



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Αλγοριθμική Επιστήμη Δεδομένων, 2018-2019

Διδάσκοντες: Δ. Φωτάκης, Α. Παγουρτζής

2η Σειρά Ασκήσεων

Άσκηση 1. Να λύσετε την άσκηση 5.4.3 από το βιβλίο LRU.

Άσκηση 2. Δίνεται ένας $n \times n$ πίνακας A με μη-αρνητικά στοιχεία έτσι ώστε $A_{ii} = 0$, για κάθε $i \in [n]$, και $\sum_{j \in [n]} A_{ij} = \alpha_i < 1$, για κάθε $i \in [n]$. Δίνεται ακόμη ένας $n \times n$ διαγώνιος πίνακας B με $B_{ii} = 1 - \alpha_i > 0$, για κάθε $i \in [n]$. Θεωρούμε αρχικό διάνυσμα $\vec{x}_0 \in [0, 1]^n$ και την ακολουθία διανυσμάτων $\{\vec{x}_t\}_{t \geq 0}$ που προκύπτουν από την εξίσωση:

$$\vec{x}_t = A\vec{x}_{t-1} + B\vec{x}_0 \quad (1)$$

για κάθε $t \geq 1$. Λέμε ότι ένα διάνυσμα $\vec{x}^* \in [0, 1]^n$ αποτελεί *σταθερό σημείο* της (1) αν ισχύει ότι $\vec{x}^* = A\vec{x}^* + B\vec{x}_0$. Λέμε ότι η (1) ε -συγκλίνει σε ένα σημείο \vec{x} αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει χρονικό σημείο $t(\varepsilon)$, τέτοιο ώστε για κάθε $t \geq t(\varepsilon)$, να ισχύει ότι $\|\vec{x}_t - \vec{x}\|_\infty \leq \varepsilon$.

(α) Να δείξετε ότι η (1) έχει μοναδικό σταθερό σημείο το $\vec{x}^* = (I - A)^{-1}B\vec{x}_0$ (I είναι ο μοναδιαίος πίνακας $n \times n$). Να εξηγήσετε γιατί ο πίνακας $I - A$ είναι αντιστρέψιμος.

(β) Να δείξετε ότι η (1) συγκλίνει στο σημείο \vec{x}^* . Ειδικότερα, να δείξετε πρώτα ότι για κάθε γύρο $t \geq 1$, $\vec{x}_t = A^t\vec{x}_0 + \sum_{\ell=0}^{t-1} A^\ell B\vec{x}_0$. Στη συνέχεια, να δείξετε ότι $\lim_{t \rightarrow \infty} (A^t\vec{x}_0 + \sum_{\ell=0}^{t-1} A^\ell B\vec{x}_0) = \vec{x}^*$, και να συμπεράνετε ότι η (1) συγκλίνει στο \vec{x}^* .

(γ) Να δείξετε ότι η (1) ε -συγκλίνει στο σημείο \vec{x}^* μετά από $t(\varepsilon) = O(\ln(\frac{1}{\varepsilon})/(1 - \alpha))$ γύρους, όπου $\alpha = \max_i \alpha_i$. Για αυτόν τον σκοπό, να δείξετε πρώτα ότι για κάθε γύρο $t \geq 1$, $\|\vec{x}_t - \vec{x}^*\| \leq \alpha^t \|\vec{x}_0 - \vec{x}^*\|$.

Άσκηση 3. Να λύσετε την άσκηση 8.3.3 από το βιβλίο LRU.

Άσκηση 4. Να λύσετε την άσκηση 8.4.1 από το βιβλίο LRU.

Άσκηση 5. Να λύσετε την άσκηση 9.3.1 από το βιβλίο LRU.

Άσκηση 6. Περιγράψτε λεπτομερώς, σε μορφή ψευδοκώδικα, τον αλγόριθμο χρόνου $O(m^{3/2})$ για μέτρηση τριγώνων της Ενότητας 10.7.2 του βιβλίου LRU και εξηγήστε την πολυπλοκότητά του.

Ειδικότερα, σχολιάστε την χρήση των hash tables και κατά πόσον είναι απαραίτητοι για την επίτευξη της παραπάνω πολυπλοκότητας.

Άσκηση 7. Να λύσετε την άσκηση 10.6.2 από το βιβλίο LRU.

Προθεσμία υποβολής και οδηγίες. Οι απαντήσεις θα πρέπει να υποβληθούν έως τις 12/6/2019 (ημ/νία εξέτασης του μαθήματος), σε ηλεκτρονική μορφή.

Για απορίες / διευκρινίσεις: στείλτε μήνυμα στη διεύθυνση ads@corelab.ntua.gr.