Κρυπτογραφία

Έλεγχος πρώτων αριθμών-Παραγοντοποίηση

Διαφάνειες: Άρης Παγουρτζής – Πέτρος Ποτίκας

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Εισαγωγή

- Παραγοντοποίηση: Δίνεται ένας σύνθετος αριθμός N, θέλουμε βρούμε θετικούς ακεραίους p, q, τ.ώ. $N = pq$
- Υπολογιστικά δύσκολο πρόβλημα θεωρίας αριθμών
- Μπορεί να λυθεί *δοκιμάζοντας διαιρέσεις* (διαιρώντας με όλους τους περιττούς από 2 έως $\sqrt{N}$)
- Εκθετικός χρόνος ως προς το μήκος του N ($\sqrt{N}$ διαιρέσεις, χρόνου $(log(N)^c$, για κάποια σταθερά c)
- Στην κρυπτογραφία οι αριθμοί είναι γινόμενο μεγάλων πρώτων αριθμών είναι δύσκολο να παραγοντοποιηθούν
- Θέλουμε να παράγουμε *αποδοτικά* δύο n-bit μεγάλους πρώτους, ώστε $N = pq$
- Primality: έλεγχος αν ένας αριθμός είναι πρώτος (εύκολο υπολογιστικά)
- Κόσκινο Ερατοσθένη (εκθετικό)

Παραγωγή τυχαίου πρώτου αριθμού

Αλγόριθμος παραγωγής τυχαίου πρώτου αριθμού μήκους n-bits

Είσοδος: μήκος n; παράμετρος t
Έξοδος : Ένας τυχαίος n-bit πρώτος

for $i = 1$ to t **do** :
  $p' \leftarrow \{0,1\}^{n-2}$
  $p := 1||p'||1$
  if p is prime return p
return fail

Εισαγωγή

- $\pi(N)$: το πλήθος των πρώτων που είναι μικρότεροι ή ίσοι με το N
- Από **θεώρημα πρώτων αριθμών**: $\pi(N) \approx N/lnN$
- Αν ένας ακέραιος p επιλεγεί τυχαία από το 1 ως το N, τότε η πιθανότητα να είναι πρώτος είναι $1/lnN$
- Π.χ. Έστω πως n είναι ακέραιος 1024-bits και $n = pq$, με p, q πρώτους, μήκους 512-bits. Η πιθανότητα ενός τυχαίου ακεραίου 512-bits να είναι πρώτος είναι 1/355 (ή 2/355, αν πάρω περιττό)
- (Θεώρημα Bertrand) Για οποιοδήποτε $n > 1$, ο λόγος των n-bits ακεραίων που είναι πρώτοι, είναι τουλάχιστον $1/3n$.
- Δοκιμάζοντας πολυωνυμικά πολλούς ακεραίους, έχουμε μεγάλη πιθανότητα να βρούμε έναν πρώτο.
- Συμπέρασμα: μπορώ να κατασκευάσω πρώτους p, q και $n = pq$ (RSA)
- Έλεγχος αν ένας αριθμός είναι πρώτος

Έλεγχος αν ένας αριθμός είναι πρώτος

- Το 1970 αναπτύχθηκαν οι πρώτοι αποδοτικοί *πιθανοτικοί* αλγόριθμοι.
- Ιδιότητα: Αν η είσοδος p είναι πρώτος, τότε η έξοδος είναι πάντα "πρώτος". Αν ο p είναι σύνθετος, τότε η έξοδος είναι "σύνθετος" με μεγάλη πιθανότητα.
- Ισοδύναμα, αν η έξοδος είναι "σύνθετος" (?) , τότε σίγουρα είναι σύνθετος, ενώ αν είναι "πρώτος" (?) , τότε πολύ πιθανά να είναι πρώτος.

Fermat (primality) test

Έλεγχος Fermat

Για να δούμε αν ένας δοσμένος ακέραιος n είναι πρώτος:

Επιλέγουμε τυχαία $a \in \mathbb{Z}_n$: αν $a^{n-1} \not\equiv 1 \pmod{n}$ τότε n σύνθετος (με βεβαιότητα), αλλιώς λέμε ότι το *n περνάει το test* (ίσως είναι πρώτος). Στην δεύτερη περίπτωση επαναλαμβάνουμε.

Πρόταση.

Αν για σύνθετο n υπάρχει ένας μάρτυρας (witness) (δηλ. $a \in \mathbb{Z}_n$, $a^{n-1} \not\equiv 1 \pmod{n}$*), τότε υπάρχουν τουλάχιστον* $n/2$ *μάρτυρες.*

Απόδειξη. Χρήση Θ. Lagrange στην ομάδα των μη μαρτύρων του $U(\mathbb{Z}_n)$.

Πόρισμα: ο έλεγχος Fermat απαντάει σωστά με πολύ μεγάλη πιθανότητα για τους περισσότερους αριθμούς. Εξαιρούνται όμως οι αριθμοί Carmichael: σύνθετοι για τους οποίους δεν υπάρχει μάρτυρας Fermat. Για να καλύψουμε και αυτούς: Miller-Rabin test.

Έλεγχος πρώτων αριθμών Miller-Rabin

1. Έστω $n \in \mathbb{Z}$ θετικός περιττός αριθμός.
2. Επιλέγουμε τυχαία $b \in [2, \ldots, n-1]$. Αν $b^{n-1} \mod n \neq 1$, τότε το n δεν περνάει τον έλεγχο (είναι σίγουρα σύνθετος).
3. Αλλιώς, γράφουμε $n - 1 = 2^s t$, με t περιττό.
4. Αν $b^t \equiv \pm 1 \pmod{n}$, τότε το n περνάει τον έλεγχο (πιθανόν πρώτος).
5. Αλλιώς, υψώνουμε το $b^t \bmod n$ στο τετράγωνο: $b^{2t} \bmod n$, έπειτα ξανά στο τετράγωνο $\bmod n$ κ.ο.κ. έως ότου πάρουμε ± 1 (το πολύ $s-1$ επαναλήψεις).
6. Αν πάρουμε πρώτα -1 τότε το n περνάει τον έλεγχο (πιθανόν πρώτος), αλλιώς δεν περνάει τον έλεγχο (σίγουρα σύνθετος).

Ορθότητα: Θα αποδείξουμε ότι η πιθανότητα αποτυχίας είναι $< \frac{1}{2}$.

Μπορεί να γίνει *αμελητέα (negligible)* με επαναλήψεις του ελέγχου για άλλο b κάθε φορά.

Έλεγχος πρώτων αριθμών Miller-Rabin: ορθότητα

Πρόταση

Αν n πρώτος, τότε περνάει τον έλεγχο πάντοτε (για όλα τα b). Αν n σύνθετος τότε περνάει τον έλεγχο για λιγότερα από τα μισά b.

Απόδειξη.

Βασίζεται στην απεικόνιση $b \mapsto \langle b^t, b^{2t}, \ldots, b^{2^i t}, \ldots b^{2^s t} \rangle \pmod{n}$.

Factoring sequence: $\langle \not\equiv \pm 1, \ldots, \not\equiv \pm 1, \equiv 1, \ldots, \equiv 1 \rangle \pmod{n}$.

Αποδεικνύεται με χρήση του Θ. Lagrange ότι τα στοιχεία που απεικονίζονται σε non-factoring sequences είναι το πολύ τα μισά.

Λεπτομέρειες: στον πίνακα. □

Other probabilistic έλεγχος πρώτων

Baillie-PSW primality test (strong Fermat+strong Lucas), see projects 2018_19*Santorinaios*

Ντετερμινιστικός έλεγχος πρώτων

Αλγόριθμος AKS (2002) είναι ντετερμινιστικός, αλλά αργός ($O(n^{5+\epsilon})$) για αυτό πρακτικά χρησιμοποιούνται οι πιθανοτικοί αλγόριθμοι

Παραγοντοποίηση Pollard rho

- Έστω p ο μικρότερος πρώτος διαιρέτης του n. Ψάχνουμε $x \neq x' \in \mathbb{Z}_n$, τ.ώ. $x \equiv x' \pmod{p}$
- Τότε από $gcd(x - x', n)$, μπορεί να προκύψει μη τετριμμένος διαιρέτης του n (p άγνωστο!).
- Επιλέγουμε τυχαίο $X \subseteq \mathbb{Z}_n$ και υπολογίζουμε για όλα τα x, x' το $gcd(x - x', n)$
- Από παράδοξο γενεθλίων, πρέπει $|X| \approx 1.17\sqrt{n}$ για να έχουμε σύγκρουση με πιθανότητα 50%.
- Για να το κάνουμε αυτό θέλουμε όλα τα $gcd(x - x', n)$ (αφού p άγνωστο, αδύνατος ο υπολογισμός των $x \bmod p$ και μετά ταξινόμηση), άρα $\binom{|X|}{2} > p/2$ δοκιμές

Παραγοντοποίηση Pollard rho

- Θεωρούμε f πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές, π.χ. $f(x) = x^2 + 1$
- Έστω $x_1 \in \mathbb{Z}_n$ και $x_1, x_2, ...,$ όπου $x_j = f(x_{j-1})$, $j \geq 2$. Η f παράγει σχεδόν τυχαία στοιχεία.
- Για να έχω $gcd(x_j - x_i, n)$, πρέπει για κάθε νέο x_j, να υπολογίζω τα $gcd(x_i - x_j, n)$, για όλα $i < j$. Τετραγωνικό!

Παραγοντοποίηση Pollard rho

- Καλύτερο: Αν $x_i \bmod p = x_j \bmod p$, τότε $x_{i+1} \bmod p = x_{j+1} \bmod p$ (λόγω της f και $p|n$)
- Επαναλαμβάνοντας, αν $x_i \equiv x_j \pmod p$, τότε $x_{i+\delta} \equiv x_{j+\delta} \pmod p$, $\delta \geq 0$
- Θεωρώντας $l = j - i$, έχουμε ότι: $x_{i'} \equiv x_{j'} \bmod p$, αν $j' > i' \geq i$ και $j' - i' \equiv 0 \bmod l$
- Γράφος G: κορυφές τα x_i, κατευθυνόμενες ακμές από το $x_i \bmod p$ στο $x_{i+1} \bmod p$.
- Πρέπει να υπάρχει ένα πρώτο ζευγάρι x_i, x_j, με $i < j$ ώστε $x_i \equiv x_j \pmod p$,
  $x_1 \bmod p \to x_2 \bmod p \cdots \to x_i \bmod p$ (ουρά)
  $x_i \bmod p \to x_{i+1} \bmod p \cdots \to x_j \bmod p \equiv x_i \bmod p$ (κύκλος)
- Από τη μορφή του γράφου, το όνομα της μεθόδου (ρ).

Παραγοντοποίηση Pollard rho

- Βελτίωση: δε χρειάζεται να βρούμε την πρώτη σύγκρουση, αλλά παίρνουμε $j = 2i$
  Birthday paradox and small space birthday paradox attacks (Lemma and Proof)
- Αν $x_i \equiv x_j \pmod p$, τότε $x_{i'} \equiv x_{2i'} \pmod p$, για όλα τα $i' \equiv 0 \pmod l, i' \geq i$
- Μεταξύ των l συνεχόμενων ακεραίων $i, \ldots, j-1$, πρέπει να υπάρχει ένας που διαιρείται από το l.
- Ο μικρότερος i' που ικανοποιεί τις παραπάνω συνθήκες είναι το πολύ $j-1$
- Επομένως, ο αριθμός επαναλήψεων είναι το πολύ j (που είναι το πολύ $\sqrt{p}$)
- Επειδή, $p < \sqrt{n}$, η αναμενόμενη πολυπλοκότητα είναι $O(n^{1/4})$ (όχι μαθηματική απόδειξη!)
- Αποτυχία αλγορίθμου (πότε?, τι πιθανότητα?, τι κάνουμε?) : όταν $x_i \equiv x_j (mod\, p)$ και $x_i \equiv x_j (mod\, n)$, με μικρή πιθανότητα (p/n)
- Παρατήρηση: Σταθερό χώρο

Παραγοντοποίηση Pollard rho

Αλγόριθμος POLLARD RHO FACTORING (n)

$i = 1$
$x_1 \leftarrow \{0, 1, \ldots, n-1\}, y = x_1, k = 2$
while true
  $i = i + 1$
  $x_i = (f(x_{i-1}) \pmod n)$
  $d = gcd(y - x_i, n)$
  if $d \neq 1$ and $d \neq n$
    print d
  if $i == k$
    $y = x_i$
    $k = 2k$

Παραγοντοποίηση Dixon

- Έστω $x \not\equiv \pm y \pmod{n}$, τ.ώ. $x^2 \equiv y^2 \pmod{n}$
- Τότε
$$n|(x+y)(x-y)$$
αλλά $n \nmid (x+y), n \nmid (x-y)$, άρα $gcd(x+y, n)$ μη τετριμμένος διαιρέτης του n
- $\mathcal{B}$ *βάση παραγοντοποίησης*: οι b μικρότεροι πρώτοι (b παράμετρος)
- *B-smooth*: Βρίσκουμε ακεραίους z, τ.ώ. όλοι οι πρώτοι παράγοντες του $z^2 \bmod n$ να ανήκουν στο $\mathcal{B}$
- Ιδέα: πάρε υποσύνολό τους, ώστε στο γινόμενο τους κάθε πρώτος παράγοντας του $\mathcal{B}$ να χρησιμοποιείται άρτιο αριθμό φορών, δηλ. $(\prod z_i)^2 = (\prod b_j)^2 \bmod n$

Παραγοντοποίηση Dixon

Παράδειγμα. Έστω $n = 15770708441, b = 6$, τότε $\mathcal{B} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$

Έστω

$$8340934156^2 = 3 \times 7 \pmod{n}$$
$$12044942944^2 = 2 \times 7 \times 13 \pmod{n}$$
$$2773700011^2 = 2 \times 3 \times 13 \pmod{n}$$

Το γινόμενό τους δίνει:

$$(8340934156 \times 12044942944 \times 2773700011)^2 \equiv (2 \times 3 \times 7 \times 13)^2 \pmod{n}$$

Ισοδύναμα: $9503435785^2 \equiv 546^2 \pmod{n}$ και
$gcd(9503435785 - 546, 15770708441) = 115759$

Παραγοντοποίηση Dixon

- Έστω $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, \cdots, p_b\}$ η βάση παραγοντοποίησης.
- Έστω $c > b$ στοιχεία $z_j^2 \equiv p_1^{a_{1j}} \times \cdots \times p_b^{a_{bj}} \pmod{n}, 1 \leq j \leq c$.
- Παίρνουμε τα $a_j = (a_{1j} \bmod 2, \ldots, a_{bj} \bmod 2)$, δηλ. διανύσματα με 0,1.
- Θέλουμε υποσύνολο διανυσμάτων, ώστε το άθροισμα τους mod 2 να είναι 0
- Δηλ. στο γινόμενο των αντίστοιχων z_j θα χρησιμοποιήσουμε κάποιους πρώτους του $\mathcal{B}$ έναν άρτιο αριθμό φορών
- Εύρεση υποσυνόλου γραμμών ενός πίνακα, ώστε το άθροισμα τους να είναι το διάνυσμα $\vec{0}$: Gauss (εύκολα)

Παραγοντοποίηση Dixon

Εύρεση των z_j:

- Τυχαίοι αριθμοί (Random Squares algorithm)
- $j + \lceil \sqrt{kn} \rceil, j = 0, 1, 2, ..., k = 1, 2, ...$
- $\lfloor \sqrt{kn} \rfloor$

Παραγοντοποίηση Dixon

- Πόσο μεγάλο πρέπει να είναι το $\mathcal{B}$; Πολύ μεγάλο, καλύτερη πιθανότητα να βρούμε παράγοντα, αλλά και περισσότερο χρόνο να βρούμε υποσύνολο με άθροισμα $\vec{0}$
- Αναμενόμενη χρονική πολυπλοκότητα $O(e^{(\sqrt{2}+o(1))\sqrt{lognloglogn}})$ (υποεκθετικός)

Παραγοντοποίηση: άλλες μέθοδοι

Πρακτικά χρησιμοποιούνται οι:

1. Quadratic sieve: μια ειδική διαδικασία "κόσκινου" για την επιλογή των z_j
2. Number field sieve (ο πιο γρήγορος, $O(e^{(1.92+o(1))(logn)^{1/3}(loglogn)^{2/3}})$)