



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών

Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Διδάσκοντες: Δημήτρης Φωτάκης, Δώρα Σούλιου

1η Σειρά Προγραμματιστικών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 5/11/2018

Άσκηση 1: Πολεοδομικό Τέλος

Η κεντρική λεωφόρος στην πρωτεύουσα των Αλγορίθμων αναπτύσσεται ραγδαία! Έχουν ήδη κτιστεί N πανύψηλοι ουρανοξύστες, που τη διαχείρισή τους έχει μία μόνο εταιρεία.

Προσπαθώντας να ελέγξει την τάση ανέγερσης όλο και ψηλότερων κτηρίων, το Υπουργείο Χωροταξίας αποφάσισε να επιβάλει ένα ιδιότυπο πολεοδομικό τέλος στους ουρανοξύστες της κεντρικής λεωφόρου. Το συνολικό ποσό θα υπολογιστεί με βάση έναν ουρανοξύστη που θα επιλεγεί από τον Υπουργό. Αν υποθέσουμε ότι επιλέγεται ο k -οστός ουρανοξύστης, το τέλος που αναλογεί στον ουρανοξύστη i θα είναι ανάλογο του ύψους του ψηλότερου ουρανοξύστη στο τμήμα της λεωφόρου από τον ουρανοξύστη i μέχρι και τον ουρανοξύστη k . Το τέλος που αναλογεί στον ουρανοξύστη k θα είναι ανάλογο του ύψους του. Η εταιρεία που διαχειρίζεται τους ουρανοξύστες θα πρέπει να πληρώσει το συνολικό κόστος για όλους τους ουρανοξύστες.

Ο Πρόεδρος της εταιρείας προσπαθεί να βρει (και να πείσει τον Υπουργό να επιλέξει ως βάση για τον υπολογισμό του τέλους) τον ουρανοξύστη που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος. Σας ζήτησε λοιπόν να γράψετε ένα πρόγραμμα που υπολογίζει το ελάχιστο συνολικό κόστος την εταιρεία του.

Δεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμα αρχικά θα διαβάξει από το standard input έναν θετικό ακέραιο, το πλήθος N των ουρανοξυστών. Στη συνέχεια, το πρόγραμμα θα διαβάξει N θετικούς ακέραιους, χωρισμένους με κενό. Ο i -οστος ακέραιος αντιστοιχεί στο ύψους H_i του ουρανοξύστη i .

Δεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμα πρέπει να τυπώνει στο standard output έναν θετικό ακέραιο, το ελάχιστο συνολικό κόστος που πρέπει να πληρώσει η εταιρεία για όλους τους ουρανοξύστες¹. Σημειώστε ότι το ελάχιστο συνολικό κόστος (καθώς και κάποια από τα ενδιαμέσα αποτελέσματα που χρειάζονται για τον υπολογισμό του) μπορεί να υπερβαίνουν το 2^{32} .

Περιορισμοί:

$$1 \leq N \leq 10^6$$

$$1 \leq H_i \leq 10^9$$

Για το 40% των αρχείων εισόδου,
θα ισχύει ότι $1 \leq N \leq 5000$

Παράδειγμα Εισόδου:

7
3 4 1 5 2 3 3

Παράδειγμα Εξόδου:

28

Όριο χρόνου εκτέλεσης: 1 sec.

Όριο μνήμης: 64 MB.

Άσκηση 2: Πόλεμος στη Χώρα των Αλγορίθμων

Στη Χώρα των Αλγορίθμων γίνεται πόλεμος! Οι κάτοικοι έχουν χωριστεί σε δύο στρατόπεδα, διαφωνώντας για το πόσο σημαντική είναι η Δυαδική Αναζήτηση, και είναι έτοιμοι για την τελική σύρραξη.

¹ **Εξήγηση παραδείγματος:** Το ελάχιστο κόστος επιτυγχάνεται αν επιλέξουμε ως βάση υπολογισμού τον 5ο ουρανοξύστη, με ύψος 2. Τότε το τέλος για καθέναν από τους πρώτους τέσσερις ουρανοξύστες είναι 5, το τέλος για τον 5ο είναι 2, και το τέλος για καθέναν από τους δύο τελευταίους ουρανοξύστες είναι 3. Το συνολικό κόστος είναι 28.

Στην διάθεση τους κατέχουν δύο εκτοξευτές σωματιδίων τους οποίους θα χρησιμοποιήσουν σαν όπλο. Θεωρούμε πως το πεδίο μάχης έχει την μορφή μιας απέραντης ευθείας. Οι δύο ομάδες τοποθετούν τους εκτοξευτές τους στις θέσεις $x = 0$ και $x = L$ αντίστοιχα. Ο εκτοξευτής του πρώτου στρατοπέδου εκπέμπει σωματίδια τύπου a προς τα δεξιά και ο εκτοξευτής του δεύτερου στρατοπέδου εκπέμπει σωματίδια τύπου b προς τα αριστερά. Θεωρούμε πως η μάχη ξεκινάει την χρονική στιγμή $t = 0$, και ο τρόπος με τον οποίο αλληλεπιδρούν τα σωματίδια καθορίζεται από τους παρακάτω κανόνες:

- Αν δύο σωματίδια διαφορετικού τύπου συγκρουστούν μεταξύ τους, τότε αυτά εξαϋλώνονται.
- Αν δύο σωματίδια ίδιου τύπου συγκρουστούν μεταξύ τους, τότε το ένα προσπερνάει το άλλο χωρίς να εξαϋλωθούν.

Για κάθε εκτοξευτή γνωρίζουμε πως θα γίνουν N εκτοξεύσεις σωματιδίων. Για κάθε σωματίδιο γνωρίζουμε τη χρονική στιγμή που εκτοξεύεται και την ταχύτητα του. Συγκεκριμένα:

- Για τα σωματίδια τύπου a γνωρίζουμε για τις χρονικές στιγμές εκτόξευσής τους $t_{a_1}, t_{a_2}, \dots, t_{a_N}$ ότι $0 = t_{a_1} < t_{a_2} < \dots < t_{a_N}$. Επιπλέον, συμβολίζουμε τις ταχύτητες τους ως $v_{a_1}, v_{a_2}, \dots, v_{a_N}$.
- Για τα σωματίδια τύπου b γνωρίζουμε για τις χρονικές στιγμές εκτόξευσής τους $t_{b_1}, t_{b_2}, \dots, t_{b_N}$ ότι $0 = t_{b_1} < t_{b_2} < \dots < t_{b_N}$. Επιπλέον, συμβολίζουμε τις ταχύτητες τους ως $v_{b_1}, v_{b_2}, \dots, v_{b_N}$.

Οι στρατηγοί των δύο στρατοπέδων ενδιαφέρονται να μάθουν τα ζευγάρια των σωματιδίων που συμμετέχουν στις πρώτες K συγκρούσεις. Σκοπεύετε να γράψετε ένα πρόγραμμα που υπολογίζει τα εν λόγω ζεύγη σωματιδίων και να το πουλήσετε στον στρατηγό που υποστηρίζετε.

Δεδομένα Εισόδου: Το πρόγραμμα θα διαβάζει από το standard input τρεις θετικούς ακέραιους, το πλήθος N των σωματιδίων, την απόσταση L των δύο εκτοξευτών και τον αριθμό των ζητούμενων συγκρούσεων K . Στη συνέχεια, στην i -οστή από τις επόμενες N γραμμές, θα υπάρχουν δύο ακέραιοι αριθμοί t_{a_i}, v_{a_i} που αντιστοιχούν στον χρόνο εκτόξευσης και στην ταχύτητα κάθε σωματιδίου a . Στις τελευταίες N γραμμές, θα υπάρχουν δύο ακέραιοι αριθμοί t_{b_i}, v_{b_i} που αντιστοιχούν στον χρόνο εκτόξευσης και στην ταχύτητα κάθε σωματιδίου b .

Δεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμα θα τυπώνει στο standard output K γραμμές, σε καθεμιά από τις οποίες θα τυπώνονται δύο ακέραιοι. Ο πρώτος αντιστοιχεί στον αριθμό του σωματιδίου a που συμμετείχε στην αντίστοιχη σύγκρουση και ο δεύτερος αριθμός αντιστοιχεί στον αριθμό του σωματιδίου b που συμμετείχε στην σύγκρουση.

Περιορισμοί:

- $1 \leq N \leq 2 \cdot 10^5$
- $1 \leq L \leq 10^9$
- $1 \leq K \leq 100 \leq N$
- $0 \leq t_{a_i}, t_{b_i} \leq 10^9$
- $1 \leq v_{a_i}, v_{b_i} \leq 10^9$

Όριο χρόνου εκτέλεσης: 2 sec.

Όριο μνήμης: 64MB.

Παράδειγμα Εισόδου:

```
4 100 2
0 1
2 3
3 2
6 10
0 5
3 10
5 1
7 20
```

Παράδειγμα Εξόδου:

```
4 2
2 4
```