

Quicksort

Δημήτρης Φωτάκης

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



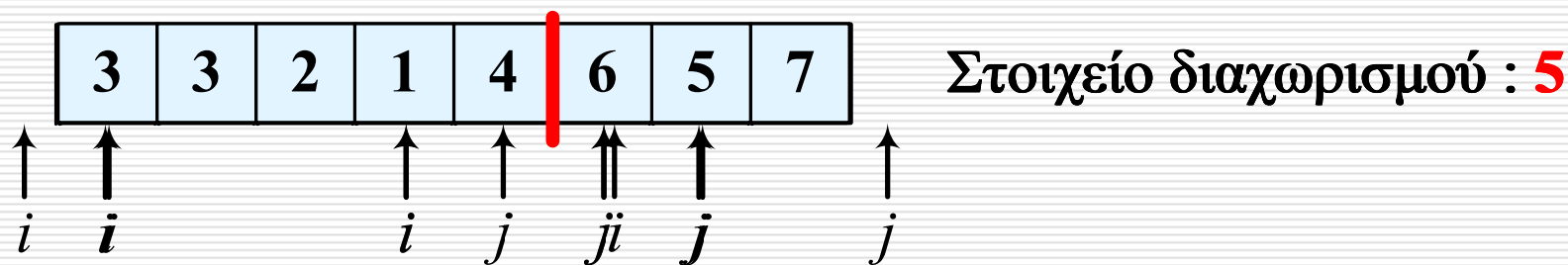
Quicksort [Hoare, 62]

- **Στοιχείο διαχωρισμού** (pivot), π.χ. πρώτο, τυχαίο, ...
- **Αναδιάταξη** και **διαίρεση** εισόδου σε δύο υπο-ακολουθίες:
 - Στοιχεία **αριστερής** υπο-ακολ. \leq **στοιχείο διαχωρισμού**.
 - Στοιχεία **δεξιάς** υπο-ακολ. \geq **στοιχείο διαχωρισμού**.
- **Ταξινόμηση** υπο-ακολουθιών **αναδρομικά**.
- Ακολουθία ταξινομημένη – **όχι σύνθεση!**

```
quickSort(int A[], int left, int right) {  
    if (left >= right) return; // At most 1 element  
    q = partition(A, left, right);  
    quickSort(A, left, q);  
    quickSort(A, q+1, right); }  
}
```

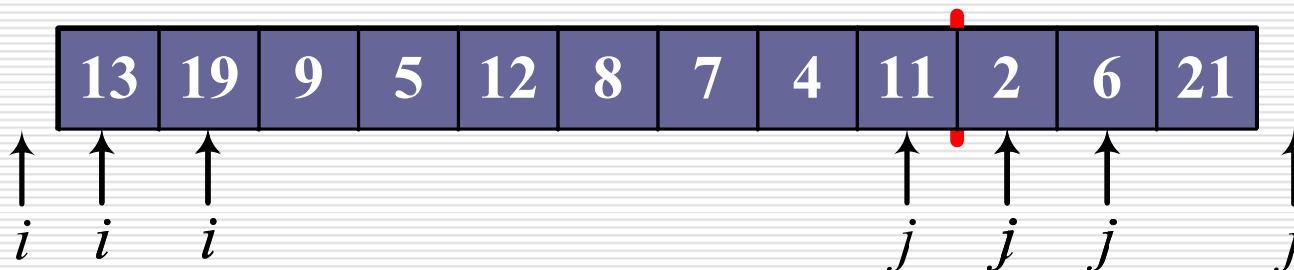
Διαίρεση

- Στοιχείο διαχωρισμού (pivot), π.χ. **πρώτο**, τυχαίο, ...
- Διαίρεση σε ένα πέρασμα :
 - Σάρωση από αριστερά (με δείκτη i) μέχρι $A[i] \geq \text{pivot}$.
 - Σάρωση από δεξιά (με δείκτη j) μέχρι $A[j] \leq \text{pivot}$.
 - Αν δεν έχουν εξεταστεί όλα τα στοιχεία ($i < j$): αντιμετάθεση($A[i], A[j]$) και συνέχεια.
 - Αν έχουν εξεταστεί όλα: επιστροφή ορίου διαχωρισμού (δείκτη j).



Διαίρεση

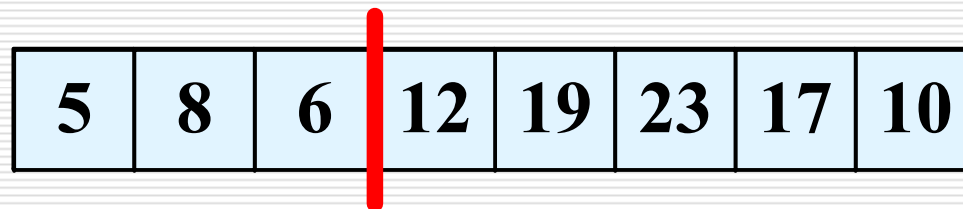
```
partition(int A[], int left, int right) {  
    int pivot = A[left], i = left - 1, j = right + 1;  
    while (1) {  
        while (A[++i] < pivot) ;  
        while (A[--j] > pivot) ;  
        if (i < j) swap(A[i], A[j]);  
        else return(j); } }
```



Στοιχείο διαχωρισμού : **13**

Διαίρεση

```
partition(int A[], int left, int right) {  
    int pivot = A[left]; i = left - 1; j = right + 1;  
    while (1) {  
        while (A[++i] < pivot) ;  
        while (A[--j] > pivot) ;  
        if (i < j) swap(A[i], A[j]);  
        else return(j); } }
```



Στοιχείο διαχωρισμού : **10**

Ανάλυση Διαχωρισμού

□ Ορθότητα **partition** :

- Διατηρεί και επεκτείνει αριστερή περιοχή με στοιχεία $\leq \text{pivot}$ και δεξιά περιοχή με στοιχεία $\geq \text{pivot}$.
- $A[i] \geq \text{pivot}$: επέκταση αριστερής περιοχής σταματά.
- $A[j] \leq \text{pivot}$: επέκταση δεξιάς περιοχής σταματά.
- Ξένες περιοχές : αντιμετάθεση στοιχείων και συνέχεια.
- Επικάλυψη : ολοκλήρωση διαίρεσης.
- Τελικά τα στοιχεία αριστερά $\leq \text{pivot}$ και τα στοιχεία δεξιά $\geq \text{pivot}$, **όπως απαιτείται.**

□ Κάθε περιοχή ≥ 1 στοιχείο. **Quicksort τερματίζει.**

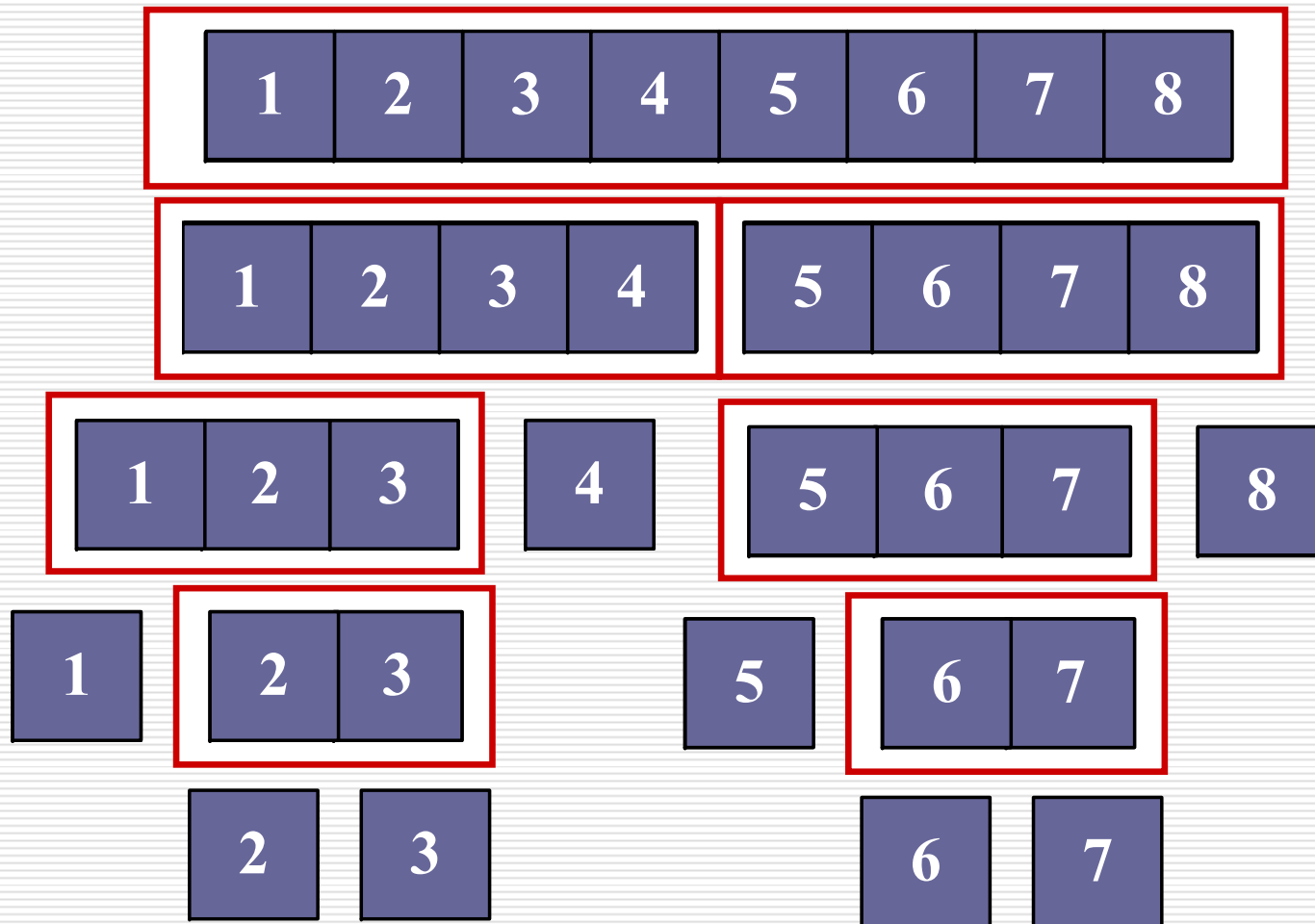
($1 \leq \text{σημείο διαχωρισμού} \leq n - 1$)

- **Απαραίτητα:** i και j σταματούν στο pivot.

Ανάλυση Διαχωρισμού

- Χρόνος εκτέλεσης **partition** :
 - Κάθε στοιχείο συγκρίνεται με πivoτ μία φορά (εκτός από στοιχεία εκατέρωθεν σημείου χωρισμού).
 - Τελικά i και j «δείχνουν» είτε γειτονικές είτε ίδια θέση γιατί όπου πέρασε το i δεν συνεχίζει j .
 - Χρόνος εκτέλεσης **partition για n στοιχεία = $\Theta(n)$.**
- Μετά τον διαχωρισμό, στοιχεία δεν αλλάζουν «πλευρά» (δηλ. αριστερά μένουν αριστερά, δεξιά μένουν δεξιά).
- Υπάρχουν πολλές άλλες μορφές διαίρεσης, π.χ. πivoτ παίρνει τελική του θέση στον πίνακα, διαίρεση στα τρία, ...

Παράδειγμα Quicksort



Ορθότητα Quicksort

- Συνέπεια ορθότητας **partition** :
 - **Τερματισμός** : μέγεθος υπο-ακολουθιών $\leq n - 1$.
 - Ταξινόμηση :
 - Αριστερά στοιχεία \leq pivot \leq δεξιά στοιχεία.
 - **Επαγωγικά**, αριστερή περιοχή και δεξιά περιοχή ταξινομημένες.
 - Συνολικά, πίνακας ταξινομημένος.

Χρόνος Εκτέλεσης (χ.π.)

- Χρόνος εκτελ. αναδρομικών αλγ. με διατύπωση και λύση αναδρομικής εξίσωσης.
- Χρόνος εκτέλεσης **partition**(n στοιχεία) : $\Theta(n)$
- **$T(n)$** : χρόνος (χ.π.) για ταξινόμηση n στοιχείων.
 - **$\Theta(n)$** : αναδιάταξη και διαίρεση εισόδου.
 - **$T(k)$** : ταξινόμηση αριστερού τμήματος (k στοιχεία).
 - **$T(n - k)$** : ταξινόμηση δεξιού τμήματος ($n - k$ στοιχεία).

$$T(n) = \Theta(n) + \max_{1 \leq k \leq n-1} \{T(k) + T(n - k)\}, \quad T(1) = \Theta(1)$$

Χρόνος Εκτέλεσης (χ.π.)

$$T(n) = \Theta(n) + \max_{1 \leq k \leq n-1} \{T(k) + T(n-k)\}, \quad T(1) = \Theta(1)$$

- Χειρότερη περίπτωση : $k = 1$ ή $k = n - 1$ (σε κάθε κλήση).
 - Ουσιαστικά **δεν γίνεται διαίρεση** (μόνο αναδιάταξη) !
 - **Partition «βοηθάει ελάχιστα»** τον αλγόριθμο.

$$T(n) = \Theta(n) + T(n-1) + T(1), \quad T(1) = \Theta(1)$$

$$T(n) = \Theta(n) + \Theta(n-1) + \Theta(n-2) + \dots + \Theta(1) = \Theta(n^2)$$

- Στιγμιότυπα που **quicksort** χρειάζεται χρόνο $\Omega(n^2)$;

Χρόνος Εκτέλεσης

- **Καλύτερη περίπτωση** : $k = n / 2$ (σε κάθε κλήση).

- Ουσιαστικά τέλεια διαίρεση !
- Partition «βοηθάει τα μέγιστα» !

$$T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n) \Rightarrow T(n) = \Theta(n \log n)$$

- Αν $\min\{k, n - k\} \geq n/4$ (περίπου ίδιο μέγεθος)

$$T(n) = \Theta(n) + T(n/4) + T(3n/4) \Rightarrow T(n) = \Theta(n \log n)$$

- Χειρότερη και καλύτερη περίπτωση εξαιρετικά σπάνιες !

- Αν τυχαίο στοιχείο ρινοτ,
πιθανότητα διαίρεσης $(n/4, 3n/4)$ ή καλύτερης $\geq 1/2$!



Πιθανοτική Quicksort

- Τυχαίο στοιχείο σαν στοιχείο χωρισμού (pivot).
- Για κάθε $k \in [n - 1]$,
πιθανότητα διαίρεσης $(k, n - k) = \frac{1}{n - 1}$

```
randomQuickSort(int A[], int left, int right) {  
    if (left >= right) return; // At most 1 element  
    pivot = random(left, right);  
    swap(A[left], A[pivot]);  
    q = partition(A, left, right);  
    randomQuickSort(A, left, q);  
    randomQuickSort(A, q+1, right); }  
}
```

Χρόνος Εκτέλεσης (μ.π.)

$$\begin{aligned} S(n) &= \Theta(n) + \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} [S(k) + S(n-k)] \\ &= \Theta(n) + \frac{2}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} S(k) \end{aligned}$$

- Λύση αναδρομής : $S(n) = \Theta(n \log n)$
Αυτός ο χρόνος εκτέλεσης με μεγάλη πιθανότητα !
- Πιθανότητα διαίρεσης $(n/4, 3n/4)$ ή καλύτερης $\geq 1/2$!
 - Κατά «μέσο όρο», κάθε 2 επίπεδα στο δέντρο της αναδρομής, έχουμε «επιτυχημένη» διαίρεση.
 - Σε κάθε επίπεδο, συνολικός χρόνος διαίρεσης $\Theta(n)$.
 - $\Theta(n \log n)$ από «επιτυχημένες» διαιρέσεις + $\Theta(n \log n)$ από «αποτυχημένες» διαιρέσεις.

Χρόνος Εκτέλεσης (μ.π.)

- Πιθανότητα διαδοχικές «αποτυχημένες» διαιρέσεις $> c \log n$ είναι **εκθετικά** μικρή!
 - Χρόνος εκτέλεσης $\Theta(n \log n)$ με **μεγάλη πιθανότητα** !
- Μέση περίπτωση δεν **εξαρτάται από είσοδο** !
Αφορά στη συμπεριφορά του αλγόριθμου.
- Εκθετικά μικρή πιθανότητα χειρότερης περίπτωσης.
 - Ανάλυση χειρότερης περίπτωσης **δεν έχει νόημα** !

Πιθανοτικοί Αλγόριθμοι

- Ντετερμινιστικοί αλγόριθμοι:
 - Προκαθορισμένη συμπεριφορά για κάθε είσοδο.
 - Υπάρχει χειρότερη περίπτωση και μπορεί να συμβεί.
- Πιθανοτικοί αλγόριθμοι:
 - Συμπεριφορά από είσοδο και **τυχαίες επιλογές**.
 - Χρήση τυχαιότητας ώστε **χειρότερη περίπτωση να συμβαίνει με πολύ μικρή πιθανότητα**.
 - Ποια είναι η χειρότερη περ. για πιθανοτική quicksort;
 - **Χρόνος** (απόδοση) κατά **μέση τιμή**.
Ορθότητα με μεγάλη πιθανότητα.
 - **Las-Vegas**: αποτέλεσμα σωστό, χρόνος τυχαία μετ/τη.
 - **Monte-Carlo**: χρόνος προκαθορισμένος, μπορεί λάθος αποτέλεσμα (αλλά με πολύ μικρή πιθανότητα).

Σύνοψη

- Quicksort:
 - Πιθανοτικός αλγόριθμος.
 - Χρόνος χειρότερης περ.: $\Theta(n^2)$
 - Χρόνος μέσης περίπτωσης: $\Theta(n \log n)$
 - Χώρος: πρακτικά in-place.
 - Αναδρομή καθυστερεί και απαιτεί μνήμη.
 - Εύκολη και γρήγορη υλοποίηση.
 - Γρηγορότερος αλγόριθμος στην πράξη (για $n \geq 30$).

Σύνοψη

Αλγόριθμος	Καλύτερη	Μέση	Χειρότερη	Χώρος
BubbleS	$\Omega(n)$	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(1)$
InsertionS	$\Omega(n)$	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(1)$
SelectionS	$\Omega(n)$	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(1)$
HeapS	$\Omega(n \log n)$	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$	$O(1)$
MergeS	$\Omega(n \log n)$	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$	$O(n)$
QuickS	$\Omega(n \log n)$	$O(n \log n)$	$O(n^2)$?