Ελλειπτικές καμπύλες

Παναγιώτης Γροντάς

11/12/2018

ΕΜΠ - Κρυπτογραφία (2018-2019)

Περιεχόμενα

- Η ομάδα ελλειπτικών καμπυλών
- Κρυπτογραφικά πρωτόκολλα
- Pairings
- Εφαρμογές PBC

Μαθηματικό υπόβαθρο

Γενικά

- Πλούσιο σε ιστορία μαθηματικό αντικείμενο
  - Πρώτη εμφάνιση Διόφαντος 3 αιώνας πΧ (ρητές ρίζες της $y^2 = x^3 - x + 9$)
  - Μελέτη εδώ και 300 έτη
- Κρυπτογραφία: 80s (Neil Koblitz, Victor Miller)
- Βασίζεται στο πρόβλημα του Διακριτού Λογάριθμου
  - Αντικατάσταση του $\mathbb{Z}_p$ με σημεία τους
  - Μόνο γενικευμένοι αλγόριθμοι DLP $O(2^{\frac{\lambda}{2}})$ - όχι υποεκθετικοί
  - Ίδια επίπεδα ασφάλειας με μικρότερη παράμετρο - καλύτερη απόδοση

RSA	EC
1024	160
2048	224
3072	256

Γενική μορφή

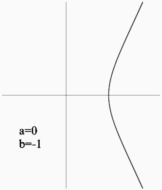
Έστω $\mathbb{F}$ ένα σώμα.

Ορισμός $\mathcal{E}(\mathbb{F})$
Μια ελλειπτική καμπύλη $\mathcal{E}$ πάνω από το $\mathbb{F}$ είναι το σύνολο των σημείων $(x, y) \in \mathbb{F}$, που ικανοποιούν την εξίσωση Weierstrass

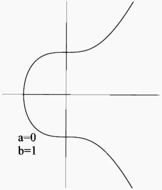
$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$$
$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \in \mathbb{F}$$

και ένα στοιχείο $\mathcal{O}$, (- *σημείο στο άπειρο*)

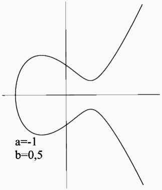
Πρακτικά
$y^2 = x^3 + ax + b, \quad a, b \in \mathbb{F}$



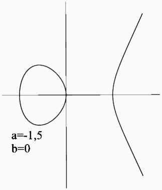
$y^2 = x^3 - 1$



$y^2 = x^3 + 1$



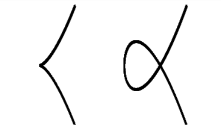
$y^2 = x^3 - x + \frac{1}{2}$



$y^2 = x^3 - \frac{3}{2}x$

Παρατηρήσεις στη μορφή ελλειπτικών καμπυλών

- Συμμετρία ως προς άξονα x
- Συμπίεση σημείου: Αποθηκεύουμε τετμημένη και 1 bit για πάνω ή κάτω από τον άξονα των x (δηλ. $(x, 0)$ ή $(x, 1)$)
- Προς αποφυγή Singular καμπύλες: Πολλαπλές ρίζες, σημεία τομής



Πρέπει $4a^3 + 27b^2 \neq 0$

Ομάδα Σημείων Ελλειπτικής καμπύλης

Τα σημεία μιας ελλειπτικής καμπύλης αποτελούν αβελιανή ομάδα ως προς την πρόσθεση

- ουδέτερο στοιχείο $\mathcal{O}$
- αντίθετο σημείου P στην $\mathcal{E}(\mathbb{R})$:
  - Αν $P = \mathcal{O}$, τότε $-P = \mathcal{O}$
  - Αν $P = (x, y)$ τότε $-P = (x, -y)$ (ανήκει στην $\mathcal{E}$ λόγω συμμετρίας)
- πρόσθεση: Για τρία σημεία P, Q, R στην ίδια ευθεία: $P + Q + R = \mathcal{O}$
- πρόσθεση: προσεταιριστική και αντιμεταθετική

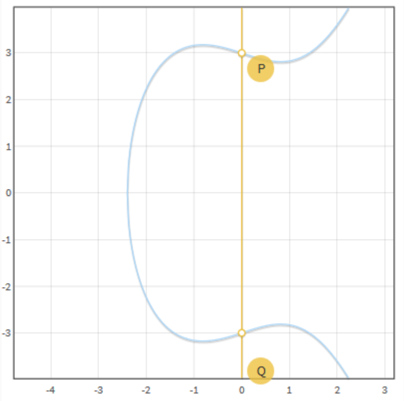
(Γεωμετρική) Ερμηνεία

Το άθροισμα $P + Q$

Αν $P = \mathcal{O}$, τότε $\mathcal{O} + Q = Q$

Αν $Q = -P$, τότε $P + Q = \mathcal{O}$.

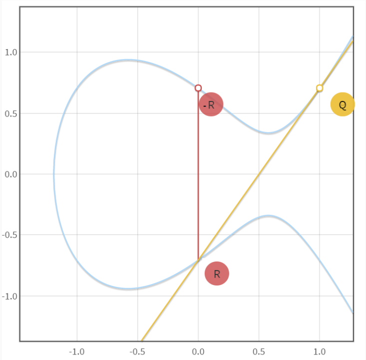
Το σημείο $\mathcal{O}$. υπάρχει σε **κάθε κατακόρυφη**



Πρόσθεση Σημείων ii

Αν $P = Q$ τότε:

- Θεωρούμε την εφαπτομένη στο P
- Βρίσκουμε το σημείο τομής R με την $\mathcal{E}$.
- Βρίσκουμε το αντίθετο

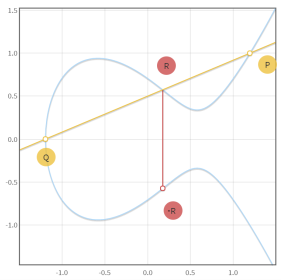


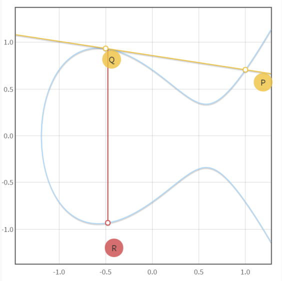
Elliptic Curve point addition

Πρόσθεση Σημείων iii

Αν $P \neq Q$ τότε:

- Θεωρούμε την $\overline{PQ}$
- Αν υπάρχει σημείο τομής R με την $\mathcal{E}$:
    - Βρίσκουμε το αντίθετο
- Αν δεν υπάρχει σημείο τομής:
    - Σε ένα εκ των P, Q η $\overline{PQ}$ θα εφάπτεται με την $\mathcal{E}$
    - Βρίσκουμε το αντίθετο



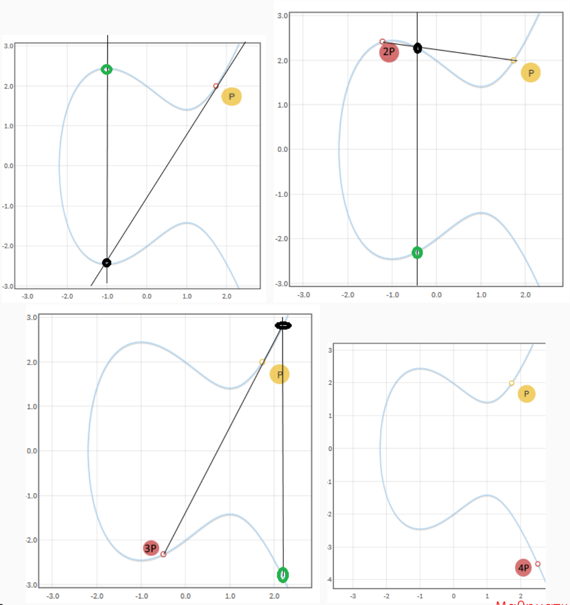


Πρόσθεση Σημείων iv

Αλγεβρική αναπαράσταση

- Συντελεστής ευθείας $\overline{PQ}$: $m = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q}$
- Εύρεση σημείου τομής (x_R, y_R) με ελλειπτική καμπύλη
- Επίλυση τριτοβάθμιας εξίσωσης

Πολλαπλασιασμός σημείου με ακέραιο $nP = P + P + \cdots + P$



Double and add

Υπολογισμός nP

Απαιτούνται $n-1$ προσθέσεις

Λύση: Square and multiply - Double and add

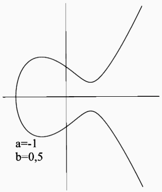
$$\begin{aligned} 17P &= P + 16P \\ 2P &= P + P \\ 4P &= 2P + 2P \\ 8P &= 4P + 4P \\ 16P &= 8P + 8P \end{aligned}$$

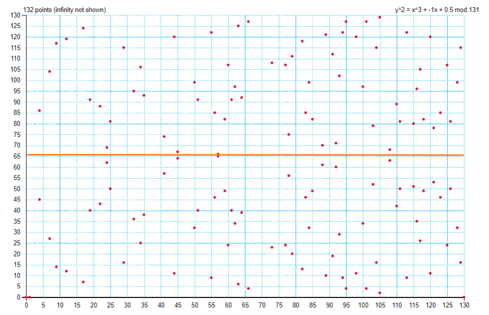
Ορισμός $\mathcal{E}(\mathbb{F}_p)$

$$\mathcal{E} = \mathcal{O} \cup \{y^2 = x^3 + ax + b \pmod{p},$$
$$(x, y) \in \mathbb{F}_p^2, (a, b) \in \mathbb{F}_p^2 : 4a^3 + 27b^2 \neq 0 \pmod{p}\}$$

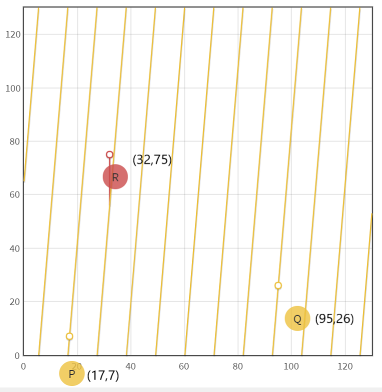
Παράδειγμα: $y^2 = x^3 - x + \frac{1}{2} \pmod{131}$

Discrete Elliptic Curve Plotter





Η ευθεία που συνδέει τα P, Q, R επαναλαμβάνεται



Εύρεση τάξης ομάδας

Εκθετικός αλγόριθμος
Δοκιμές όλων των $x \in \{0, \cdots, p-1\}$ για το ποια ικανοποιούν την εξίσωση της καμπύλης

Το πολύ $2p+1$ σημεία (συμμετρία +)

Hasse bound
$p+1-2\sqrt{p} \leq \ |\mathcal{E}(\mathbb{F}_p)| \leq p+1+2\sqrt{p}$

Υπολογισμός
Αλγόριθμος Schoof σε $O(log(p))$ με βελτιώσεις Elkiens, Atkin (SEA)

Η ομάδα των σημείων $\mathcal{E}(\mathbb{F}_p)$ ii

Κυκλικές υποομάδες
Κάθε σημείο μιας καμπύλης $\mathcal{E}(\mathbb{F}_p)$ παράγει μια κυκλική υποομάδα

Υπολογισμός τάξης υποομάδας σημείου στην $\mathcal{E}(\mathbb{F}_p)$
Θεώρημα Lagrange:Η τάξη κάθε υποομάδας διαιρεί την τάξη της ομάδας

Υπολογισμός τάξης υποομάδας με σημείο βάσης (γεννήτορα) P

- Εύρεση τάξη ομάδας με αλγόριθμο Schoof
- Εύρεση των διαιρετών της τάξης, d
- Εύρεση $min\{d : dP = \mathcal{O}\}$

Εύρεση σημείων βάσης
Θέλουμε γεννήτορες μεγάλων υποομάδων

- Επιλογή τάξης υποομάδας (μεγάλος πρώτος q): $q \mid |\mathcal{E}|$
- Υπολογισμός cofactor $h = \frac{|\mathcal{E}|}{q}$
- Επιλογή τυχαίου σημείου P
- Υπολογισμός $G = hP$
- Αν $G = \mathcal{O}$ επανάληψη

Άλλα είδη καμπυλών

Βελτιστοποίηση πρόσθεσης σημείων και πολλαπλασιασμού σημείου με ακέραιο

- Koblitz curves: $y^2 + xy = x^3 + ax^2 + 1, a \in \{0, 1\}$
- Binary curves: $y^2 + xy = x^3 + x^2 + b, b \in \mathbb{Z}$
- Edwards curves: $y^2 + x^2 = 1 + dx^2y^2, d \in \{0, 1\}$ (προστασία από side channels)

Πρόβλημα ECDLP

Δίνονται:

- Μία ελλειπτική καμπύλη $\mathcal{E}$ ορισμένη πάνω από το $\mathbb{F}_p$ $(p, a, b, \#\mathcal{E})$
- Μία μεγάλη υποομάδα της με τάξη q
- ένα σημείο βάσης G και
- ένα σημείο Y.

Ζητείται: Να βρεθεί, αν υπάρχει, ακέραιος x τέτοιος ώστε $xG = Y$.

Εικασία
Το πρόβλημα ECDLP είναι υπολογιστικά απρόσιτο

Όχι σε κάθε καμπύλη:

- MOV's attack (pairings) - υποεκθετικό DLP
- Smart's attack $(\#\mathcal{E}(\mathbb{F}_p) = p)$ - πολυωνυμικό DLP

Επιλογή Καμπύλης

Συνέπεια: Δεν προτείνεται η παραγωγή καμπυλών, αλλά η χρήση έτοιμων

Πρόβλημα: Μια καμπύλη $(p, a, b, \#\mathcal{E}, q, G)$ - είναι ασφαλής (;)

Επαληθευσιμότητα: Εγγύηση ότι δεν είναι 'πειραγμένη'

- Επιλογή τυχαίου αριθμού s
- Υπολογισμός $h = \mathcal{H}(s)$
- Παραγωγή των a, b, G από το h
- Επαληθεύσιμο, αλλιώς a, b, G από αντιστροφή της σύνοψης

Αλλά: Πρέπει το s να είναι πραγματικά τυχαίο!

Nothing up my sleeve
Το s προέρχεται από ψηφία του π, e, τριγωνομετρικών αριθμών

Πρότυπο NIST FIPS186-3

15 ελλειπτικές καμπύλες. Οι πιο γνωστές:

- **NIST P-256 ή secp256r1**
  $y^2 = x^3 - 3x + b \mod (2^{256} - 2^{224} + 2^{192} + 2^{96} - 1)$
  με $b =$41 058 363 725 152 142 129 326 129 780 047 268 409 114 441 015 993 725 554 835 256 314 039 467 401 291
- **NIST P-384**
  $y^2 = x^3 - 3x + b \mod (2^{384} - 2^{128} - 2^{96} + 2^{32} - 1)$
  με $b =$27 580 193 559 959 705 877 849 011 840 389 048 093 056 905 856 361 568 521 428 707 301 988 689 241 309 860 865 136 260 764 883 745 107 765 439 761 230 575

Φόβοι για υπονόμευση

Χρήση στην γεννήτρια τυχαιότητας Dual_EC_DRBG (NIST)

Dual_EC_DRBG
Δίνεται η καμπύλη NIST P-256, γεννήτορας P, σημείο Q, seed s

Θέσε $r = x_{sP}$

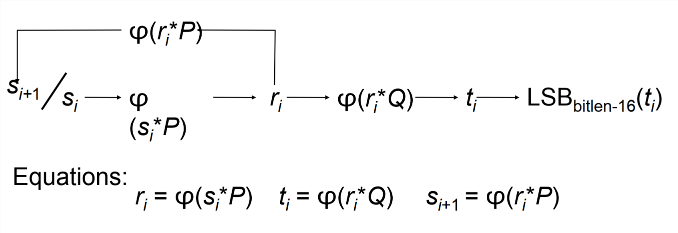
Θέσε $s' = x_{rP}$

Θέσε $t = x_{rQ}$

Επιστροφή $LSB_{-16}(t)$

Επανάληψη με $s = s'$

Πρότυπες καμπύλες iii



Προβλήματα (Shumow - Ferguson 2007)

- Δεν αιτιολογείται η χρήση του Q
- Πολλά bits ως έξοδο τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εύρεση του τελικού σημείου (2^{16} έλεγχοι στην εξίσωση της καμπύλης)

Πρότυπες καμπύλες iv

- Πρόβλεψη των επόμενων εξόδων με βάση την σχέση $Q = eP$ (e backdoor)

Εναλλακτικά:

secp256k1 (OpenSSL, Bitcoin)

$y^2 = x^3 + 0x + 7 \bmod (2^{256} - 2^{32} - 977)$

Curve25519 (OpenSSH)

$y^2 = x^3 + 486662 \cdot x^2 + x \bmod (2^{255} - 19)$

Κρυπτογραφικά πρωτόκολλα

Στόχοι

- Κατασκευή κοινού κλειδιού πάνω από δημόσιο κανάλι επικοινωνίας
- Σε EC: Το κοινό κλειδί είναι σημείο της καμπύλης
- Δημόσια επικοινωνία και συμφωνία σε σημείο P μιας ελλειπτικής καμπύλης $\mathcal{E}$

Δημόσια Διαθέσιμες Παράμετροι: $(p, a, b, \#\mathcal{E}, q, G)$

Ανταλλαγή Κλειδιού ECDH ii

Πρωτόκολλο

- Η Alice επιλέγει έναν ακέραιο $a \in \{1, \cdots, q-1\}$
- Υπολογίζει το $aG \in \mathcal{E}$ και το δημοσιοποιεί.
- Ο Bob επιλέγει έναν ακέραιο $b \in \{1, \cdots, q-1\}$ και δημοσιοποιεί το $bG \in \mathcal{E}$
- Το δημόσιο κλειδί που θα χρησιμοποιούν στη συνέχεια είναι το $P = a(bG) = b(aG) \in \mathcal{E}$

Παραλλαγή Κρυπτοσυστήματος ElGamal

Δημιουργία κλειδιών

- Δημόσια Διαθέσιμες Παράμετροι: $(p, a, b, \#\mathcal{E}, q, G)$
- Ιδιωτικό κλειδί: Ένας τυχαίος ακέραιος $x \in \{1, \cdots, q-1\}$
- Δημόσιο κλειδί: Το σημείο $Y = xG \in \mathcal{E}$

Κρυπτογράφηση

- Κωδικοποίηση μηνύματος ως σημείο P_m της $\mathcal{E}$
- Επιλέγεται ένας τυχαίος ακέραιος $k \in \{1, \cdots, q-1\}$
- Κρυπτογράφημα: $\mathbf{Enc}(Y, m) = (kG, P_m + kY)$

Αποκρυπτογράφηση

- Υπολογισμός

$$P_m + kY - x(kG) = P_m$$

Πρακτικά Θέματα

Κωδικοποίηση μηνύματος σε σημείο

- 1ος τρόπος: Hashed Elgamal
  - Χρήση συνάρτησης $\mathcal{H} : \mathcal{E} \to \mathcal{M}$
  - Κρυπτογράφηση: $\mathtt{Enc}(Y, P_m) = (kG, m \oplus \mathcal{H}(kY))$
- 2ος τρόπος
  - Επιλογή τυχαίου x_P και αντικατάσταση των bits χαμηλής τάξης του με το m
  - Επιλογή ενός από τα δύο πιθανά σημεία της καμπύλης
  - Αν δεν ανήκει τότε επανάληψη

Ψηφιακές Υπογραφές - ECDSA i

Δημιουργία κλειδιών

- Δημόσια Διαθέσιμες Παράμετροι: $(p, a, b, \#\mathcal{E}, q, G)$
- Ιδιωτικό κλειδί: Ένας τυχαίος ακέραιος $x \in \{1, \cdots, q-1\}$
- Δημόσιο κλειδί: Το σημείο $Y = xG \in \mathcal{E}$

Υπογραφή

- Υπολογισμός σύνοψης του μηνύματος $h = \mathcal{H}(M)$ και προσαρμογή της στο $[0, \cdots, q-1]$
- Επιλογή τυχαίου αριθμού k στο σύνολο $\{1, \cdots, q-1\}$
- Υπολογισμός του σημείου $P = kG = (x_P, y_P)$.
- Υπολογισμός του $r = x_P \bmod q$
- Αν $r = 0 \pmod q$ τότε επανάληψη με καινούριο k.
- Υπολογισμός του $s = k^{-1}(h + r \cdot x) \bmod q$
- Αν $s = 0$ τότε επανάληψη με καινούριο k.
- Η υπογραφή είναι το ζεύγος (r, s)

Επαλήθευση

- Υπολογισμός του $u_1 = s^{-1}h \bmod q$
- Υπολογισμός του $u_2 = s^{-1}r \bmod q$
- Υπολογισμός του σημείου $P' = u_1G + u_2Y$
- Η υπογραφή είναι έγκυρη αν $r = x_{P'} \pmod q$

Ορθότητα: Υπολογισμός ίδιου σημείου με 2 τρόπους

- Υπογραφή $P = kG$
- Επαλήθευση $P' = u_1G + u_2Y$

$$P' = u_1G + u_2Y = s^{-1}(h + rx)G = k(h + rx)^{-1}(h + rx)G = kG = P$$

Ψηφιακές Υπογραφές - ECDSA iv

Ασφάλεια: Επιλογή διαφορετικού k ανά υπογραφή

Αλλιώς: Ανάκτηση ιδιωτικού κλειδιού!

Επίθεση επανάληψης τυχαιότητας
Δίνονται δύο υπογραφές $(r_1, s_1)(r_2, s_2)$

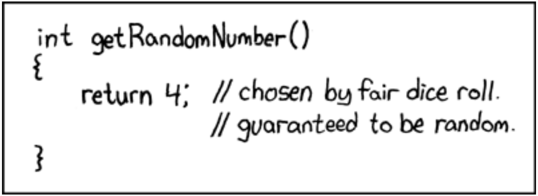
Παρατήρηση: $r_1 = r_2 = x_{kG}$

Τότε: $s_1 - s_2 = k^{-1}(h_1 - h_2) \pmod q$

Ανάκτηση $k = (h_1 - h_2)(s_1 - s_2)^{-1} \pmod q$

Ανάκτηση $x = (ks_1 - h_1)r^{-1}$

Sony PlayStation 3 hack (2011): Υπογραφή όλων των παιχνιδιών με ίδιο k



https://xkcd.com/221/

Δημιουργία κλειδιών

- Δημόσια Διαθέσιμες Παράμετροι: $(p, a, b, \#\mathcal{E}, q, G)$
- Ιδιωτικό κλειδί: Ένας τυχαίος ακέραιος $x \in \{1, \cdots, q-1\}$
- Δημόσιο κλειδί: Το σημείο $Y = xG \in \mathcal{E}$

Υπογραφή Μηνύματος m

- Επιλογή τυχαίου αριθμού k στο σύνολο $\{1, \cdots, q-1\}$
- Υπολογισμός του σημείου $P = kG$.
- Υπολογισμός του $s = k + x \cdot \mathcal{H}(P||Y||m)$
- Η υπογραφή είναι το ζεύγος (P, s) (σημείο και τιμή)

Επαλήθευση υπογραφής στο m

$$\texttt{Verify}(\mathcal{H}, m, (P, s)) = \begin{cases} 1, s \cdot G = P + \mathcal{H}(P||Y||m) \cdot Y \\ 0, \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Ορθότητα:

$$\begin{aligned} s \cdot G &= (k + x \cdot \mathcal{H}(P||Y||m)) \cdot G \\ &= kG + xG \cdot \mathcal{H}(P||Y||m) \\ &= P + Y \cdot \mathcal{H}(P||Y||m) \end{aligned}$$

Βελτίωση απόδοσης: Batch validation (ακόμα και με διαφορετικά κλειδιά)

$$\begin{aligned}\texttt{Verify}(\mathcal{H},(m_1,P_1,s_1),\cdots,(m_n,P_n,s_n)):\\(s_1+\cdots+s_n)\cdot G=\\P_1+\mathcal{H}(P_1||Y_1||m_1)\cdot Y_1+\cdots+P_n+\mathcal{H}(P_n||Y||m_n)\cdot Y_n\end{aligned}$$

Pairing Based Cryptography

Ορισμός

$\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2, \mathbb{G}_T$ πεπερασμένες κυκλικές ομάδες

Ζεύξη (pairing-bilinear map): Μία *αποδοτικά* υπολογίσιμη συνάρτηση

$$e : \mathbb{G}_1 \times \mathbb{G}_2 \to \mathbb{G}_T$$

1) Διγραμμική (bilinear):

$$e(g_1 \cdot g_2, h_1) = e(g_1, h_1) \cdot e(g_2, h_1) \text{και}$$

$$e(g_1, h_1 \cdot h_2) = e(g_1, h_1) \cdot e(g_1, h_2)$$

ή ισοδύναμα $e(g^a, h^b) = e(g, h)^{ab} \quad \forall g \in \mathbb{G}_1, h \in \mathbb{G}_2 \; a, b \in \mathbb{Z}$

2) Μη εκφυλισμένη (non-degenerate):
Αν $\mathbb{G} = \langle g \rangle$ τότε $\mathbb{G}_T = \langle e(g, g) \rangle$

Ορισμός (2)

Μπορεί και $\mathbb{G}_1 = \mathbb{G}_2 = \mathbb{G}$

Συνήθως: $\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2, \mathbb{G} \subseteq \mathcal{E}(\mathbb{F}_p), \mathbb{G}_T \subseteq \mathbb{F}^*_{p^a}$

Συνέπεια ορισμού: Συμμετρία $e(g^a, g^b) = e(g, g)^{ab} = e(g^b, g^a)$

Pairings: ένα απλό παράδειγμα

$e(x, y) = 2^{xy}$ Τότε:

$e(a, b + c) = 2^{a(b+c)}$ και: $e(a, b) \cdot e(a, c) = 2^{ab} \cdot 2^{ac} = 2^{a(b+c)}$

Διαίσθηση: πολλαπλασιασμός σε κρυπτογραφημένες τιμές

Ζεύξεις στην κρυπτογραφία

- Στο $\mathbb{G}$ κάποια προβλήματα είναι δύσκολα, αλλά στο $\mathbb{G}_T$ μπορεί να είναι εύκολα
- Λόγω της απεικόνισης e μπορούμε να μεταβούμε αποδοτικά από την δύσκολη εκδοχή στην εύκολη
- Χρήσιμη ασυμμετρία για την κατασκευή κρυπτογραφικών πρωτοκόλλων
- Πχ: Υπογραφές:
    - Κατασκευή υπογραφής στο $\mathbb{G}$
    - Επαλήθευση στο $\mathbb{G}_T$ μέσω του pairing
- Αρνητικές συνέπειες: Κάποια προβλήματα γίνονται ευκολότερα αν όχι εύκολα

Το DDHP είναι εύκολο...

...αν υπάρχει pairing

Θέλουμε να ελέγξουμε αν $g^c = g^{ab}$, με δεδομένα τα g^a, g^b, g^c.

Αποδοτικός υπολογισμός μέσω ζεύξης: $e(g^a, g^b) = e(g,g)^{ab}$

Σύγκριση με το $e(g, g^c) = e(g,g)^c$

Όχι όμως και το DLP...

...παρά την ύπαρξη pairing

Αντί για εύρεση x από g, g^x στην $\mathbb{G}$ (ελλειπτική καμπύλη)

εύρεση x από $e(g,g), e(g,g^x)$ στην $\mathbb{G}_T$ (πεπερασμένο σώμα)

Το DLP έγινε ευκολότερο (υποεκθετικοί αλγόριθμοι), όχι όμως εύκολο (MOV - attack)

Επιλογή μεγαλύτερης τιμής για παράμετρο ασφάλειας

Διγραμμικό Πρόβλημα Απόφασης Diffie-Hellman

Διαχωρίζονται στοιχεία του $\mathbb{G}_T$

BDDHP

Δίνονται: δύο στοιχεία $h, g \in \mathbb{G}$ και τα στοιχεία $g^{\alpha}, g^{\beta}, e(h, g)^{c}$.

Ζητείται: Ισχύει $c = \alpha\beta$;

Είδη pairings

- Συμμετρικά
- $e : \mathbb{G} \times \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}_T$ (Weil pairing)
- Ασύμμετρα $e : \mathbb{G}_1 \times \mathbb{G}_2 \rightarrow \mathbb{G}_T$
    - Με εύκολο DDHP στο $\mathbb{G}_1$
    - Χωρίς εύκολο DDHP στο $\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2$
    - Tate pairing

Διαφορετικές υποθέσεις ασφάλειας

Εφαρμογές PBC

Τριμερής ανταλλαγή κλειδιού

Έστω κυκλική ομάδα με $\mathbb{G} = \langle g \rangle$

Τρεις οντότητες A, B, C με ζευγάρια ιδιωτικών - δημοσίων κλειδιών $(x_A, y_A = g^{x_A}), (x_B, y_B = g^{x_B}), (x_C, y_C = g^{x_C})$.

Μπορεί να συμφωνηθεί ένα κοινό κλειδί μεταξύ τους;

Χωρίς pairings - σε 3 γύρους

1. Ο A στέλνει το y_A στον B, ο B στέλνει το y_B στον C, ο C στέλνει το y_C στον A (κυκλικά).
2. Ο A υπολογίζει το $t_A = y_C^{x_A} = g^{x_C x_A}$, ο B υπολογίζει το $t_B = y_A^{x_B} = g^{x_B x_A}$ και ο C υπολογίζει το $t_C = y_B^{x_C} = g^{x_B x_C}$
3. Ο A στέλνει το t_A στον B, ο B στέλνει το t_B στον C, ο C στέλνει το t_C στον A (πάλι κυκλικά).
4. Όλοι υπολογίζουν το κοινό κλειδί ως εξής:
    - Ο A με $t_C^{x_A} = g^{x_B x_C x_A}$
    - Ο B με $t_A^{x_B} = g^{x_C x_A x_B}$
    - Ο C με $t_B^{x_C} = g^{x_A x_B x_C}$

Με pairings - σε 1 γύρο (Joux-2000)

Υποθέτουμε δύο ομάδες $\mathbb{G}$, $\mathbb{G}$ με τάξη ένα πρώτο q και μία συμμετρική διγραμμική ζεύξη $e : \mathbb{G} \times \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}_T$.

- Όλοι οι συμμετέχοντες εκπέμπουν τα δημόσια κλειδιά τους $y_A = g^{x_A}, y_B = g^{x_B}, y_C = g^{x_C}$.
- Με την βοήθεια της ζεύξης το κοινό κλειδί μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:
    - $e(g^{x_B}, g^{x_C})^{x_A} = e(g, g)^{x_B x_C x_A}$
    - $e(g^{x_A}, g^{x_C})^{x_B} = e(g, g)^{x_A x_C x_B}$
    - $e(g^{x_A}, g^{x_B})^{x_C} = e(g, g)^{x_A x_B x_C}$

Υπογραφές BLS

- Boneh, Lynn και Shacham 2004
- Υπογραφές με βάση το DLP αλλά με μικρό μέγεθος
- Αντί για 2 στοιχεία, 1 στοιχείο με μέγεθος όσο η τάξη της ομάδας

Υπογραφές BLS - Ορισμός

- *Δημιουργία κλειδιών*: $KeyGen(1^\lambda) = (\mathbb{G}, \mathbb{G}_T, e, x, y)$
    - Ομάδες $(\mathbb{G} = \langle g \rangle, \mathbb{G}_T)$ τάξης q με δύσκολο CDH
    - $e : \mathbb{G} \times \mathbb{G} \to \mathbb{G}_T$
    - Συνάρτηση σύνοψης: $\mathcal{H} : \{0, 1\}^* \to \mathbb{G}$
    - Κλειδί υπογραφής: $x \in_R \mathbb{Z}_q$
    - Κλειδί επαλήθευσης: $y = g^x$
- *Υπογραφή*:
    - Υπολογισμός $h = \mathcal{H}(m)$
    - Υπολογισμός $s = h^x$
    - Επιστροφή $s \in \mathbb{G}$
- *Επαλήθευση*:
    - Υπολογισμός $h = \mathcal{H}(m)$
    - Έλεγχος $e(g, s) == e(y, h)$

Υπογραφές BLS - Ιδιότητες

Ορθότητα:
$e(g, s) = e(g, h^x) = e(g, \mathcal{H}(m))^x$ και

$e(y, h) = e(g^x, \mathcal{H}(m)) = e(g, \mathcal{H}(m))^x$

Ασφάλεια:
Ανάγεται στο CDH στην $\mathbb{G}$

Aggregation:
Χρήστες: $\{(x_i, y_i = g^{x_i})\}_{i=1}^{n}$, υπογραφές: $\{s_i\}_{i=1}^{n}$

Δημιουργία κοινής υπογραφής: $S = \prod_{i=1}^{n} s_i$

Επαλήθευση: $\prod_{i=1}^{n} e(y_i, \mathcal{H}(m_i)) == e(g, S)$

Identity based cryptography

- Signatures:Shamir 1984
- Encryption:Boneh-Franklin (2001)
- Οποιοδήποτε όνομα κάποιου χρήστη πχ. email είναι η ταυτότητα
- Δεν χρειάζεται διανομή κλειδιού
- Χρειάζεται κεντρική TTP
- Παράγει τα ιδιωτικά κλειδιά από την ταυτότητα

Identity based signatures

- TTP έχει κλειδί RSA $((e, n), d)$
- Δημιουργία ιδιωτικού κλειδιού από ταυτότητα χρήστη id
    - Υπογραφή σύνοψης της ταυτότητας
    - $k = \mathcal{H}(id)^d \mod n$
    - Ασφαλής Διανομή στον κάτοχο
- Υπογραφή από χρήστη id
    - Επιλογή τυχαίου r
    - $t = r^e \mod n$
    - $s = k\, r^{\mathcal{H}(m|t)} \mod n$
    - Η υπογραφή είναι (t, s)
- Επαλήθευση υπογραφής με την ταυτότητα:
- Έλεγχος αν: $\mathcal{H}(id)t^{\mathcal{H}(m|t)} = s^e$
- Ορθότητα: $\mathcal{H}(id)t^{\mathcal{H}(m|t)} = k^e r^{e\mathcal{H}(m|t)} = s^e$

Boneh - Franklin IBE - Δημιουργία κλειδιών

- *Δημιουργία κλειδιών*: $KeyGen(1^\lambda) = \mathbb{G}, \mathbb{G}_T, e, x, y$
  - Ομάδες ($\mathbb{G} = \langle g \rangle, \mathbb{G}_T$) τάξης q με δύσκολο CDH
  - $e : \mathbb{G} \times \mathbb{G} \to \mathbb{G}_T$
  - Συναρτήσεις σύνοψης:
    - $\mathcal{H}_{\mathbb{G}} : \{0,1\}^* \to \mathbb{G}$,
    - $\mathcal{H}_{\mathbb{G}_T} : \mathbb{G} \to \{0,1\}^*$
  - Ιδιωτικό κλειδί: $x \in_R \mathbb{Z}_q$ (TTP)
  - Δημόσιο κλειδί: $y = g^x$
- Δημιουργία ζεύγους κλειδιών για τον χρήστη ID:
  - Υπολογισμός $h = \mathcal{H}_{\mathbb{G}}(ID)$
  - Δημόσιο κλειδί: $y_{ID} = h$
  - Ιδιωτικό κλειδί: $x_{ID} = y_{ID}^x$

Boneh - Franklin IBE - Λειτουργία

- *Κρυπτογράφηση* στον χρήστη ID:
  - Επιλογή $r \in \mathbb{Z}_q$
  - Υπολογισμός $t = e(y_{ID}, y)^r$
  - Επιστροφή: $(g^r, m \oplus \mathcal{H}_{\mathbb{G}_T}(t))$
- *Αποκρυπτογράφηση*:
  - Έστω κρυπτοκείμενο (a, b)
  - Αποκρυπτογράφηση ως $b \oplus \mathcal{H}_{\mathbb{G}_T}(e(x_{ID}, a))$

Boneh - Franklin IBE - Ορθότητα

$$
\begin{aligned}
e(y_{ID}, y)^r = e(h, g^x)^r = e(h, g)^{xr} \\
e(x_{ID}, a) = e(y_{ID}^x, g^r) = e(h, g)^{xr} \\
b \oplus \mathcal{H}_{\mathbb{G}_T}(e(x_{ID}, a)) = \\
m \oplus \mathcal{H}_{\mathbb{G}_T}(e(y_{ID}, y)^r) \oplus \mathcal{H}_{\mathbb{G}_T}(e(x_{ID}, a)) = \\
m \oplus e(h, g)^{xr} \oplus e(h, g)^{xr} = \\
m
\end{aligned}
$$

Η ασφάλεια του κρυπτοσυστήματος βασίζεται στο BDDH.

Functional Encryption

Στην παραδοσιακή κρυπτογραφία δημοσίου κλειδιού η αποκρυπτογράφηση είναι όλα ή τίποτα:

Functional Encryption: Γενίκευση IBE

Γενικό σχήμα

- TTP έχει ένα master secret key sk
- Για συνάρτηση f παραγωγή sk_f
- Αποκρυπτογράφηση: $c = \mathsf{Enc}(pk, m)$ και sk_f
- Λήψη $f(m)$
- Ασφάλεια: καμία άλλη γνώση για το m

Functional Encryption: Εφαρμογές

- Spam filters on encrypted mail με βάση τα κριτήρια του χρήστη (sk_f παράγεται από χρήστη)
- Επεξεργασία σε ιατρικά δεδομένα: Απόκρυψη πληροφοριών που ταυτοποιούν τα υποκείμενα
- Εύκολο access control
    - Attribute Based Encryption
    - Predicate Based Encryption

Μπορούν να γίνουν και με την παραδοσιακή κρυπτογραφία αλλά με πρόβληματα διαχείρισης πολλών κλειδιών

zkSNARKS

Συνδυασμός ZK και Pairings (κά) για αποδοτική επαλήθευση υπολογισμών
Εφαρμογές:

- Cloud computing
- Anonymous bitcoin (ZCash)

Μοντέλο

- O client έχει είσοδο u (π.χ query)
- O server έχει ιδιωτική είσοδο w (π.χ. ΒΔ)
- O client θέλει να μάθει $z = f(u, w)$ για δημόσια γνωστή f
- Client: ενδιαφέρεται για ορθότητα (integrity)
- Server: ενδιαφέρεται για διατήρησης μυστικότητας w

Χαρακτηριστικά zkSNARKS

- **Z**ero **K**nowledge: Ο client (verifier $\mathcal{V}$) μαθαίνει το αποτέλεσμα και αν ο υπολογισμός έγινε σωστά (χωρις να μάθει βοηθητικά inputs του server)
- **S**uccinct: Μικρή απόδειξη σε σχέση με τον υπολογισμό
  - σταθερή απόδειξη εξαρτάται μόνο από το μέγεθος της παράμετρου ασφάλειας $O_\lambda(1)$ δηλ. 288 bytes
  - χρόνος επαλήθευσης $O_\lambda(|f| + |u| + |z|)$ ανεξάρτητος από χρόνο εκτέλεσης f - 10msec
- **N**on **I**nteractive:Οι αποδείξεις δημιουργούνται από τον server μόνο και είναι δημόσια επαληθεύσιμες
- **A**rguments
- of **K**nowledge

Γενικό σχήμα:

1. Μετατροπή ελέγχου εγκυρότητας υπολογισμού σε έλεγχο ισότητας πολυωνύμων: (Code $\rightarrow$ R1CS $\rightarrow$ QSP $\rightarrow$ Pairings)
   $\text{εγκυρότητα} \leftrightarrow p(x)q(x) = s(x)r(x)$
2. O client επιλέγει μυστικό σημείο αποτίμησης:
   $p(x_0)q(x_0) = s(x_0)r(x_0)$
3. Ομομορφική αποτίμηση:
   $\mathbf{Enc}(p(x_0))\mathbf{Enc}(q(x_0)) = \mathbf{Enc}(s(x_0))\mathbf{Enc}(r(x_0))$
4. Τυχαιότητα για ZK:
   $\mathbf{Enc}(k + p(x_0))\mathbf{Enc}(k + q(x_0)) = \mathbf{Enc}(k + s(x_0))\mathbf{Enc}(k_r(x_0))$

Task
Έστω $\mathsf{Enc}(x) = g^x$ όπου g γεννήτορας και $p(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$
Μία οντότητα $\mathcal{V}$ με γνώση του x_0 και μία οντότητα $\mathcal{P}$ με γνώση του p μπορούν να υπολογίσουν το $\mathsf{Enc}(p(x_0))$

- Ο $\mathcal{V}$ δημοσιοποιεί:

$$\mathsf{Enc}(x_0^0), \mathsf{Enc}(x_0^1), \cdots, \mathsf{Enc}(x_0^d)$$

- Ο $\mathcal{P}$ υπολογίζει:

$$\prod_{i=0}^{d} \mathsf{Enc}(x_0^i)^{a_i} = \mathsf{Enc}(\sum_{i=0}^{d} a_i x_0^i) = \mathsf{Enc}(p(x_0))$$

Pairings: Έλεγχος σωστής αποτίμησης πολυωνύμων i

- Ο $\mathcal{V}$ (γνωρίζει x_0):
  - υπολογίζει και δημοσιοποιεί:

$$\mathsf{Enc}(x_0^0), \mathsf{Enc}(x_0^1), \cdots, \mathsf{Enc}(x_0^d)$$

  - επιλέγει παράγοντα b
  - υπολογίζει και δημοσιοποιεί:

$$\mathsf{Enc}(bx_0^0), \mathsf{Enc}(bx_0^1), \cdots, \mathsf{Enc}(bx_0^d)$$

- Ο $\mathcal{P}$ που γνωρίζει το $p(x)$:
  - υπολογίζει και δημοσιοποιεί: $\mathsf{Enc}(p(x_0)), \mathsf{Enc}(bp(x_0))$
- Τα μυστικά b, x_0 καταστρέφονται

Pairings: Έλεγχος σωστής αποτίμησης πολυωνύμων ii

Ο έλεγχος γίνεται ως εξής:

- Η συνάρτηση pairing e υπολογίζει:
  - $e(\mathsf{Enc}(p(x_0)), \mathsf{Enc}(b)) = e(g, g)^{bp(x_0)}$
  - $e(\mathsf{Enc}(bp(x_0)), \mathsf{Enc}(1)) = e(g, g)^{bp(x_0)}$

Παρατήρηση

- Ομομορφική πρόσθεση
- Πολλαπλασιασμός από το pairing
- Έλεγχοι για soundness και blinding ZK

Βιβλιογραφία

1. Παγουρτζής, Α., Ζάχος, Ε., ΓΠ, 2015. Υπολογιστική κρυπτογραφία. [ηλεκτρ. βιβλ.] Αθήνα:Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών
2. Jonathan Katz and Yehuda Lindell. Introduction to Modern Cryptography 2nd edition, Chapman and Hall/CRC, 2015
3. Neal Koblitz and Alfred J. Menezes, A riddle wrapped in an enigma
4. Jeremy Kun Introducing Elliptic Curves
5. Andrea Corbellini Elliptic Curve Cryptography: a gentle introduction
6. Dan Shumow and Niels Ferguson On the Possibility of a Back Door in the NIST SP800-90 Dual Ec Prng, Crypto 2007 Rump Session
7. Antoine Joux. A one round protocol for tripartite diffie-hellman. In Algorithmic Number Theory,4th International Symposium,ANTS-IV,Leiden, The Netherlands, July 2-7, 2000, Proceedings, pages 385–394, 2000.
8. Dan Boneh, Ben Lynn, and Hovav Shacham. Short signatures from the Weil pairing. Journal of Cryptology, 17(4):297–319, 2004. ISSN 0933-2790.
9. Dan Boneh and Matthew K. Franklin. Identity-based encryption from the weil pairing. In Proceedings of the 21st Annual International Cryptology Conference on Advances in Cryptology, CRYPTO '01, pages 213–229, London, UK, UK, 2001. Springer-Verlag. ISBN 3-540-42456-3.
10. Boneh, Dan, Amit Sahai, and Brent Waters. Functional encryption: a new vision for public-key cryptography., Communications of the ACM 55, no. 11 (2012): 56-64.
11. Vitalik Buterin zkSNARKs: under the hood
12. Alfred Menezes An introduction to pairing based crypto
13. An introduction to pairing based crypto
14. 3rd BIU Winter School on Cryptography 2013