

# Αλγοριθμική Θεωρία Παιγνίων: Εισαγωγή και Βασικές Έννοιες

---

**Δημήτρης Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών  
και Μηχανικών Υπολογιστών

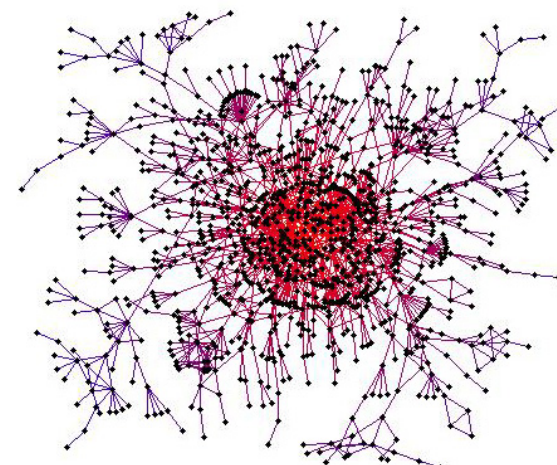
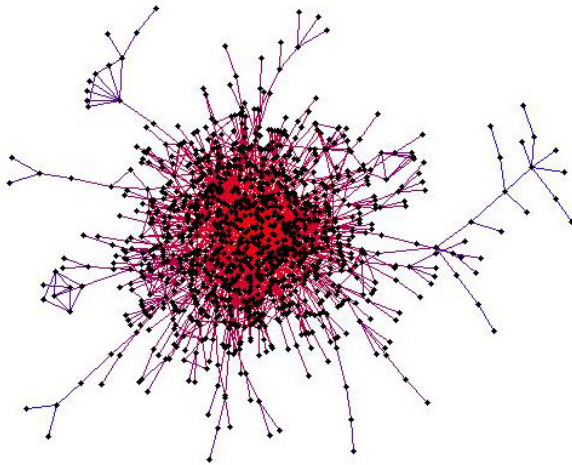
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



# Πολύπλοκα Συστήματα

---

- ... αποτελούνται από πολλές (ετερογενείς) συνιστώσες που **αλληλεπιδρούν**.
- Συμπεριφορά συστήματος δεν συνάγεται από χαρακτηριστικά συνιστωσών.
- Συμπεριφορά εξαρτάται **κυρίως** από **αλληλεπίδραση συνιστωσών** και είναι δύσκολο να προβλεφθεί.



# Παραδείγματα

---

- **Φυσική** (phase transitions, symmetry breaking, self organization, ...).
- **Βιολογία** και Εξελικτική Βιολογία (εξέλιξη ειδών).
- **Οικονομικά**
  - Παγκόσμια Οικονομία: ανεξάρτητες οντότητες **αλληλεπιδρούν** με στόχο μεγιστοποίηση κέρδους.
- **Κοινωνιολογία**
  - Τι μικρός που είναι ο κόσμος!

# Αναγκαιότητα για EECS

---

- Μεγάλα, πολύπλοκα, και δυναμικά μεταβαλλόμενα συστήματα αποτελούν τμήμα τεχνολογικής υποδομής.
- Δυσχερής η ιδέα μιας κεντρικής διαχειριστικής αρχής που εξασφαλίζει βέλτιστη λειτουργία.
  - Συνιστώσες ενεργούν αυτόνομα και ιδιοτελώς με κριτήριο τη βελτιστοποίηση ατομικών αντικειμενικών στόχων.
- Κλασσικά παραδείγματα:
  - Κυκλοφορία στις μεγάλες πόλεις.
  - Δρομολόγηση κυκλοφορίας στο Internet.

# Μονόδρομος 'Υποπτου

---



- Συλλαμβάνεται ύποπτος για μεγάλη ληστεία.  
Δεν υπάρχουν επαρκή στοιχεία!
  - Ομολογεί: 5 χρόνια φυλακή.
  - Δεν ομολογεί: 1 χρόνο φυλακή.
- Ο ύποπτος **δεν ομολογεί.**

# Δίλημμα Υπόπτων



- Συλλαμβάνονται **δύο** συνεργάτες για μεγάλη ληστεία.
  - Κρατούνται σε **χωριστά** κελιά χωρίς επικοινωνία.

	Ομολογεί B	Δεν ομολογεί B
Ομολογεί A	<b>5, 5</b>	<b>0, 15</b>
Δεν ομολογεί A	<b>15, 0</b>	<b>1, 1</b>

- Αμφότεροι οι ύποπτοι **ομολογούν!**

# Θεωρία Παιγνίων

---

- Προβλέπει συμπεριφορά **αυτόνομων** οντοτήτων που δρουν ιδιοτελώς με σκοπό βελτιστοποίηση **ατομικών στόχων**.
  - Εφαρμογή: όταν υπάρχουν **αντικρουόμενα συμφέροντα**.
  - **Υπόθεση**: ορθολογική και στρατηγική συμπεριφορά.
  - Πρόβλεψη: **σημεία ισορροπίας** (γεν. solution concepts).
- **Εργαλείο** για μελέτη «πολύπλοκων» συστημάτων.
  - Σημεία ισορροπίας και ιδιότητες τους.
  - Ορθολογική συμπεριφορά οδηγεί σε σημείο ισορροπίας.
- Περιοχή **εφαρμογής**:
  - Αποδοτικός (κατανεμημένος;) υπολογισμός σημείου ισορροπίας.
  - Αποδοτικότητα (σε σχέση με βέλτιστη διαμόρφωση).
- **Σχεδιασμός Μηχανισμών**:
  - Κανόνες ώστε να επιτύχουμε επιθυμητή συμπεριφορά / απόδοση.

# Ανταγωνιστικό Παίγνιο

---

- Σύνολο παικτών που ανταγωνίζονται (π.χ. για πόρους).
- Κάθε παίκτης αποφασίζει **μόνο τη δική του** στρατηγική.
  - Μοναδικός στόχος: **μεγιστοποίηση ατομικού κέρδους**.
  - Ατομικό όφελος / κόστος εξαρτάται από στρατηγικές **όλων**.
- **Ισορροπία Nash:** Κανένας **δεν μπορεί να βελτιώσει** ατομικό κέρδος αλλάζοντας μόνο τη δική του στρατηγική.
  - Nash (1952) απέδειξε ότι **πάντα** υπάρχει τέτοια ισορροπία (αλλά μπορεί να είναι πεπλεγμένη – mixed).
  - Ισορροπία Nash αποτελεί **«λύση» του συστήματος:**
    - Αν οι παίκτες συμπεριφερθούν **στρατηγικά και ορθολογικά** και έχουν στη διάθεσή τους **πλήρη γνώση και επαρκή χρόνο**, τότε καταλήγουν σε μία ισορροπία Nash.



# Ισορροπία Nash



	Ομολογεί B	Δεν ομολογεί B
Ομολογεί A	<b>5, 5</b>	<b>0, 15</b>
Δεν ομολογεί A	<b>15, 0</b>	<b>1, 1</b>

- Ισορροπία Nash **δεν βελτιστοποιεί** συνολικό αποτέλεσμα. Συμβιβασμός με δεδομένη την έλλειψη συντονισμού.

# Μάχη των Φύλλων

	Σινεμά	ΟΚ, μπάσκετ
ΟΚ, σινεμά	1, 5	0, 0
Μπάσκετ	0, 0	5, 1

- Μοντέλο για συντονισμό με αντικρουόμενες προτιμήσεις.
- Ισορροπία Nash: καθένας επιλέγει **best response** στη στρατηγική του αντιπάλου.
  - Αμιγής (ντετερμινιστική επιλογή στρατηγικών):  $(\Sigma, \Sigma), (M, M)$
  - Πεπλεγμένη (mixed):  $((1/6, 5/6), (5/6, 1/6))$
  - Αποδεικνύεται ότι #ισορροπιών Nash είναι περιττός.
- Σινεμά στο Rocky:  $((2, -1), (0, 0))$ . Τι συμβαίνει;

# Πέτρα – Ψαλίδι – Χαρτί

---

	Πέτρα	Ψαλίδι	Χαρτί
Πέτρα	<b>0, 0</b>	<b>1, -1</b>	<b>-1, 1</b>
Ψαλίδι	<b>-1, 1</b>	<b>0, 0</b>	<b>1, -1</b>
Χαρτί	<b>1, -1</b>	<b>-1, 1</b>	<b>0, 0</b>

- Μοναδική ισορροπία:  $((1/3, 1/3, 1/3), (1/3, 1/3, 1/3))$ .
- Παίγνιο μηδενικού αθροίσματος με 2 παίκτες.
  - von Neumann (1928): **υπάρχει πάντα** πεπλεγμένη ισορροπία.
  - Εύκολη απόδειξη μέσω LP duality.
- Nash (1952) **γενίκευσε** για παίγνια με μη-μηδενικό άθροισμα και πεπερασμένο πλήθος παικτών.

# Ενδιαφέροντα Παραδείγματα

---

- Το Δίλημμα του (Απελπισμένου) Ταξιδιώτη
  - 2 παίκτες, καθένας δηλώνει έναν αριθμό μεταξύ 2 και 100 (αξία χαμένης βαλίτσας).
  - Αν δηλώσουν το ίδιο  $x$ , εισπράττουν  $x$  ευρώ ο καθένας.
  - Διαφορετικά, έστω  $x < y$  οι δύο δηλώσεις. Αυτός που δήλωσε  $y$ , εισπράττει  $x$ , ο άλλος εισπράττει  $x+2$ .
- Μαντεύουμε τα  $2/3$  του μέσου όρου.
  - $n$  παίκτες, καθένας δηλώνει έναν αριθμό μεταξύ 0 και 100.
  - Κερδίζει 1000 ευρώ (μόνον) αυτός με αριθμό πλησιέστερα στο  $2(x_1 + \dots + x_n)/(3n)$ .

# Ισορροπία στην Πράξη

---

- Χρηματιστήριο:
  - Τιμές αγαθών και μετοχών (market equilibrium)
- Internet, δρόμοι:
  - Δρομολόγηση πακέτων, αυτοκινήτων.
- Κοινωνικά δίκτυα, WWW:
  - Δομή του δικτύου.
- Πως οι συμμετέχοντες υπολογίζουν ισορροπίες;
  - Απόδειξη Nash χρησιμοποιεί **Θ. Σταθερού Σημείου Brouwer**: μη αλγοριθμική.
  - Μπορεί να υπάρχει αποδοτικός αλγόριθμος;
  - Αν όχι, πως / γιατί / κατά πόσο συστήματα **λειτουργούν σε συνθήκες ισορροπίας;**

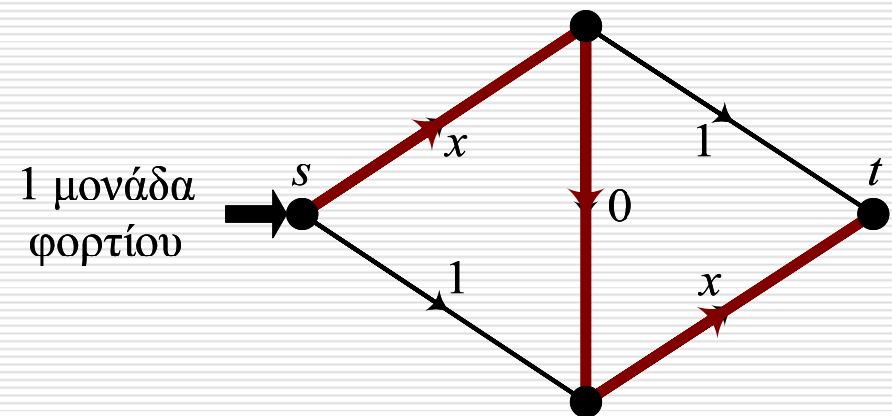
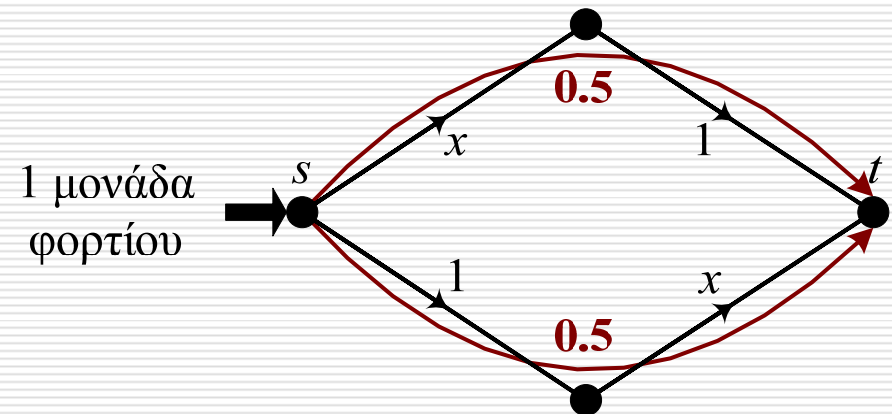
# Υπολογισμός Ισορροπιών

---

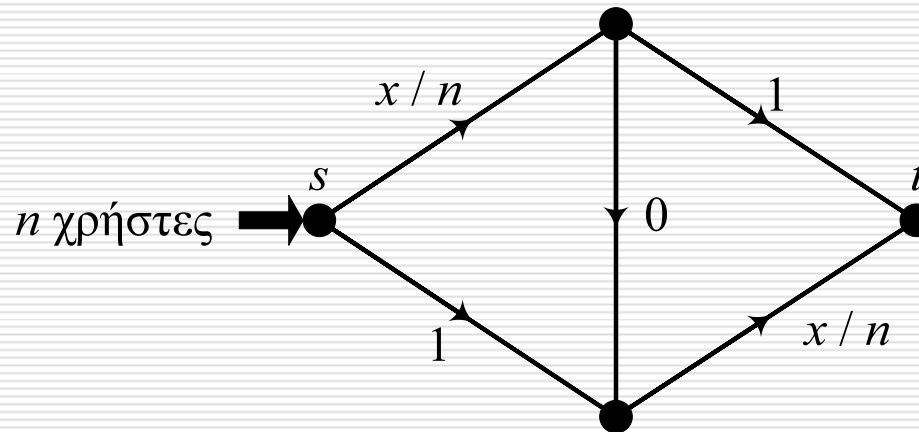
- Παίγνια με 2 παίκτες και **μηδενικό άθροισμα**:
  - **Αποδοτικός υπολογισμός** ισορροπίας Nash μέσω **LP duality**.
- Παίγνια με 2 παίκτες γενικής μορφής:
  - **Δεν** είναι γνωστός **αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου**, παρά το σημαντικό ενδιαφέρον και μεγάλη προσπάθεια.
  - **Lemke-Howson** (simplex-like) αλγ. **δεν** είναι αποδοτικός.
  - Ισορροπία Nash **δεν** είναι **NP-complete** (εξ' ορισμού)!
  - Είναι όμως **PPAD-complete**, δηλ. τόσο **δύσκολη** όσο ο υπολογισμός του **σταθερού σημείου** του Brouwer (ή οποιουδήποτε αντίστοιχου προβλήματος).

# Τμήμα Αναρχίας – Παράδοξο Braess

- Συνολική καθυστέρηση **1.5**
  - Nash ισορροπία αποτελεί βέλτιστη λύση.
- Νέα **πολύ γρήγορη** σύνδεση.
- Συνολική καθυστέρηση **αυξάνεται σε 2** γιατί όλοι χρησιμοποιούν νέα σύνδεση.
- Τμήμα Αναρχίας: **4/3**
- Παραδοσιακός σχεδιασμός **δεν επαρκεί.**



# Ανταγωνιστική Ανάθεση Πόρων



- Μοντελοποίηση με (μη ατομική και ατομική) παίγνια συμφόρησης.
- Ανάλυση απόδοσης.
  - **Τίμημα Αναρχίας:** Υποβάθμιση λόγω αυτόνομης και ανταγωνιστικής συμπεριφοράς σε σχέση με βέλτιστη κεντροποιημένη διαχείριση.
- Κίνητρα για βελτίωση απόδοσης.
- Τεχνικές για βέλτιστο σχεδιασμό.



# Δημοπρασίες και Μηχανισμοί

---

- Ένα αντικείμενο σε δημοπρασία με  $n$  παίκτες.
  - Το αντικείμενο αξίζει  $v_j$  για παίκτη  $j$ .
- Όλοι υποβάλλουν (σφραγισμένες) προσφορές  $b_1, \dots, b_n$ .
- Αντικείμενο κατοχυρώνεται σε παίκτη  $k$  με μέγιστη προσφορά  $b_k$  αντί τιμής  $t$ .
  - Ωφέλεια κερδισμένου =  $v_k - t$ .
  - Ωφέλεια μη κερδισμένου =  $0$ .
- Επιλογή τιμής ώστε να είναι πάντα **best response**  $b_j = v_j$  (truthfulness);
  - Τιμή ίση με μέγιστη προσφορά.
    - Όχι, π.χ. 100, 5!
  - Τιμή ίση με δεύτερη μεγαλύτερη προσφορά.

# ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ - ΑΤΖΕΝΤΑ

---

- Ισορροπία Nash σε 2-person 0-sum παίγνια:
  - Εφαρμογή LP duality.
- Υπολογισμός ισορροπίας Nash σε γενικά παίγνια:
  - Brouwer's fixed point theorem και Sperner's lemma.
  - Αναφορά σε PPAD και Nash ισορροπία είναι PPAD-complete.
  - Ένας αλγόριθμος προσέγγισης για ισορροπία Nash.
- Σχεδιασμός Μηχανισμών:
  - Impossibility results, truthfulness, revelation principle
  - Single-parameter agents: Myerson's characterization, VCG, revenue maximization
  - Combinatorial auctions

# Αντικείμενο - Ατζέντα

---

- Ανταγωνιστική ανάθεση πόρων και **παίγνια συμφόρησης:**
  - Μη ατομικά παίγνια και ατομικά παίγνια.
  - Ύπαρξη και πολυπλοκότητα (αμιγούς) ισορροπίας Nash.
  - Συνάρτηση δυναμικού και σύγκλιση σε ισορροπία Nash.
  - Τίμημα της αναρχίας και τεχνικές βελτίωσής του.