Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Προηγμένα Θέματα Αλγορίθμων

Αλγόριθμοι Δικτύων και Πολυπλοκότητα

Εαρινό εξάμηνο 2018-2019

(ΕΜΠ – ΑΛΜΑ)

Διδάσκοντες: Δ. Φωτάκης - Α. Παγουρτζής

2η Σειρά Ασκήσεων

Προθεσμία παράδοσης: 10/5/2019

Άσκηση 1 (15 μον.). Θεωρούμε μια δημοσκόπηση για με τη στάση των πολιτών ως προς μια σημαντική πολιτικο-οικονομική μεταβολή. Οι πολίτες απαντούν στη δημοσκόπηση με "ναι" ή "όχι" (υπέρ ή εναντίον της μεταβολής). Αν το (πραγματικό) ποσοστό των πολιτών που τάσσονται υπέρ της μεταβολής είναι p, θέλουμε να υπολογίσουμε μια εκτίμηση $\hat{p}$ του p ώστε $\mathbb{P}\mathrm{r}[|\hat{p} - p| \leq \varepsilon p] > 1 - \delta$, για δεδομένα $\varepsilon, \delta \in (0, 1)$. Για τη δημοσκόπηση, θα ρωτήσουμε N πολίτες, που επιλέγονται ισοπίθανα και ανεξάρτητα από το σύνολο των πολιτών. Η εκτίμησή μας $\hat{p}$ θα είναι το ποσοστό των N πολιτών που τάσσονται υπέρ της μεταβολής. Χρησιμοποιώντας Chernoff-Hoeffding bounds, να υπολογίσετε (ως συνάρτηση των ε, δ, και p) το ελάχιστο μέγεθος N του δείγματος που χρειαζόμαστε. Βρείτε την τιμή του N για $\varepsilon = 0.02$ και $\delta = 0.05$, αν γνωρίζουμε ότι $p \in [0.1, 0.7]$ (και δείτε ότι αυτή η τιμή είναι ανεξάρτητη του πληθυσμού της χώρας!). Να υπολογίσετε ακόμη το ελάχιστο μέγεθος N' δείγματος (ως συνάρτηση των ε και δ) ώστε η εκτίμησή μας $\hat{p}'$ να ικανοποιεί $\mathbb{P}\mathrm{r}[|\hat{p}' - p| \leq \varepsilon] > 1 - \delta$. Ποια είναι η τιμή του N' για για $\varepsilon = 0.02$ και $\delta = 0.05$; *Σημείωση:* Πρόκειται για παραλλαγή της [1, Άσκησης **4.5**].

Άσκηση 2 (Sparsification, 20 μον.). (α) Έστω $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \in [0, 1]^n$, με $\sum_i x_i = 1$ (το $\boldsymbol{x}$ είναι ένα διάνυσμα πιθανοτήτων στο $[n] \equiv \{1, \dots, n\}$). Έστω ακόμη $k(\varepsilon) = \lceil \ln(2)/(2\varepsilon^2) \rceil$. Να δείξετε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει ένα $k(\varepsilon)$-ομοιόμορφο διάνυσμα πιθανοτήτων $\boldsymbol{y}$ στο $[n]$ τέτοιο ώστε $|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{y}| \leq \varepsilon$. Υπενθυμίζεται ότι ένα διάνυσμα πιθανοτήτων $\boldsymbol{y}$ είναι k-*ομοιόμορφο* (k-uniform) αν κάθε y_i είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του $1/k$.

(β) Έστω A πίνακας $m \times n$ με όλα τα στοιχεία του στο $[0, 1]$ και έστω $\boldsymbol{x}$ ένα διάνυσμα πιθανοτήτων στο $[n]$. Έστω ακόμη $k(m, \varepsilon) = \lceil \ln(2m)/(2\varepsilon^2) \rceil$. Να δείξετε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει ένα $k(m, \varepsilon)$-ομοιόμορφο διάνυσμα πιθανοτήτων $\boldsymbol{y}$ στο $[n]$ τέτοιο ώστε $\|A\boldsymbol{x} - A\boldsymbol{y}\|_\infty \leq \varepsilon$.

Υπόδειξη: Να χρησιμοποιήσετε το ακόλουθο Hoeffding bound: Έστω $X_1, \dots, X_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές στο $[0, 1]$, και έστω $X = \left(\sum_{i=1}^n X_i\right)/n$. Για κάθε $\varepsilon \geq 0$, $\mathbb{P}\mathrm{r}[|X - \mathbb{E}\mathrm{xp}[X]| > \varepsilon] \leq 2e^{-2n\varepsilon^2}$.

Άσκηση 3 (15 μον.). Να απαντήσετε τα (a) και (b) της [1, Άσκησης **6.4**].

Άσκηση 4 (15 μον.). Να λύσετε την [2, Άσκηση **5.3**] και την [2, Άσκηση **5.6**].

Άσκηση 5 (Public Project, 10 μον.). Η δημοτική αρχή μελετά την κατασκευή ενός νέου πάρκου, το οποίο αναμένεται να κοστίσει C ευρώ. Κάθε δημότης i, $i = 1, \dots, n$, εκτιμά την ωφέλειά του από το νέο πάρκο σε $v_i \geq 0$ ευρώ, τιμή που είναι γνωστή μόνο στον ίδιο. Η δημοτική αρχή ζητάει από τους δημότες να δηλώσουν τις εκτιμήσεις τους $v_1, \dots, v_n$, και θα προχωρήσει στην κατασκευή του πάρκου μόνο αν $\sum_{i=1}^n v_i \geq C$. Σε αυτή την περίπτωση, κάθε δημότης θα πληρώσει μια εισφορά $p_i \geq 0$. Η εισφορά έχει στόχο οι δημότες να δηλώσουν τις πραγματικές τους εκτιμήσεις, και όχι να καλύψει το συνολικό κόστος του πάρκου. Να σχεδιάσετε έναν φιλαλήθη (truthful) μηχανισμό για αυτό το πρόβλημα.

Άσκηση 6 (Δημοπρασίες και Multiplicative Price Updates, 25 μον.). Θεωρούμε μια δημοπρασία για m διαφορετικά αντικείμενα (υποθέτουμε, για λόγους απλότητας, ότι κάθε αντικείμενο υπάρχει σε απεριόριστα αντίγραφα και ότι κάθε παίκτης μπορεί να πάρει το πολύ ένα αντίγραφο από κάθε αντικείμενο). Στη δημοπρασία συμμετέχουν n παίκτες. Κάθε παίκτης i έχει μια αύξουσα συνάρτηση αποτίμησης $v_i : 2^{[m]} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ που ορίζει πόσο αξίζει κάθε υποσύνολο αντικειμένων για τον i. Ο μηχανισμός ορίζει την αρχική τιμή κάθε αντικειμένου $p_1^j = L/m$, για κάποιο κατάλληλα επιλεγμένο $L > 0$. Στη συνέχεια, ζητά με τη σειρά από κάθε παίκτη $i \in \{1, \dots, n\}$ να επιλέξει το σύνολο S_i των αντικειμένων που μεγιστοποιεί τη συνάρτηση $v_i(S_i) - \sum_{j \in S_i} p_i^j$ και του το δίνει (ο παίκτης i μπορεί να επιλέξει το $\emptyset$, έτσι ισχύει πάντα ότι $v_i(S_i) - \sum_{j \in S_i} p_i^j \geq 0$). Πριν προχωρήσει στον επόμενο παίκτη, ο μηχανισμός αναπροσαρμόζει τις τιμές όλων των αντικειμένων $j \in S_i$ πολλαπλασιαστικά, θέτοντας $p^j_{i+1} = r \cdot p^j_i$, για κάποιο $r > 1$.

(α) Να διερευνήσετε αν ο παραπάνω μηχανισμός είναι φιλαλήθης (truthful). Να αιτιολογήσετε συνοπτικά την απάντησή σας.

(β) Υποθέτουμε ότι υπάρχει το πολύ ένας παίκτης με αξία (για όλα τα αντικείμενα) μεγαλύτερη του L. Να δείξετε ότι ο μηχανισμός διαθέτει το πολύ $2 + \log_r m$ αντίγραφα από κάθε αντικείμενο.

(γ) Να δείξετε ότι αν $L \leq V^*/2$, τότε ο μηχανισμός επιτυγχάνει συνολική αξία $\sum_i v_i(S_i) \geq V^*/(2r)$, όπου V^* η συνολική αξία της βέλτιστης λύσης που όμως διαθέτει το πολύ ένα αντίγραφο από κάθε αντικείμενο. Για να αποδείξετε αυτόν τον ισχυρισμό, πρέπει πρώτα να δείξετε (i) ότι λόγω της πολλαπλασιαστικής αναπροσαρμογής των τιμών, στο τέλος του μηχανισμού ισχύει ότι

$$\sum_i v_i(S_i) \geq \sum_{j \in [m]} \frac{p^j_{n+1} - p^j_0}{r-1} \Rightarrow (r-1) \sum_i v_i(S_i) \geq \sum_{j \in [m]} p^j_{n+1} - L\,,$$

και (ii) ότι επειδή η βέλτιστη λύση δίνει το πολύ ένα αντίγραφο από κάθε αντικείμενο,

$$\sum_i v_i(S_i) \geq V^* - \sum_{j \in [m]} p^j_{n+1}$$

Αναφορές

[1] M. Mitzenmacher and E. Upfal. *Probability and Computing: Randomized Algorithms and Probabilistic Analysis*. Cambridge University Press, 2005.

[2] D.P. Williamson and D.B. Shmoys. *The Design of Approximation Algorithms*. Cambridge University Press, 2010.