Κρυπτογραφία

Μονόδρομες συναρτήσεις - Συναρτήσεις σύνοψης

Άρης Παγουρτζής - Πέτρος Ποτίκας

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Περιεχόμενα

1. Μονόδρομες Συναρτήσεις
2. Συναρτήσεις σύνοψης (hash functions)
3. Δένδρα Merkle

Συναρτήσεις μονόδρομες ή μονής-κατεύθυνσης (one-way functions)

- Συνάρτηση που είναι εύκολο να υπολογιστεί, αλλά “δύσκολο” να αντιστραφεί
- Απαραίτητη προϋπόθεση για κρυπτογραφία ιδιωτικού κλειδιού
- Γεννήτριες ψευδοτυχαιότητας βασίζονται στην υπόθεση ύπαρξης μονόδρομων συναρτήσεων
- Με αμελητέα πιθανότητα μπορώ να αντιστρέψω μια μονόδρομη συνάρτηση
- Με εξαντλητική αναζήτηση (εκθετικό χρόνο) μπορώ να αντιστρέψω μια μονόδρομη συνάρτηση

Μονόδρομες Συναρτήσεις

Έστω συνάρτηση $f\colon \{0,1\}^* \mapsto \{0,1\}^*$.

Ορίζουμε για κάθε αλγόριθμο $\mathcal{A}$ και κάθε παράμετρο ασφαλείας n το

Πείραμα αντιστρεψιμότητας $Invert_{\mathcal{A},f}(n)$

1. Διάλεξε $x \leftarrow \{0,1\}^n$. Υπολόγισε $y = f(x)$
2. Ο $\mathcal{A}$ με είσοδο το 1^n και το y επιστρέφει το x'
3. Η έξοδος είναι 1, αν $f(x') = y$, αλλιώς 0

Παρατήρηση: Δε χρειάζεται να βρούμε το ίδιο το x, αλλά οποιαδήποτε x', τ.ώ. $f(x') = y = f(x)$.

Μονόδρομες Συναρτήσεις

Ορισμός

Μία συνάρτηση $f\colon \{0,1\}^* \mapsto \{0,1\}^*$ είναι *μονόδρομη συνάρτηση* αν είναι:

1. (Εύκολα υπολογίσιμη) Υπάρχει πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμος M_f που την υπολογίζει, δηλ. $M_f(x) = f(x), \forall x$
2. (Δύσκολα αντιστρέψιμη) Για κάθε PPT αλγόριθμο $\mathcal{A}$ υπάρχει αμελητέα συνάρτηση ϵ έτσι ώστε:

$$Pr[Invert_{\mathcal{A},f}(n) = 1] \leq \epsilon(n)$$

Πιο αναλυτικά,

$$Pr_{x \leftarrow \{0,1\}^n}[\mathcal{A}(1^n, f(x)) \in f^{-1}(f(x))] \leq \epsilon(n)$$

Μονόδρομες Συναρτήσεις

Παρατηρήσεις:

1. Μια συνάρτηση που δεν είναι μονόδρομη δεν είναι απαραίτητο να αντιστρέφεται πάντα εύκολα (ή "συχνά").
   Π.χ. αν υπάρχει αντίπαλος που αντιστρέφει μια συνάρτηση με πιθανότητα n^{-10} για όλους άρτιους n (αλλά αποτυγχάνει για τους μονούς), τότε δεν είναι μονόδρομη.
2. Αν έχουμε εκθετικό χρόνο, τότε αν μας δίνεται ένα y και η παράμετρος ασφαλείας 1^n, τότε μπορούμε να δοκιμάσουμε όλα τα $x \in \{0,1\}^n$, μέχρι να βρούμε ένα x, τέτοιο ώστε $f(x) = y$.

Μονόδρομες Μεταθέσεις

Μια συνάρτηση λέμε ότι *διατηρεί το μήκος* αν $|f(x)| = |x|, \forall x$.

Ορισμός

Μια μονόδρομη συνάρτηση που διατηρεί το μήκος και είναι 1-1, είναι μια *μονόδρομη μετάθεση*.

Η τιμή y καθορίζει μοναδικά το x από το οποίο προήλθε. Παρόλα αυτά είναι δύσκολο να βρούμε το x σε πολυωνυμικό χρόνο.

Υποψήφιες μονόδρομες συναρτήσεις

Υπάρχουν μονόδρομες συναρτήσεις με την προϋπόθεση πως κάποια προβλήματα είναι δύσκολα, π.χ. παραγοντοποίηση ακεραίων

Παράδειγμα 1

$f_{mult}(x, y) = xy$, όμως με μεγάλη πιθανότητα, το αποτέλεσμα άρτιος, οπότε το $(2, xy/2)$ είναι αντίστροφος. Με περιορισμό, είναι μονόδρομη:

1. $f_{mult}(x, y) = (xy, |x|, |y|)$, (εναλλακτικά, x, y έχουν ίδιο μήκος)
2. x, y πρώτοι αριθμοί ίσου μήκους

Παράδειγμα 2

Η συνάρτηση $f(x_1, ..., x_n, J) = (x_1, ..., x_n, \sum_{j \in J} x_j)$, όπου κάθε x_i είναι ένας ακέραιος και $J \subseteq \{1, 2, ..., n\}$. Εύρεση αντιστρόφου είναι το γνωστό $\mathcal{NP}$-πλήρες πρόβλημα Subset Sum. Είναι μονόδρομη;

Υποψήφιες μονόδρομες μεταθέσεις

Παράδειγμα 3

Έστω ένας πρώτος αριθμός p μήκους n-bits και ένας γεννήτορας $g \in \mathbb{Z}_p^*$. Έστω ένα στοιχείο $x \in \mathbb{Z}_p^*$. Ορίζουμε

$$f_{p,g}(x) = g^x \bmod p$$

- Η συνάρτηση αυτή διατηρεί το μήκος και είναι 1-1, άρα μετάθεση.
- Η δυσκολία αντιστροφής της βασίζεται στη δυσκολία του προβλήματος διακριτού λογάριθμου.

Πρακτικά συστήματα, όπως το AES, δίνουν μονόδρομες συναρτήσεις, π.χ. με την υπόθεση ότι είναι ψευδοτυχαία μετάθεση.

Μονόδρομες συναρτήσεις καταπακτής (Trapdoor one-way functions)

Μονόδρομες συναρτήσεις που είναι δύσκολο να αντιστραφούν, εκτός και αν ξέρουμε κάποιο μυστικό, την *καταπακτή* (trapdoor).

Παράδειγμα

Έστω $N = pq$, όπου p, q μεγάλοι πρώτοι αριθμοί.

Η συνάρτηση $f_N(x) = x^2 \bmod N$ είναι μια μονόδρομη μετάθεση με καταπακτή.

Βασίζεται στην δυσκολία εύρεσης τετραγωνικών ριζών *mod* N, για σύνθετο N, εκτός και αν ξέρουμε την παραγοντοποίηση του.

Γνωστή ως μονόδρομη μετάθεση Rabin (κρυπτοσύστημα)

Συναρτήσεις σύνοψης (hash functions)

- Γνωστές και ως συναρτήσεις κατακερματισμού.
- Σημαντικές ιδιότητες:
  - Συμπίεση $h : X \to Y, |Y| < |X|$.
    Συνήθως $X = \Sigma^*$, $Y = \Sigma^n$, δηλαδή η $h(x)$ έχει συγκεκριμένο μήκος για οποιαδήποτε είσοδο x.
  - Ευκολία Υπολογισμού Ο υπολογισμός της τιμής $h(x)$ για κάποιο x γίνεται "εύκολα". Δηλαδή υπάρχει αλγόριθμος A πολυωνυμικού χρόνου, έτσι ώστε για κάθε x να ισχύει $h(x) = A(x)$.
  - Μια συνάρτηση σύνοψης ορίζει σχέση ισοδυναμίας:

$$x \sim x' : \quad h(x) = h(x')$$

    Δύο στοιχεία στην ίδια κλάση ισοδυναμίας λέμε ότι προκαλούν σύγκρουση (collision).

Συναρτήσεις σύνοψης (hash functions): επιθυμητές ιδιότητες

Έστω hash function $h : X \to Y$. Η h έχει:

1. Αντίσταση πρώτου ορίσματος (preimage resistance), αν για $y \in Y$ είναι υπολογιστικά δύσκολο να βρεθεί $x \in X$ τ.ώ. $h(x) = y$.
2. Αντίσταση δεύτερου ορίσματος (2nd preimage resistance), αν για $x \in X$ είναι υπολογιστικά δύσκολο να βρεθεί $x' \in X$ τ.ώ. $x \neq x'$ και $h(x) = h(x')$.
3. Δυσκολία εύρεσης συγκρούσεων (collision resistance / freeness), αν είναι υπολογιστικά δύσκολο να βρεθούν $x, x' \in X$ έτσι ώστε $h(x) = h(x')$.

Άλλα ονόματα: για το (2) weak collision freeness, για το (1) non-invertibility.

Σειρά ισχύος: $(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$ (υπό προϋποθέσεις).

One-way hash functions (OWHFs): (1) & (2).
Collision-resistant hash functions (CRHFs): (1) & (2) & (3).

Συναρτήσεις σύνοψης (hash functions): παραδείγματα

1. $f(x) = (x^2 - c) \mod p$: δεν είναι μονής κατεύθυνσης αφού η εύρεση τετραγωνικών ριζών στο $\mathbb{Z}_p$ είναι δυνατή σε πολυωνυμικό χρόνο.
2. $g(x) = x^2 \mod n$, $n = pq, p, q$ κρυφοί: αντίσταση πρώτου ορίσματος, αλλά όχι αντίσταση δεύτερου ορίσματος (γιατί;), επομένως δεν είναι CRHF.
3. $h : \mathbb{Z}_q^2 \to \mathbb{Z}_p^*$, $h(x_1, x_2) = \alpha^{x_1}\beta^{x_2} \bmod p$, p, q πρώτοι, $p = 2q + 1$, α, β γεννήτορες του $\mathbb{Z}_p^*$.
   Είναι γνωστή ως συνάρτηση σύνοψης Chaum-van Heijst-Pfitzman και είναι CRHF αν ισχύει η Υπόθεση Διακριτού Λογαρίθμου στη $\mathbb{Z}_p^*$.

Επίθεση τετραγωνικής ρίζας (Παράδοξο Γενεθλίων)

Θεώρημα

Έστω συνάρτηση σύνοψης $h : X \to Y$ και η $h(x) \in Y$ ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή πιθανότητας όταν η $x \in X$ ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή. Η πιθανότητα να βρεθεί σύγκρουση μετά από τυχαία επιλογή $x_1, x_2, \ldots, x_k$ είναι περίπου $\frac{1}{2}$ όταν $k \cong 1.17\sqrt{n}$, όπου $n = |Y|$.

Απόδειξη

$NoColl_i$: δεν έχουμε σύγκρουση στα $\{y_1, y_2, ..., y_i\}$
Έχουμε $NoColl_k$ αν $NoColl_i$ για όλα τα $i \leq k$, δηλαδή
$Pr[NoColl_k] = Pr[NoColl_1]Pr[NoColl_2|NoColl_1] \cdots Pr[NoColl_k|NoColl_{k-1}]$

- $Pr[NoColl_1] = 1$
- Αν συμβαίνει το $NoColl_i$, τότε η πιθανότητα να συγκρουστεί το y_{i+1} με τα προηγούμενα είναι $\frac{i}{n}$

Επίθεση τετραγωνικής ρίζας (Παράδοξο Γενεθλίων)

απόδειξη – συν.

$$Pr[NoColl_k] = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} = \prod_{i=1}^{k-1}(1-\frac{i}{n})$$

Ισχύει $\forall x \in \mathbb{R}, 1+x \leq e^x$, οπότε:

$$\prod_{i=1}^{k-1}(1-\tfrac{i}{n}) \leq \prod_{i=1}^{k-1} e^{-\frac{i}{n}} = e^{-\frac{\sum_{i=1}^{k-1} i}{n}} = e^{-\frac{k(k-1)}{2n}} \Rightarrow$$

$$Pr[Coll_k] \geq 1 - e^{-\frac{k(k-1)}{2n}}$$

□

Επίθεση τετραγωνικής ρίζας (Παράδοξο Γενεθλίων)

απόδειξη – συν.

$$Pr[Coll_k] \geq 1 - e^{-\frac{k(k-1)}{2n}}$$

Για να είναι επομένως η πιθανότητα σύγκρουσης τουλάχιστον p αρκεί:

$$1 - e^{-\frac{k(k-1)}{2n}} \geq p \Rightarrow \ln(1-p) \geq -\frac{k(k-1)}{2n} \Rightarrow k^2 - k - 2n \ln \frac{1}{1-p} \geq 0$$

Λύνοντας ως προς k: $k \geq 1 + \sqrt{2n \ln \frac{1}{1-p}}$

Για $p = \frac{1}{2}$ προκύπτει $k \geq 1.17\sqrt{n} + 1$. Για $n = 365$, $k \geq 23$. □

Σημαντική εφαρμογή (μεταξύ άλλων): μέθοδος παραγοντοποίησης ρ

Επιθέσεις γενεθλίων

- Συμπέρασμα, αν $h : \{0,1\}^* \mapsto \{0,1\}^l$, τότε αν πάρω $k = \mathcal{O}(2^{l/2})$ τυχαία στοιχεία από το $\{0,1\}^*$, η πιθανότητα να έχω σύγκρουση είναι 1/2
- Ως προς ασυμπτωτική πολυπλοκότητα, $2^l, 2^{l/2}$ το ίδιο, όχι όμως στην πράξη (αν θέλω ασφάλεια 128 bits, πρέπει η συνάρτηση hash να δίνει έξοδο 256 bits)
- Η προσέγγιση αυτή έχει δύο αδυναμίες:
  1. τυχαίες τιμές εισόδου
  2. μεγάλος χώρος

Επιθέσεις γενεθλίων με επιλεγμένα μηνύματα

- Επιλογή των μηνυμάτων: Οι τιμές που δίνουμε για να πετύχουμε σύγκρουση, μπορούν να έχουν σχέση μεταξύ τους π.χ. η Alice απολύεται και θέλει να βρει δύο μηνύματα x και x' έτσι ώστε $H(x) = H(x')$, όπου το πρώτο λέει τους λόγους της απόλυσής της, ενώ το δεύτερο κολακευτικά λόγια.
- Φτιάχνουμε $k = \Theta(2^{l/2})$ μηνύματα από τον πρώτο τύπο και άλλα τόσα από το δεύτερο και τις εικόνες τους.

"Είναι δύσκολο/απίθανο να βρεις μια τόσο καλή/εργατική/φιλότιμη υπάλληλο σαν την Alice. Η δουλειά της είναι καταπληκτική/ασύγκριτη."

- Από παράδοξο γενεθλίων έχουμε καλή πιθανότητα να πετύχουμε σύγκρουση μεταξύ μηνυμάτων των δύο τύπων.
- Μειονέκτημα: Θέλει πολύ χώρο

Βελτιωμένες επιθέσεις γενεθλίων

1. Πάρε τυχαία αρχική τιμή x_0 και για $i > 0$ υπολόγισε $x_i = H(x_{i-1})$ και $x_{2i} = H(H(x_{2(i-1)}))$
2. Σε κάθε επανάληψη $x_i \stackrel{?}{=} x_{2i}$. Εάν ίσα, τότε ψάξε από το x_0 έως το x_{2i-1} για σύγκρουση.
3. Βρίσκει το μικρότερο j ώστε $x_j = x_{j+i}$ και τυπώνει τα x_{j-1}, x_{j+i-1}

Βελτιωμένες επιθέσεις γενεθλίων

Αλγόριθμος Επίθεσης Γενεθλίων Μικρού Χώρου

Είσοδος: Συνάρτηση σύνοψης $H : \{0,1\}^* \mapsto \{0,1\}^l$
Έξοδος: $x \neq x'$, με $H(x) = H(x')$

$x_0 \leftarrow \{0,1\}^{l+1}, x' = x = x_0$
for $i = 1, 2, \ldots$ **do** :
  $x = H(x)$
  $x' = H(H(x'))$
  // τώρα $x = H^{(i)}(x_0)$ και $x' = H^{(2i)}(x_0)$
  if $x = x'$ **break**
$x' = x, x = x_0$
for $j = 1 \rightarrow i$ **do** :
  if $H(x) == H(x')$ **return** x, x'
  else $x = H(x'), x' = H(x')$
  // τώρα $x = H^{(j)}(x_0)$ και $x' = H^{(i+j)}(x_0)$

- Σταθερός χώρος: δύο στοιχεία x_i, x_{2i}
- Επιτυχία $1/2$ σε $\Theta(2^{l/2})$ βήματα

Βελτιωμένες επιθέσεις γενεθλίων

Λήμμα

Έστω $x_1, \ldots, x_q$ η ακολουθία τιμών με $x_m = H(x_{m-1})$. Αν $x_I = x_J$, με $1 \leq I < J \leq q$, τότε υπάρχει ένα $i < J$ τέτοιο ώστε $x_i = x_{2i}$.

Απόδειξη.

Η ακολουθία $x_I, x_{I+1}, \ldots$ επαναλαμβάνεται με περίοδο $\Delta = J - I$. Δηλ. για κάθε $i \geq I$ και $k = 0, 1, \ldots$, έχουμε $x_i = x_{i+k\Delta}$. Έστω i το μικρότερο πολλαπλάσιο του Δ που είναι μεγαλύτερο ή ίσο του I. Έχουμε $i < J$ (γιατί;). Επειδή $i \geq I$, το $2i$ είναι πολλαπλάσιο του Δ, έχουμε $x_i = x_{2i}$. $\square$

Βελτιωμένες επιθέσεις γενεθλίων με επιλεγμένα μηνύματα

Όρισε $g\colon \{0,1\}^l \mapsto \{0,1\}^*$, όπου το τελευταίο bit δείχνει ποιά πρόταση θα επιλεγεί και τα υπόλοιπα ποιά λέξη.

Παράδειγμα

0: Bob is a good/hardworking and honest/trustworthy worker/employee.
1: Bob is a difficult/problematic and taxing/irritating worker/employee.

g(0000) = Bob is a good and honest worker.
g(1011) = Bob is a problematic and taxing employee.

- Ορίζουμε $f(x) = H(g(x))$.
- Οποιαδήποτε σύγκρουση x, x' στην f δίνει δύο μηνύματα $g(x), g(x')$ που συγκρούονται.
- Η πιθανότητα να είναι μηνύματα διαφορετικού τύπου είναι 1/2.
- Αν είναι ίδιου τύπου, επαναλαμβάνουμε.

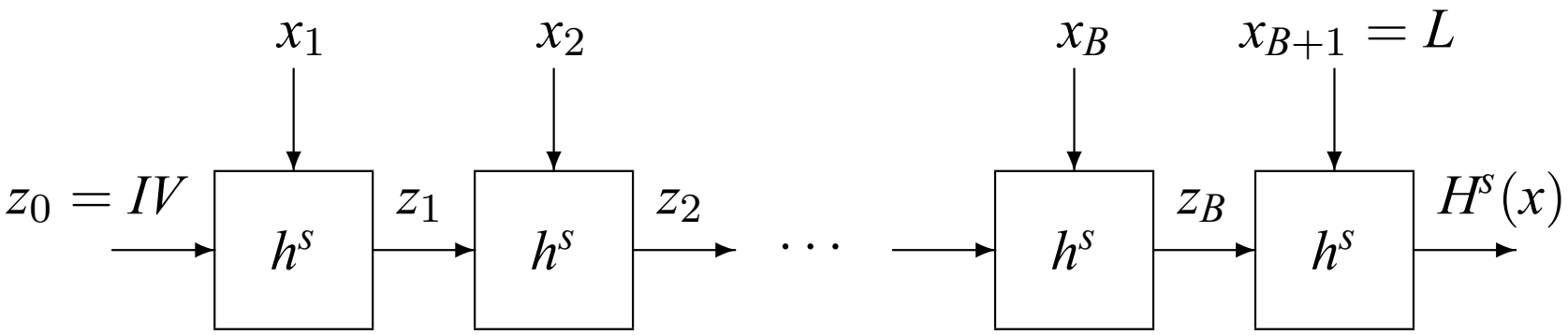
Επέκταση συναρτήσεων σύνοψης

Merkle-Damgård Hash Function Extension

Έστω h μια συνάρτηση σύνοψης που απεικονίζει είσοδο μήκους $2n$ σε έξοδο μήκους n. Κατασκευάζουμε μια συνάρτηση σύνοψης H μεταβλητού μήκους ως εξής:

- H: με είσοδο ένα string $x \in \{0,1\}^*$ μήκους $L \leq 2^n$:
  1. Θέσε $B = \lceil \frac{L}{n} \rceil$ (πλήθος block του x). (Πρόσθεσε μηδενικά στο x ώστε το μήκος να είναι πολλαπλάσιο του n) ($x = x_1, ..., x_B$). Θέσε $x_{B+1} = L$ (το L δυαδική αναπαράσταση)
  2. Θέσε $z_0 = 0^n$ (Initialization vector)
  3. Για $i = 1, ..., B+1$, υπολόγισε το $z_i = h(z_{i-1}||x_i)$
  4. Έξοδος: z_{B+1}

Κατασκευή Merkle-Damgård



Σχήμα : Merkle-Damgård

Επέκταση συναρτήσεων σύνοψης

Θεώρημα

Αν η συνάρτηση σύνοψης h είναι collision resistant, τότε και η H που κατασκευάζεται με τη μέθοδο Merkle-Damgård είναι επίσης collision resistant.

Απόδειξη.

Έστω $x' = x'_1 \ldots x'_{B'} \neq x = x_1 \ldots x_B : \; x'_{B'+1} = L', x_{B+1} = L$, με $H(x) = H(x')$. Τότε έχουμε δύο περιπτώσεις:

1. $L \neq L'$, οπότε στο τελευταίο βήμα είναι $z_{B+1} = h(z_B || L)$ και $z'_{B'+1} = h(z'_{B'} || L')$, άρα σύγκρουση στην h, αφού τα strings $z_B || L$ και $z'_{B'} || L'$ είναι διαφορετικά.
2. $L = L'$, οπότε $B = B'$. Έστω $z_0, \ldots, z_{B+1}$ οι τιμές που παράγονται από την $H(x)$, και $I_i = z_{i-1} || x_i$, $I_{B+2} = z_{B+1}$. Έστω N ο μεγαλύτερος δείκτης, ώστε $I_N \neq I'_N$ (υπάρχει;). Αφού ο N μέγιστος, έχουμε $I_{N+1} = I'_{N+1}$ (ειδικά $z_N = z'_N$). Αλλά τότε τα I_N, I'_N είναι σύγκρουση στην h.

□

Συναρτήσεις σύνοψης: μερικές ακόμη παρατηρήσεις

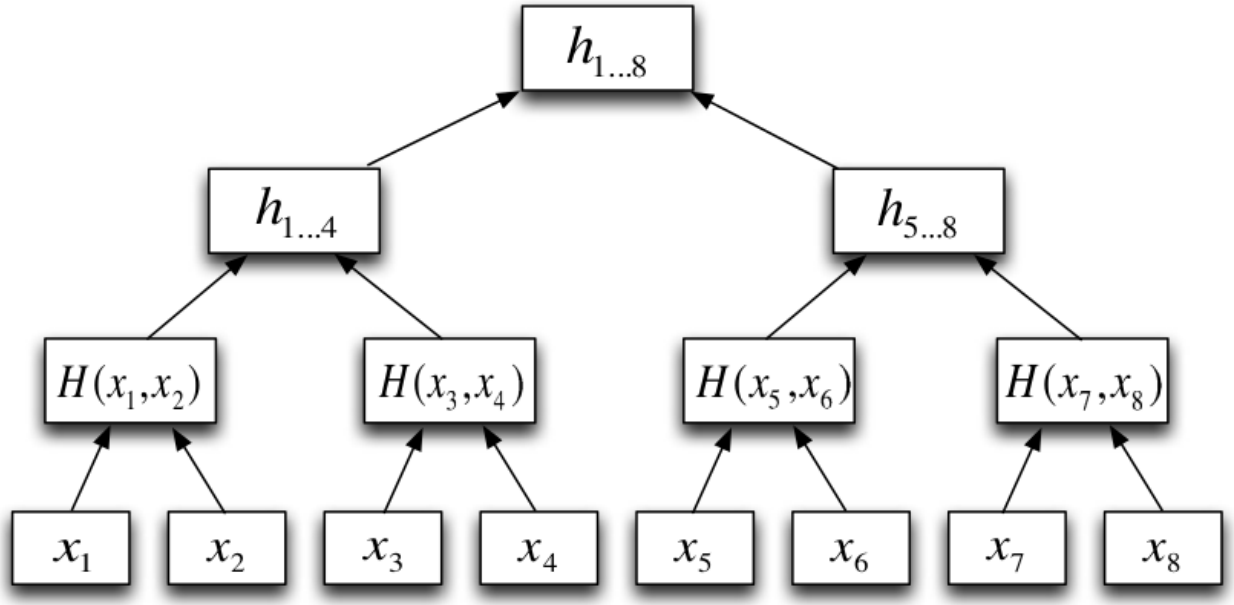
- Οι πιο διάσημες συναρτήσεις, MD5 και SHA-1 στηρίζονται σε πράξεις που θυμίζουν συμμετρική κρυπτογραφία (rotation, XOR, πρόσθεση $\mathrm{mod} 2^{32}$, δυαδικές πράξεις) και στην κατασκευή Merkle-Damgård.
- Υπέστησαν εντατικές επιθέσεις (*επίθεση γενεθλίων* κ.ά.). Η MD5 δεν θεωρείται πλέον ασφαλής, η SHA-1 αντικαταστάθηκε από την (οικογένεια) SHA-2, ενώ έχει αναπτυχθεί και η SHA-3 (Keccak).

Δένδρα Merkle

- Ένας χρήστης θέλει να ανεβάσει αρχείο x σε έναν server.
- Όταν το κατεβάσει, θέλει να ελέγξει αν είναι το ίδιο.
- Λύση: αποθηκεύει τοπικά το $h = H(x)$, και όταν καταβάζει το ζητούμενο αρχείο x' ελέγχει $H(x') \stackrel{?}{=} h$.
- Αν έχει πολλά αρχεία; Υπάρχουν διάφορες λύσεις.

Δένδρα Merkle

- Δένδρο Merkle με είσοδο $x_1, x_2, \ldots, x_t$: ένα δυαδικό δένδρο με φύλλα τα $x_1, \ldots, x_t$ και εσωτερικούς κόμβους τις τιμές σύνοψης των παιδιών του.



Σχήμα : Δένδρο Merkle

- Για δοσμένη συνάρτηση σύνοψης H, συμβολίζουμε με $\mathcal{MT}_t$ τη συνάρτηση που με είσοδο τα $x_1, \ldots, x_t$, υπολογίζει το δένδρο Merkle και τη ρίζα του δένδρου.

Δένδρα Merkle

Θεώρημα

Έστω (Gen_H, H) *συνάρτηση σύνοψης ελεύθερη συγκρούσεων. Τότε και η* $(Gen_H, \mathcal{MT}_t)$ *είναι ελεύθερη συγκρούσεων για κάθε σταθερό* t.

Δένδρα Merkle

- Ο χρήστης υπολογίζει το $h = \mathcal{MT}_t(x_1, \ldots, x_t)$, ανεβάζει τα $x_1, \ldots, x_t$ στον server και φυλάει το h (και το t)
- Όταν ο χρήστης θέλει το i-οστό αρχείο, ο server του στέλνει το x_i μαζί με μια "απόδειξη" π_i ότι είναι το σωστό αρχείο
- Η απόδειξη αποτελείται από τις τιμές που είναι γειτονικές στο μονοπάτι από το x_i προς τη ρίζα.

Παράδειγμα Έστω ότι ζητάει το x_3. Τότε ο server του στέλνει το x_3 μαζί και τα x_4, $h_{1..2}, h_{5..8}$

Δένδρα Merkle

- Αν η H είναι ελεύθερη συγκρούσεων, τότε είναι αδύνατο ο server να στείλει ψεύτικο αρχείο (και απόδειξη) που να επαληθεύεται.
- Ο χρήστης χρειάζεται σταθερό χώρο και $\mathcal{O}(\log t)$ επικοινωνία με τον server για να πάρει το αρχείο.
- Σημείωση: Συνήθως έχουμε τις hash τιμές των x_i στα φύλλα του δένδρου.

Χρήσεις συναρτήσεων σύνοψης

- Ψηφιακές υπογραφές. Σε συνδυασμό με αλγόριθμο υπογραφής, για επιτάχυνση της διαδικασίας. Παραδείγματα: MD5, που χρησιμοποιείται με RSA στο PGP, SHA-1 (τώρα SHA-2), που χρησιμοποιείται στο DSS (Digital Signature Standard), κ.ά.
- Έλεγχος γνησιότητας μηνύματος – αυθεντικοποίηση (με συμμετρικό κλειδί): keyed hash functions, π.χ. HMAC.
- Ακεραιότητα δεδομένων (με ή χωρίς κλειδί).
- Bitcoin: blockchain, proof of work, Merkle trees.
- Γεννήτριες ψευδοτυχαίων αριθμών (με random seed + counter).
- Stream ciphers, αλλά και block ciphers (SHACAL).