Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Προηγμένα Θέματα Αλγορίθμων

Αλγόριθμοι Δικτύων και Πολυπλοκότητα

Εαρινό εξάμηνο 2018-19

(ΕΜΠ – ΑΛΜΑ)

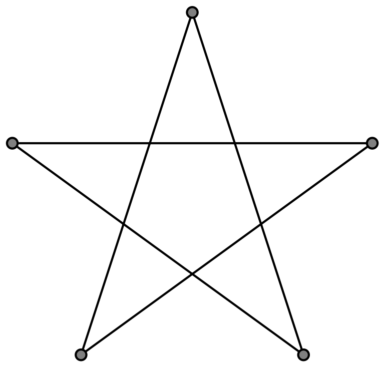
Διδάσκοντες: Δ. Φωτάκης - Α. Παγουρτζής

1η σειρά ασκήσεων

Προθεσμία παράδοσης: 31/3/2019

Άσκηση 1

Σχεδιάστε δύο ευθείες γραμμές στο παρακάτω σχήμα ώστε να εμφανιστούν δέκα μη επικαλυπτόμενα τρίγωνα:



Άσκηση 2

Αποδείξτε ότι ο παρακάτω αλγόριθμος είναι 2-προσεγγιστικός για το πρόβλημα Vertex Cover:

> *Βρες ένα δένδρο με αναζήτηση κατά βάθος (DFS) στον δοσμένο γράφο G και δώσε σαν έξοδο το σύνολο των κόμβων S που δεν είναι φύλλα.*

Άσκηση 3

(α) Τι λόγο προσέγγισης δίνει ο Greedy αλγόριθμος για το Cardinality Set Cover, αν η επιλογή του "καλύτερου" συνόλου δεν μπορεί να γίνει με ακρίβεια αλλά προσεγγιστικά, με λόγο ρ; Αποδείξτε τον ισχυρισμό σας. Μπορείτε να γενικεύσετε στο Weighted Set Cover;

Σημείωση: αυτό μπορεί να συμβεί όταν τα σύνολα δεν δίνονται αναλυτικά στην είσοδο, αλλά ορίζονται με βάση κάποια ιδιότητα.

(β) Βρείτε tight example για τον λόγο προσέγγισης του Greedy για το πρόβλημα Cardinality Set Cover.

Άσκηση 4

(α) Βρείτε f–προσεγγιστικό αλγόριθμο για το πρόβλημα Set Cover, όπου f είναι το μέγιστο πλήθος συνόλων στα οποία μπορεί να ανήκει κάποιο στοιχείο. Βρείτε tight example για τον αλγόριθμό σας.
Υπόδειξη: παρατηρήστε ποιο είναι το f στο πρόβλημα Vertex Cover.

(β) Μπορείτε να γενικεύσετε στο πρόβλημα Weighted Set Cover;
Υπόδειξη: προσπαθήστε να γενικεύστε την ιδέα του degree-weighted αλγορίθμου για το Weighted Vertex Cover.

Άσκηση 5

(α) Συμπληρώστε την απόδειξη που θα βρείτε στις διαφάνειες για τον λόγο προσέγγισης $5/3$ για το πρόβλημα Metric TSP$_{(s,t)-path}$. Εξηγήστε τον ρόλο του όρου $c_{s,t}$ στην ανάλυση καθενός από τους δύο επιμέρους αλγορίθμους.

(β) Δώστε tight example για τους επιμέρους αλγορίθμους, καθώς και για τον συνολικό αλγόριθμο.

Άσκηση 6

Έστω το Γραμμικό Πρόγραμμα (Π):

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{min} & -10x_1 + 57x_2 + 9x_3 + 24x_4 & & \\
\text{s.t.} & 0.5x_1 - 5.5x_2 - 2.5x_3 + 9x_4 + x_5 & = & 0 \\
 & 0.5x_1 - 1.5x_2 - 0.5x_3 + x_4 + x_6 & = & 0 \\
 & x_1 + x_7 & = & 1 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 & \geq & 0
\end{array}
$$

(α) Να λύσετε (δύο φορές) το (Π) με τον αλγόριθμο Simplex. Να ξεκινήσετε με βασικές μεταβλητές τις x_5, x_6, x_7. Να ακολουθήσετε τους παρακάτω κανόνες για την εναλλαγή στηλών (pivoting) στη βάση (την πρώτη φορά τον ένα, την δεύτερη τον άλλο):

1. (i) ως νέα βασική μεταβλητή επιλέγεται εκείνη με το ελάχιστο ανηγμένο κόστος, και (ii) αν υπάρχουν δύο ή περισσότερες βασικές μεταβλητές υποψήφιες για έξοδο από τη βάση, επιλέγεται εκείνη με τον ελάχιστο δείκτη.
2. (i) ως νέα βασική μεταβλητή επιλέγεται εκείνη (από τις μεταβλητές με αρνητικό ανηγμένο κόστος) με τον ελάχιστο δείκτη, και (ii) αν υπάρχουν δύο ή περισσότερες βασικές μεταβλητές υποψήφιες για έξοδο από τη βάση, επιλέγεται εκείνη με τον ελάχιστο δείκτη.

(β) Να διατυπώσετε το δυϊκό πρόγραμμα (ΔΠ) του (Π). Να διατυπώσετε τις complementary slackness συνθήκες για τα (Π) και (ΔΠ), και να τις χρησιμοποιήσετε για τον υπολογισμό της βέλτιστης λύσης του (ΔΠ).

Άσκηση 7

Θεωρούμε κυρτό σύνολο $P \subseteq \mathbb{R}^n$ και κυρτή συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Για κάθε $\varepsilon > 0$, ορίζουμε την ε-γειτονιά σημείου $\boldsymbol{x} \in P$ ως $N_\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \in P : ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||_2 \leq \varepsilon\} \subseteq P$. Να δείξετε ότι κάθε τοπικό βέλτιστο ως προς την ε-γειτονιά είναι και ολικό βέλτιστο του P. Δηλαδή, αν θεωρήσουμε σημείο $\boldsymbol{x}^* \in P$ για το οποίο ισχύει ότι $f(\boldsymbol{x}^*) \leq f(\boldsymbol{y})$ για κάθε $\boldsymbol{y} \in N_\varepsilon(\boldsymbol{x})$, τότε έχουμε ότι $f(\boldsymbol{x}^*) \leq f(\boldsymbol{y})$ για κάθε $\boldsymbol{y} \in P$. Με βάση αυτό, να εξηγήσετε γιατί η κορυφή στην οποία τερματίζει ο αλγόριθμος Simplex αποτελεί πάντα μια βέλτιστη λύση.

Άσκηση 8

Έστω $P = \{\boldsymbol{x} : A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$ και γραμμικό πρόγραμμα min$\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in P\}$. Υποθέτουμε ότι $P \neq \emptyset$ και ότι το P είναι φραγμένο στην κατεύθυνση της αντικειμενικής συνάρτησης $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$.

(α) Να δείξετε ότι για κάθε $\boldsymbol{x} \in P$, υπάρχει κορυφή $\boldsymbol{v} \in P$ με $\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{v} \leq \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$.

(β) Χρησιμοποιώντας το (α), να δείξετε ότι το P έχει μία τουλάχιστον κορυφή, και ότι το γραμμικό πρόγραμμα $\min\{\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in P\}$ έχει μια βέλτιστη λύση η οποία αποτελεί κορυφή του P.

Άσκηση 9

Έστω A ένας πίνακας $m \times n$, $\boldsymbol{x}$ ένα n-διάνυσμα μεταβλητών, και $\boldsymbol{b}$ ένα m-διάνυσμα. Το γραμμικό σύστημα $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ καλείται *μη-συμβιβαστό* αν υπάρχει m-διάνυσμα $\boldsymbol{y}$ τέτοιο ώστε $A^T \boldsymbol{y} = 0, \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y} < 0$, και $y \geq 0$. Να αποδείξετε ότι το σύστημα $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ είναι *μη-επιλύσιμο* αν και μόνο αν είναι *μη-συμβιβαστό*.