.} \quad d_{uv} - p_u + p_v \geq 0 \qquad \forall (u,v) \in E$$

$$p_s - p_t \geq 1$$

$$d_{uv}, p_v \geq 0$$



Ροές και Τομές

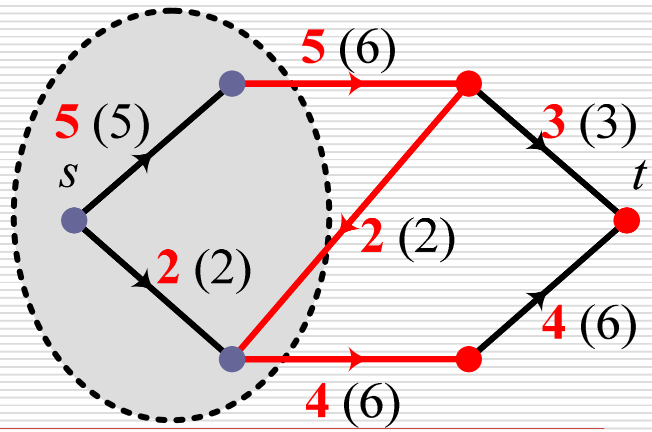
- Έστω ροή f και τομή $(S, V \setminus S)$.

$$f(S, V \setminus S) = \sum_{v \in S, u \notin S} f_{vu} - \sum_{v \in S, u \notin S} f_{uv}$$

- Κάθε $s - t$ ροή f και $s - t$ τομή $(S, V \setminus S)$:

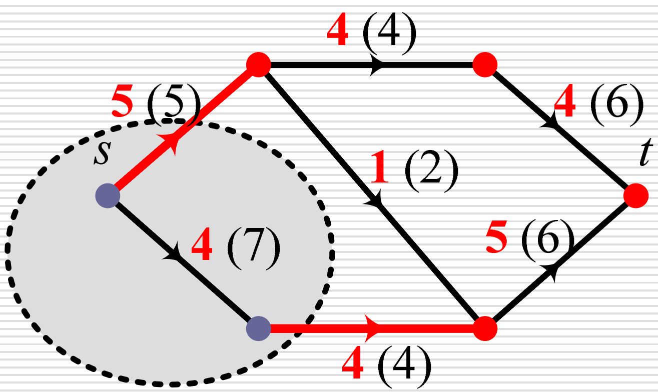
$$f_{ts} = f(S, V \setminus S) \le b(S, V \setminus S)$$

- **Μέγιστη s – t ροή ≤ ελάχιστη s – t τομή.**



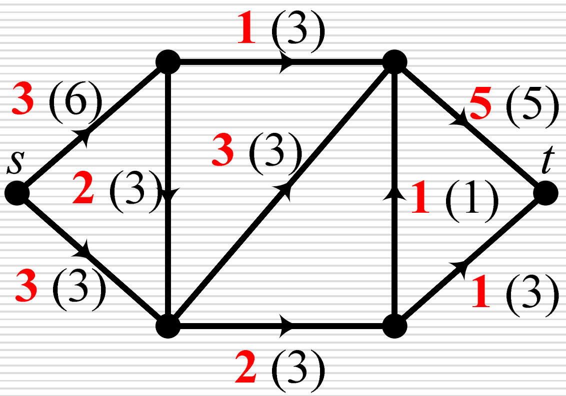
Μέγιστη Ροή και Ελάχιστη Τομή

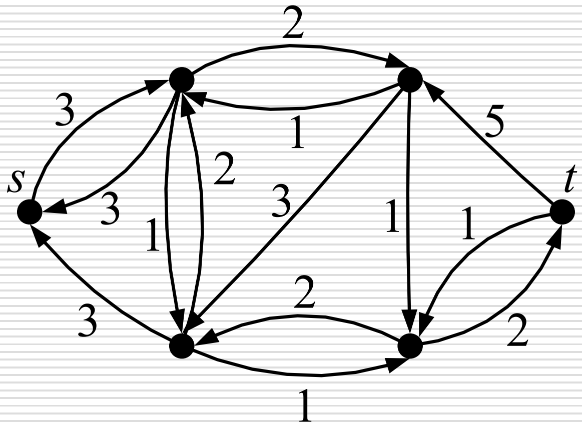
- **Μέγιστη s – t ροή = Ελάχιστη s – t τομή !**
  - Max-Flow – Min-Cut Θεώρημα.
  - Ακμές ελάχιστης τομής κορεσμένες σε μέγιστη ροή.
- Μέγιστη ροή, ελάχιστη τομή: συνεκτικότητα / μεταφορική ικανότητα δικτύου.



Υπολειμματικό Δίκτυο

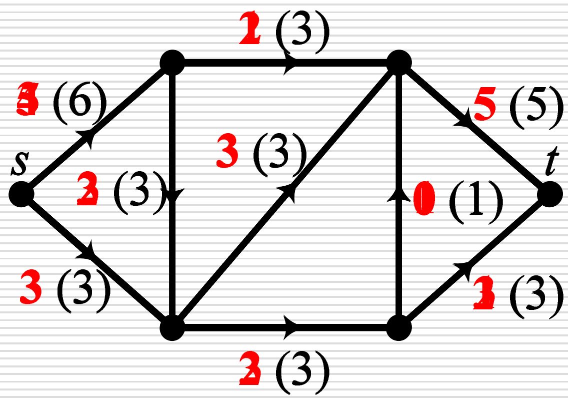
- Δίκτυο $G(V, E, b)$ και ροή f.
- Υπολειμματικό δίκτυο $G_f(V, E_f, r_f)$:
  - Χωρητικότητα (μπρος-ακμές): $\forall (u,v) \in E \; r_{uv} = b_{uv} - f_{uv}$
  - Ροή (πίσω-ακμές): $\forall (u,v) \in E \; r_{vu} = f_{uv}$
- $s - t$ μονοπάτι στο υπολειμματικό: επαυξητικό μονοπάτι.

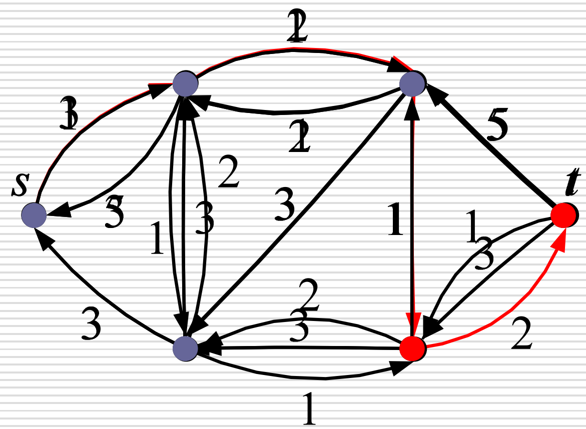




Χαρακτηρισμός Μέγιστης Ροής

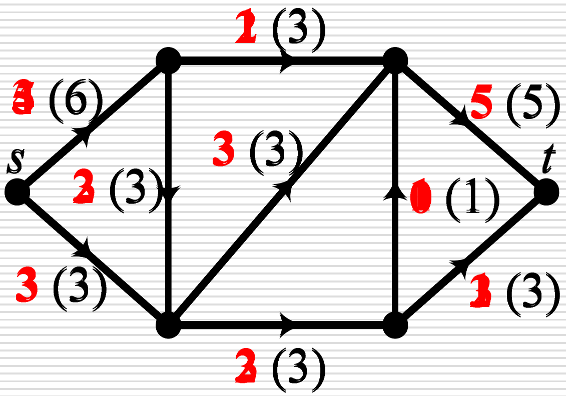
- Μέγιστη ροή ανν όχι επαυξητικό μονοπάτι.
- Επαυξητικό μονοπάτι ⇒ αύξηση ροής ⇒ όχι μέγιστη ροή.
- Όχι επαυξητικό μονοπάτι :
  - Κορυφές προσπελάσιμες από *s* ορίζουν τομή χωρητικότητας ίσης με ροή.
  - Μέγιστη ροή και ελάχιστη τομή λόγω Θ. Max-Flow-Min-Cut!

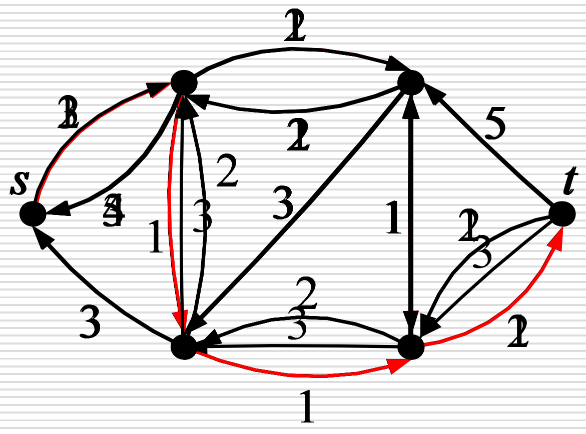




Αλγόριθμος Ford-Fulkerson

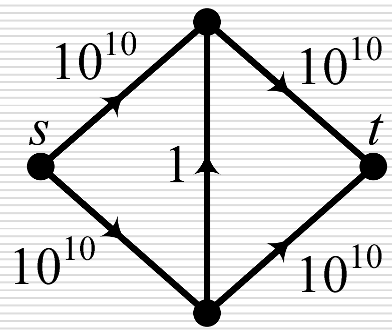
- Ενόσω επαυξητικό μονοπ. *p* στο υπολειμματικό,
  - Χωρητικότητα επαυξητικού $\delta \leftarrow \min_{e \in p}\{r_e\}$
  - Αύξηση ροής κατά *δ* στο *p* και ενημέρωση υπολειμματικού δικτύου.
- Επαυξητικό μονοπάτι με π.χ. DFS, BFS.
  - Επαύξηση σε χρόνο O(*m*).





Χρόνος Εκτέλεσης

- Ακέραιες χωρητικότητες ≤ U:
  - Επαύξηση αυξάνει ροή τουλάχιστον κατά 1.
  - Χρόνος εκτέλεσης O(m^2 U) .
- Δίκτυο με ακέραιες χωρητικότητες έχει ακέραιη μέγιστη ροή.
- Μπορεί εκθετικός χρόνος για μεγάλες χωρητικότητες !
- Μπορεί να μην τερματίσει για άρρητες χωρητικότητες.



Βελτιώσεις Edmonds-Karp

- Επαυξητικό μονοπάτι με μέγιστη χωρητικότητα.
  - $2m$ επαυξήσεις $\Rightarrow$ μέγιστη χωρητικότητα στο μισό.
  - Αντί «μέγιστης», «αρκετά μεγάλης» χωρητικότητας:
    - Υπολειμματικό γράφημα μόνο με χωρητικότητες $\geq \Delta$.
    - Αν όχι επαυξητικό μονοπάτι, $\Delta \leftarrow \Delta / 2$.
  - Χρόνος εκτέλεσης $O(m^2 \log U)$.
- Επαυξητικό μονοπάτι ελάχιστου μήκους (ακμών).
  - Υπολογισμός με BFS σε χρόνο $O(m)$.
  - #επαυξήσεων $O(n\,m)$, χρόνος εκτέλεσης $O(n\,m^2)$.
  - Βελτίωση Dinic: υπολογισμός με BFS σε χρόνο $O(n)$!
    - Χρόνος εκτέλεσης $O(n^2\,m)$.
- Καλύτεροι αλγόριθμοι με blocking-flow και push-relabel τεχνικές έχουν χρόνους $O(nm\log n)$ και $O(n^3)$ αντιστ.

Μέγιστο Ταίριασμα

- Διμερές γράφημα: υπολογισμός μέγιστου αριθμού ακμών χωρίς κοινά άκρα (ταίριασμα).
- Μέγιστη ροή: πηγή s, προορισμός t, προσανατολισμός $s \rightarrow t$, χωρητικότητα 1.