Υπολογιστική Πολυπλοκότητα

Δημήτρης Φωτάκης

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Υπολογιστική Πολυπλοκότητα

- Γιατί κάποια (επιλύσιμα) προβλήματα είναι δύσκολο να λυθούν από υπολογιστικές μηχανές.
  - Ποια επιλύσιμα προβλήματα είναι **εύκολα** και ποια **δύσκολα**;
- Αντικείμενο: ελάχιστοι υπολογιστικοί πόροι για επιλύσιμα προβλήματα.
  - Εύλογοι υπολογιστικοί πόροι: ευεπίλυτα προβλήματα.
    - Fractional knapsack, minimum spanning tree, shortest paths, max-flow, min-cut, linear programming, …
  - Διαφορετικά, **δισεπίλυτα** προβλήματα.
    - TSP, discrete knapsack, vertex cover, independent set, set cover, scheduling, …
  - Επίδραση υπολογιστικού μοντέλου.

Προσέγγιση

- Κλάσεις προβλημάτων (complexity classes) με παρόμοια υπολογιστική «δυσκολία» (computational complexity).
- Με (κατάλληλη) **αναγωγή** ορίζουμε «διάταξη» προβλημάτων σε κάθε κλάση (με βάση δυσκολία).
  - Δυσκολότερα προβλήματα: **πλήρη** για την κλάση, συνοψίζουν δυσκολία κλάσης.
  - Πλήρες πρόβλημα «εύκολο»: όλη η κλάση «εύκολη».
  - Αρνητικό αποτέλεσμα: όλα τα πλήρη προβλήματα «δύσκολα».
  - Έτσι (προσπαθούμε να) καθορίσουμε επαρκείς υπολογιστικούς πόρους για επίλυση δύσκολων προβλημάτων.
- Διαλεκτική σχέση αλγόριθμων και πολυπλοκότητας.

Χρονική Πολυπλοκότητα

- Χρονική πολυπλοκότητα DTM M:
  - Αύξουσα συνάρτηση $t : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ ώστε για κάθε x, |x| = n, M(x) τερματίζει σε $\leq t(n)$ βήματα.
- Χρονική πολυπλοκότητα προβλήματος Π:
  - Χρονική πολυπλοκότητα «ταχύτερης» DTM που λύνει Π.
- Κλάση $\mathbf{DTIME}[t(n)] \equiv \{\Pi : \Pi \text{ λύνεται σε χρόνο } \mathrm{O}(t(n))\}$
- Ιεραρχία κλάσεων χρονικής πολυπλοκότητας:

  $\mathbf{DTIME}[t(n)] \subset \mathbf{DTIME}[\omega(t(n)\log t(n))]$

  $\mathbf{DTIME}[n] \subset \mathbf{DTIME}[n^2] \subset \mathbf{DTIME}[n^3] \subset \cdots$
- Πολυωνυμικός χρόνος: $\mathbf{P} \equiv \bigcup_{k\geq 0} \mathbf{DTIME}[n^k]$
- Εκθετικός χρόνος: $\mathbf{EXP} \equiv \bigcup_{k\geq 0} \mathbf{DTIME}[2^{n^k}]$

$\mathbf{P} \subset \mathbf{EXP}$

Ευεπίλυτα Προβλήματα

- **Κλάση P** : προβλήματα απόφασης που λύνονται σε πολυωνυμικό χρόνο.
- **Θέση Cook – Karp** : κλάση ευεπίλυτων προβλημάτων ταυτίζεται με κλάση **P**.

Υπέρ θέσης Cook – Karp:

- Συνήθως πολυώνυμα μικρού βαθμού (π.χ. n, n^2, n^3).
- Κλειστότητα κλάσης.
- Διπλασιασμός υπολογιστικής ισχύος: σημαντική αύξηση στο μέγεθος στιγμιότυπων που λύνουμε.

Εναντίον θέσης Cook – Karp:

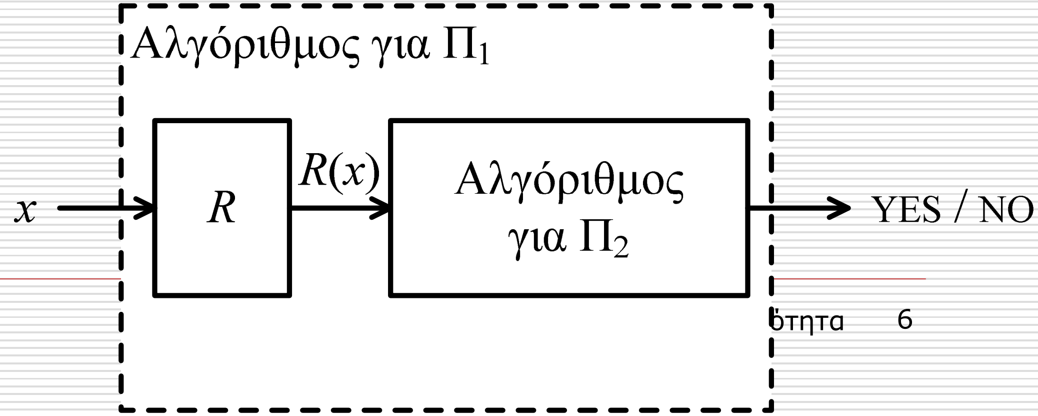
- Ακραίες περιπτώσεις: πρακτικό το n^{100} αλλά όχι το $(1.001)^n$!
- Γραμμικός Προγραμματισμός:

  Simplex εκθετικού χρόνου αλλά πολύ γρήγορος στην πράξη.

  Ελλειψοειδές πολυωνυμικού χρόνου αλλά καθόλου πρακτικός!

(Πολυωνυμική) Αναγωγή

- Π_1 **ανάγεται** πολυωνυμικά σε Π_2 ($\Pi_1 \leq_P \Pi_2$):
  - Υπάρχει πολυωνυμικά υπολογίσιμη συνάρτηση $R: \Sigma^* \to \Sigma^*$ ώστε $\forall x \in \Sigma^*$, $x \in \Pi_1 \Leftrightarrow R(x) \in \Pi_2$.
  - R καλείται **πολυωνυμική αναγωγή**.
  - $\Pi_1 \leq_P \Pi_2$: Π_2 είναι τουλ. τόσο δύσκολο όσο το Π_1 (για τον υπολογισμό σε πολυωνυμικό χρόνο).
  - Αν $\Pi_2 \in$ **P**, τότε και $\Pi_1 \in$ **P**.
  - Αν $\Pi_1 \notin$ **P**, τότε και $\Pi_2 \notin$ **P**.



Πληρότητα

- Έστω **C** μια κλάση προβλημάτων.
  - Π είναι **C**-δύσκολο (**C**-hard) ως προς αναγωγή R αν κάθε πρόβλημα Π′ στην **C** ανάγεται κατά R στο Π.

    $$\forall \Pi' \in \mathbf{C}, \Pi' \leq_R \Pi$$

  - Αν Π ∈ C και Π είναι **C**-δύσκολο ως προς αναγωγή R, τότε Π είναι **C**-πλήρες (**C**-complete) ως προς R.

    $$\forall \Pi' \in \mathbf{C}, \Pi' \leq_R \Pi \;\; \text{και} \;\; \Pi \in \mathbf{C}$$

- Πλήρη προβλήματα (ως προς κατάλληλη αναγωγή) συνοψίζουν υπολογιστική δυσκολία κλάσης **C**.
  - Αναγωγή πρέπει να είναι «λίγο ευκολότερη» από «δυσκολότερα» προβλήματα στην κλάση **C**.
- Κλάση **C** κλειστή ως προς αναγωγή R αν

$$\forall\, \Pi_1\,, \Pi_2\,, \Pi_1 \leq_R \Pi_2 \;\; \text{και} \;\; \Pi_2 \in \mathbf{C} \Rightarrow \Pi_1 \in \mathbf{C}$$

Ιδιότητες Αναγωγής

- Κλάση **P** είναι κλειστή ως προς πολυωνυμική αναγωγή.
  - Αν $\Pi_2 \in \mathbf{P}$, τότε και $\Pi_1 \in \mathbf{P}$.
- Πολυωνυμική αναγωγή είναι μεταβατική.
  - Σύνθεση πολυωνυμικών αναγωγών αποτελεί πολυωνυμική αναγωγή.
- Αν $\Pi_1 \leq_P \Pi_2$ και $\Pi_2 \leq_P \Pi_1$, τότε Π_1 και Π_2 πολυωνυμικά ισοδύναμα, $\Pi_1 \equiv_P \Pi_2$.
- Κλάσεις κλειστές ως προς αναγωγή R με κοινό πλήρες πρόβλημα ως προς αναγωγή R **ταυτίζονται**.
  - Έστω κλάσεις $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$ κλειστές ως προς αναγωγή R.
  - Αν $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$ έχουν κοινό πλήρες πρόβλημα Π ως προς αναγωγή R, τότε $\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_2$.

(Απλά) Παραδείγματα Αναγωγών

- Κύκλος Hamilton $\leq_P$ TSP με αποστάσεις 1 και 2 – TSP(1, 2).
  - Δίνεται γράφημα G(V, E). Έχει G κύκλο Hamilton;
  - Από G, κατασκευάζουμε στιγμιότυπο I_G του TSP(1, 2):
    - Μία «πόλη» u για κάθε κορυφή u $\in$ V.
    - Συμμετρικές αποστάσεις: $d(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{αν } \{u,v\} \in E \\ 2 & \text{αν } \{u,v\} \notin E \end{cases}$
  - G έχει κύκλο Hamilton ανν I_G έχει περιοδεία μήκους $\leq |V|$.
- TSP(1, 2) $\leq_P$ Metric TSP.
  - 1ο ειδική περίπτωση 2ου : αποστάσεις 1 και 2 ικανοποιούν τριγωνική ανισότητα.

(Απλά) Παραδείγματα Αναγωγών

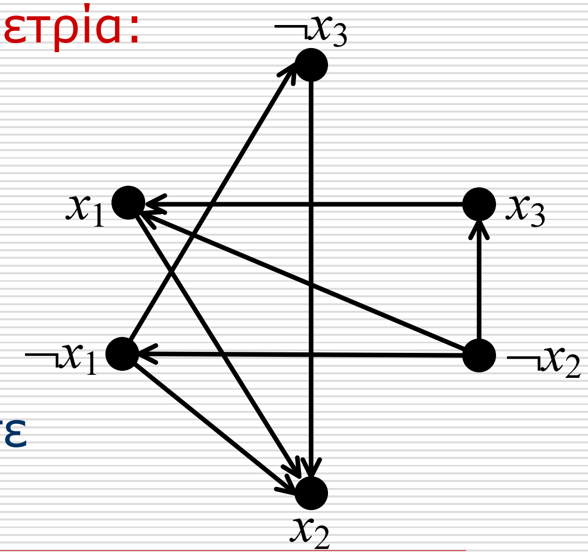
- Min Vertex Cover $\equiv_P$ Max Independent Set $\equiv_P$ Max Clique.
  - Vertex cover C σε γράφημα G(V, E) ανν
    independent set V \ C σε γράφημα G ανν
    clique V \ C σε συμπληρωματικό γράφημα $\overline{G}$.
- Έστω μη κατευθυνόμενο γράφημα G(V, E), |V| = *n*.
  Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:
  - Το G έχει vertex cover $\leq k$.
  - Το G έχει independent set $\geq n - k$.
  - Το συμπληρωματικό $\overline{G}$ έχει clique $\geq n - k$.

k-Ικανοποιησιμότητα

- Λογική πρόταση φ σε *k*-Συζευκτική Κανονική Μορφή, *k*-CNF:
  $\varphi \equiv c_1 \wedge \ldots \wedge c_m$, όπου $c_i = \ell_{i_1} \vee \ldots \vee \ell_{i_k}$, με $\ell_{i_j} \in \{x_1, \neg x_1, \ldots, x_n, \neg x_n\}$
  - c_j : όροι. ℓ_{i_j} : literals. #literals σε κάθε όρο $\leq k$.
    Π.χ. για $k = 2$: $(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee x_3)$
- *k*-Ικανοποιησιμότητα:
  - Δίνεται φ σε k-CNF. Είναι φ ικανοποιήσιμη;

2-Ικανοποιησιμότητα

- 2-Ικανοποιησιμότητα $\in$ **P**.
  - Παρατηρούμε ότι $\ell_i \vee \ell_j \equiv (\neg \ell_i \to \ell_j) \wedge (\neg \ell_j \to \ell_i)$
  - Κατασκευάζουμε κατευθυν. γράφημα G_φ με «συνεπαγωγές» φ.
    G_φ έχει κορυφές $\{x_1, \ldots, x_n\} \cup \{\neg x_1, \ldots, \neg x_n\}$
  - Για κάθε όρο $\ell_i \vee \ell_j$, ακμές G_φ $(\neg \ell_i, \ell_j)$ και $(\neg \ell_j, \ell_i)$
  - Ακμές και μονοπάτια G_φ εμφανίζουν συμμετρία:
    ακμή $(\ell_i, \ell_j) \Leftrightarrow$ ακμή $(\neg \ell_j, \neg \ell_i)$
    $\ell_i - \ell_j$ μονοπάτι $\Leftrightarrow \neg \ell_j - \neg \ell_i$ μονοπάτι
  - Όμως $\ell_i \to \ell_j$ ψευδής $\Leftrightarrow \ell_i = 1$ και $\ell_j = 0$
  - φ μη ικανοποιήσιμη ανν υπάρχουν
    x_i – $\neg x_i$ και $\neg x_i$ – x_i μονοπάτια.
  - Λόγω αυτών, καμία αποτίμηση x_i και $\neg x_i$ σε συμπληρωματικές τιμές δεν ικανοποιεί φ.



$(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge$
$\wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee x_3)$

«Δύσκολα» Προβλήματα

- Τι κάνουμε όταν ένα πρόβλημα φαίνεται «δύσκολο»;
  - «Δύσκολο»: μετά από μεγάλη προσπάθεια, δεν βρίσκουμε αποδοτικό αλγόριθμο (πολυωνυμικού χρόνου).
- Πάμε στο αφεντικό και λέμε:
  - Δεν **μπορώ** να βρω αποδοτικό αλγόριθμο. Απόλυση!
  - Δεν **υπάρχει** αποδοτικός αλγόριθμος. Too good to be true!
  - **Κανένας** δεν μπορεί να βρει αποδοτικό αλγόριθμο:
    - Ανάγουμε πολυωνυμικά κάποιο γνωστό **NP**-πλήρες πρόβλημα στο «δικό μας».
- Θεωρία **NP-πληρότητας.**
  - NP-πλήρη: κλάση εξαιρετικά σημαντικών προβλημάτων που ανάγονται πολυωνυμικά το ένα στο άλλο.
  - Είτε όλα λύνονται σε πολυωνυμικό χρόνο είτε κανένα.
  - Έχουν μελετηθεί τόσο πολύ, ώστε όλοι πιστεύουν ότι **κανένα**!