Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
**Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα**
Διδάσκοντες: Δημήτρης Φωτάκης, Δώρα Σούλιου
**3η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 17/12/2018**

## Άσκηση 1: Μακρύτερο Μονοπάτι σε Δέντρο

Θεωρούμε ένα δέντρο $T(V, E)$ που αναπαρίσταται με λίστα γειτνίασης. Σε κάθε κορυφή $u$ του $T$ έχουμε ένα (ενδεχομένως αρνητικό) βάρος $w(u) \in \mathbb{Z}$ (π.χ., το $w(u)$ θα μπορούσε να είναι το κέδρος ή η ζημιά ενός πλανόδιου πωλητή που επισκέπτεται την κορυφή $u$). Θέλουμε να υπολογίσουμε ένα (απλό) μονοπάτι $p$ που μεγιστοποιεί το συνολικό βάρος $w(p) = \sum_{u \in p} w(u)$ των κορυφών που συμπεριλαμβάνονται στο $p$. Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο για αυτό το πρόβλημα. Να αιτιολογήσετε προσεκτικά την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

## Άσκηση 2: Μια Συνάρτηση Κόστους σε Κατευθυνόμενα Γραφήματα (DPV 3.25)

Θεωρούμε ένα κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ στο οποίο κάθε κορυφή $u \in V$ έχει μία θετική τιμή $p(u) \in \mathbb{N}$. Το κόστος $c(u)$ κάθε κορυφής $u \in V$ είναι η τιμή της φθηνότερης κορυφής που είναι προσπελάσιμη από τη $u$ (συμπεριλαμβανομένης και της ίδιας της $u$). Να διατυπώσετε αλγόριθμο γραμμικού χρόνου που υπολογίζει το κόστος $c(u)$ για όλες τις κορυφές $u \in V$. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα των αλγορίθμων στα (α) και (β).

(α) Να διατυπώσετε αλγόριθμο γραμμικού χρόνου για την περίπτωση που το $G$ είναι ένα Κατευθυνόμενο Ακυκλικό Γράφημα (DAG).

(β) Χρησιμοποιώντας την έννοια των ισχυρά συνεκτικών συνιστωσών, να γενικεύσετε τον αλγόριθμο του (α) ώστε να εφαρμόζεται σε κάθε κατευθυνόμενο γράφημα $G$.

## Άσκηση 3: Κλέφτες και Αστυνόμοι

Οι φίλοι σας, Κώστας και Ανδρέας, έχουν τελευταία παθιαστεί με ένα καινούργιο επιτραπέζιο που θυμίζει το παιδικό παιχνίδι "Κλέφτες και Αστυνόμοι". Το παιχνίδι βασίζεται σε ένα χάρτη, στη μορφή ενός απλού συνεκτικού μη κατευθυνόμενου γραφήματος $G(V, E)$ με μια διακεκριμένη κορυφή $d \in V$, το *καταφύγιο*. Το παιχνίδι έχει έναν φαντεζί μηχανισμό που καθορίζει μια τυχαία αρχική κορυφή $t \in V$ για τον Κώστα (που υποδύεται πάντα τον "κλέφτη") και μια (διαφορετική) τυχαία αρχική κορυφή $p \in V$ για τον Ανδρέα (που υποδύεται πάντα τον "αστυνόμο"). Ο Κώστας και ο Ανδρέας τοποθετούν τα πιόνια τους στις αντίστοιχες αρχικές κορυφές και το παιχνίδι ξεκινά. Οι παίκτες παίζουν εναλλάξ, με τον Κώστα να έχει πάντα την πρώτη κίνηση. Σε κάθε γύρο, ο παίκτης που έχει σειρά πρέπει να μετακινήσει το πιόνι του από την κορυφή $u$, όπου αυτό βρίσκεται, σε όποια γειτονική κορυφή της $u$ επιθυμεί (το πιόνι δεν μπορεί να παραμείνει στάσιμο στη $u$). Ένας επιπλέον περιορισμός είναι ότι ο Ανδρέας δεν μπορεί να μετακινήσει το πιόνι του στο καταφύγιο. Ο Κώστας κερδίζει το παιχνίδι αν καταφέρει να φτάσει στο καταφύγιο $d$, πριν ο Ανδρέας προλάβει να βρεθεί στην ίδια κορυφή με αυτόν. Ο Ανδρέας κερδίζει το παιχνίδι αν βρεθεί στην ίδια κορυφή με τον Κώστα, πριν ο Κώστας φτάσει στο καταφύγιο. Αν σε κάποιο γύρο επαναληφθεί η θέση κάποιου προηγούμενου γύρου, το παιχνίδι ολοκληρώνεται με ισοπαλία.

Θαυμάζετε βέβαια την τελειότητα που έχουν κατακτήσει οι φίλοι σας σε αυτό το παιχνίδι. Έχετε διαπιστώσει ότι τόσο ο Κώστας όσο και ο Ανδρέας επιλέγουν πάντα με βέλτιστο τρόπο την επόμενή τους κίνηση. Αλλά αυτό κάνει το παιχνίδι απολύτως προβλέψιμο, και έχετε κουραστεί να τους παρακολουθείτε. Για να τους αποδείξετε ότι το παιχνίδι είναι προβλέψιμο (επειδή ακριβώς και οι δύο παίζουν πλέον βέλτιστα), θέλετε να υπολογίσετε το αποτέλεσμα του παιχνιδιού για κάθε πιθανό ζευγάρι αρχικών κορυφών $(t, p)$, $t \neq p$. Ελπίζετε ότι αν οι φίλοι σας δουν τα αποτελέσματα, θα χάσουν το ενδιαφέρον τους για το παιχνίδι, και θα βγείτε και καμιά βόλτα.

Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει το αποτέλεσμα του παιχνιδιού για κάθε πιθανό ζευγάρι αρχικών κορυφών $(t, p)$, $t \neq p$. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας. *Υπόδειξη:* Μπορούμε να καταγράψουμε όλες τις καταστάσεις του παιχνιδιού ως (θέση Κώστα, θέση Ανδρέα, επόμενος παίκτης) και να βρούμε όλες τις πιθανές επόμενες καταστάσεις για κάθε κατάσταση.

### Άσκηση 4: Το Σύνολο των Συνδετικών Δέντρων (ΚΤ 4.27 και ΚΤ 4.28)

Θεωρούμε ένα συνεκτικό μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ με $n$ κορυφές και $m$ ακμές.

(α) Έστω $T_1$ και $T_2$ δύο διαφορετικά συνδετικά δέντρα του $G$. Να δείξετε ότι για κάθε ακμή $e \in T_1 \setminus T_2$, υπάρχει ακμή $e' \in T_2 \setminus T_1$, τέτοια ώστε το $(T_1 \setminus \{e\}) \cup \{e'\}$ είναι συνδετικό δέντρο. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο που με δεδομένα τα $T_1$, $T_2$ και $e$, υπολογίζει μια τέτοια ακμή $e'$.

(β) Σχηματίζουμε γράφημα $H$ που κάθε κορυφή του αντιστοιχεί σε ένα διαφορετικό συνδετικό δέντρο του $G$. Δύο συνδετικά δέντρα $T_1$ και $T_2$ του $G$ (κορυφές του $H$) συνδέονται με ακμή στο $H$ αν διαφέρουν κατά μία μόνο ακμή, δηλ. αν $|T_1 \setminus T_2| = |T_2 \setminus T_1| = 1$. Να δείξετε ότι το $H$ είναι συνεκτικό και ότι η απόσταση (στο $H$) μεταξύ δύο συνδετικών δέντρων $T_1$ και $T_2$ του $G$ είναι ίση με $|T_1 \setminus T_2|$. Να εξηγήσετε πως θα χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο του (α) για να υπολογίσουμε ένα συντομότερο μονοπάτι (στο $H$) μεταξύ των $T_1$ και $T_2$.

(γ) Θεωρούμε μια διαμέριση των ακμών του $G$ σε δύο σύνολα $E_1$ και $E_2$. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο που με είσοδο το $G(V, E)$, τα σύνολα $E_1$ και $E_2$, και έναν φυσικό $k$, $1 \leq k \leq n-1$, υπολογίζει ένα συνδετικό δέντρο του $G$ με ακριβώς $k$ ακμές στο $E_1$. Αν δεν υπάρχει τέτοιο δέντρο, ο αλγόριθμός σας θα πρέπει να το διαπιστώνει. *Υπόδειξη:* Μπορεί να σας βοηθήσει το (β).

### Άσκηση 5: Μοναδικότητα Ελάχιστου Συνδετικού Δέντρου

Θεωρούμε ένα συνεκτικό μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, w)$ με βάρη στις ακμές. Είναι γνωστό (π.χ. δείτε το 6.α, στην 3η σειρά προτεινόμενων ασκήσεων) ότι αν όλες οι ακμές του $G$ έχουν διαφορετικά βάρη, τότε το Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο (ΕΣΔ) του $G$ είναι μοναδικό.

(α) Να δείξετε ότι το αντίστροφο δεν ισχύει. Δηλαδή, να δώσετε παράδειγμα γραφήματος με μοναδικό ΕΣΔ, το οποίο έχει ακμές ίδιου βάρους.

(β) Να δείξετε ότι αν για κάθε τομή $(S, V \setminus S)$ του $G(V, E, w)$, η ακμή ελάχιστου βάρους που διασχίζει την $(S, V \setminus S)$ είναι μοναδική, τότε το $G$ έχει μοναδικό ΕΣΔ. Όπως και στο (α), να δείξετε ότι το αντίστροφο δεν ισχύει.

(γ) Να διατυπώσετε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για τη μοναδικότητα του ΕΣΔ σε ένα συνεκτικό μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, w)$ (και να αποδείξετε ότι η συνθήκη που διατυπώσατε είναι πράγματι ικανή και αναγκαία).

(δ) Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο με χρονική πολυπλοκότητα $\mathrm{O}(|V|^2 + |E| \log |E|)$ που ελέγχει κατά πόσο ένα συνεκτικό μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, w)$ έχει μοναδικό ΕΣΔ. Να αιτιολογήσετε αναλυτικά την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας. Θα υπάρχει επιπλέον βαθμολογία (bonus) για απαντήσεις με χρονική πολυπλοκότητα $\mathrm{O}(|E| \log |E|)$.