

Αναζήτηση Κατά Βάθος

Δημήτρης Φωτάκης

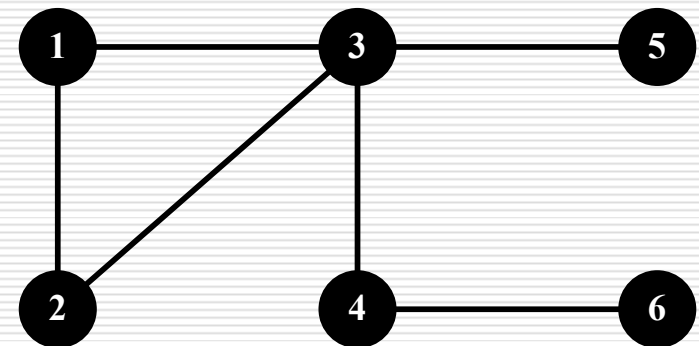
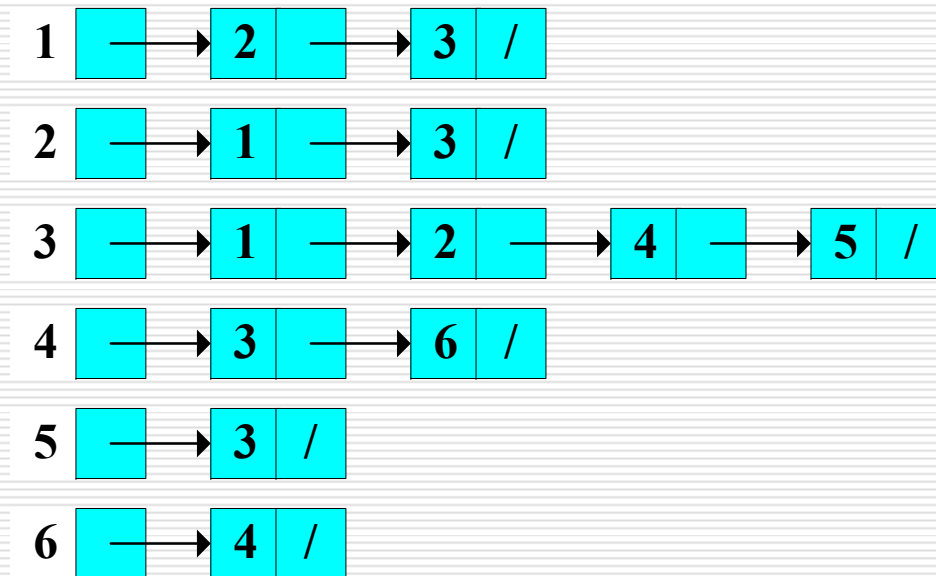
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



Αναζήτηση Κατά Βάθος (DFS)

- Εξερεύνηση νέων κορυφών με απομάκρυνση από αρχική.
- Πρώτη επίσκεψη σε ανεξερεύνητη κορυφή u :
 - Εξερεύνηση (αναδρομικά) όλων των (ανεξερεύνητων) γειτόνων της u , πριν ολοκληρώσουμε με u .



Αναζήτηση Κατά Βάθος (DFS)

- Εξερεύνηση νέων κορυφών με **απομάκρυνση** από αρχική.
- Πρώτη επίσκεψη σε **ανεξερεύνητη** κορυφή u :
 - Εξερεύνηση (αναδρομικά) **όλων** των (ανεξερεύνητων) **γειτόνων** της u , πριν ολοκληρώσουμε με u .
- Φύσει $\text{DFS}(\text{κορυφή } u)$
αναδρομική **for** κάθε κορυφή v γειτονική της u **do**
διαδικασία: **if** δεν έχω επισκεφθεί τη v προηγουμένως **then**
σημείωσε ακμή (u, v) ; $\text{DFS}(v)$;
- **Τρία είδη** κορυφών:
 - **Ανεξερεύνητη**: όχι επίσκεψη ακόμη.
 - **Υπο-εξέταση**: επίσκεψη και εξερευνούμε γείτονες.
 - **Εξερευνημένη**: ολοκλήρωση διαδικασίας.

Αναζήτηση Κατά Βάθος (DFS)

- Κορυφές περνούν από παραπάνω στάδια:
 - Αρχικά όλες οι κορυφές **ανεξερεύνητες**.
 - Πρώτη επίσκεψη ανεξερεύνητης κορ. → **υπό-εξέταση**.
 - Ολοκλήρωση DFS για (ανεξερ.) γείτονες κορ. → **εξερευνημένη**.
- Κορυφή u τίθεται **υπό-εξέταση**:
 - Όλες οι κορυφές που είναι **προσπελάσιμες από u** και είναι **ανεξερεύνητες** θα τεθούν **εξερευνημένες** πριν u τεθεί **εξερευνημένη**.
- Εξέλιξη διαδικασίας αποτυπώνεται σε **DFS-δάσος** και «**χρόνου**» πρώτης επίσκεψης και αναχώρησης.
 - DFS-δάσος: **ακμές πρώτης επίσκεψης, ακυκλικό**.

Υλοποίηση

- Πίνακας κατάστασης: $\mathbf{m[v]}$ = { A, Y, E }.
- Πίνακας γονέων: $\mathbf{p[v]}$ = πατέρας v στο DFS-δάσος.
- «Χρόνοι» πρώτης επίσκεψης $\mathbf{d[v]}$ και αναχώρησης $\mathbf{f[v]}$.
- Χρόνος εκτέλεσης $\Theta(\mathbf{n + m})$.
- DFS σε (α) δέντρο, (β) πλήρες γράφημα, (γ) κύκλο.

DFS_Init($G(V, E)$)

$t \leftarrow 0;$

for all $v \in V$ **do**

$m[v] \leftarrow A; p[v] \leftarrow \text{NULL};$

for all $v \in V$ **do**

if $m[v] = A$ **then** DFS(v);

DFS(v)

$m[v] \leftarrow Y; d[v] \leftarrow ++t;$

for all $u \in L[v]$ **do**

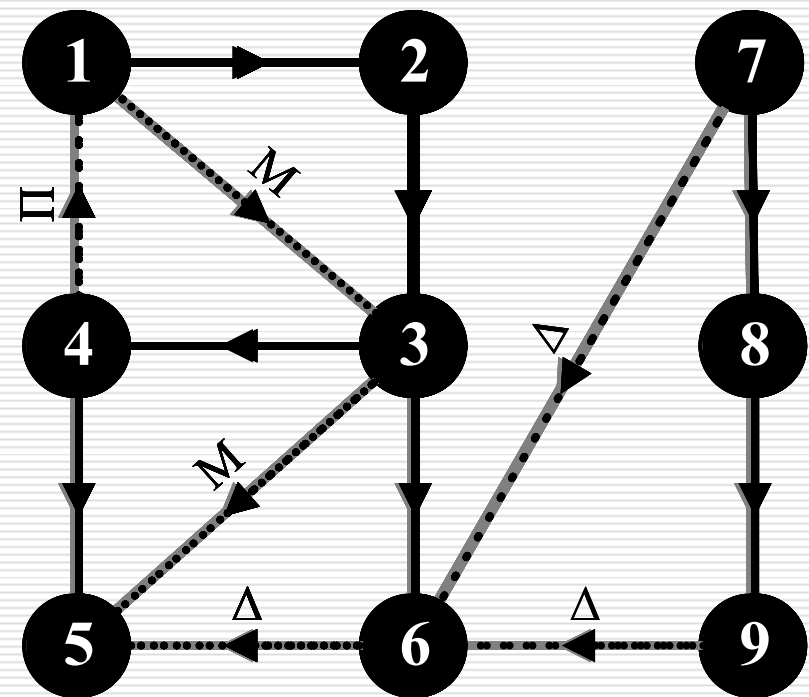
if $m[u] = A$ **then**

$p[u] \leftarrow v; \text{DFS}(u);$

$m[v] \leftarrow E; f[v] \leftarrow ++t;$

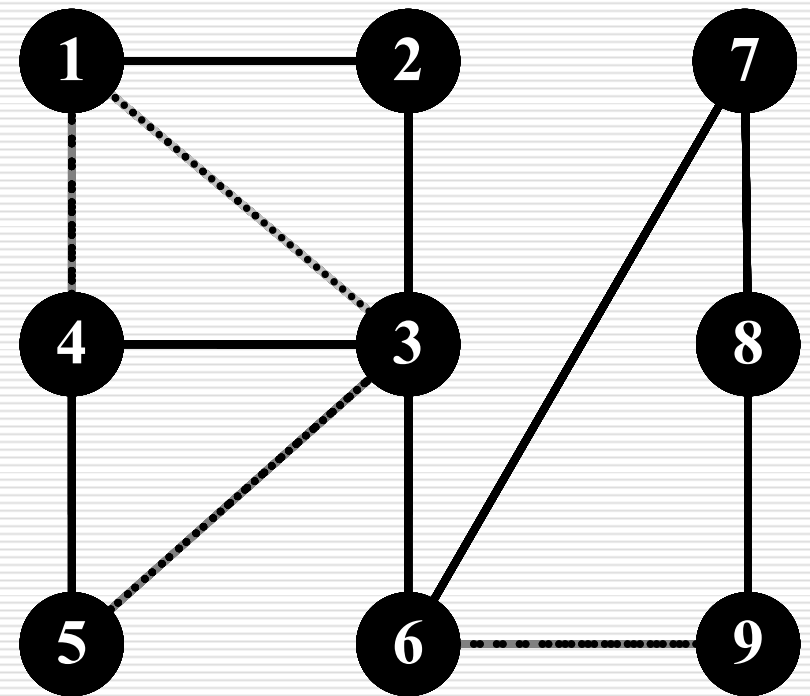
Παράδειγμα – Κατηγορίες Ακμών

- Ακμές δάσους / δέντρου:
 - Εξερεύνηση (u, v) όταν v ανεξερεύνητη.
- Πίσω ακμές:
 - Εξερεύνηση (u, v) όταν v υπό-εξέταση: κύκλος.
- Μπροστά ακμές:
 - Εξερεύνηση (u, v) όταν v εξερευνημένη και v απόγονος u στο δέντρο.
- Ακμές διασταύρωσης:
 - Εξερεύνηση (u, v) όταν v εξερευνημένη και v **όχι** απόγονος u στο δέντρο.



Παράδειγμα

- DFS σε **μη-κατευθ.** γράφημα παράγει μόνο **ακμές δέντρου** και **πίσω ακμές**.
 - Ακμή $\{v, u\}$ με $d[v] < d[u]$ (πρώτα πρώτη επίσκεψη σε v).
 - Πρώτα v ΥΕ, μετά u ΥΕ, μετά u Εξερ, τέλος v Εξερ.
 - Αν κατεύθυνση (v, u) εξερευνήθηκε **πρώτη**, τότε $\{v, u\}$ **ακμή δέντρου**.
 - Αν κατεύθυνση (u, v) εξερευνήθηκε **πρώτη**, τότε $\{v, u\}$ **πίσω ακμή**.



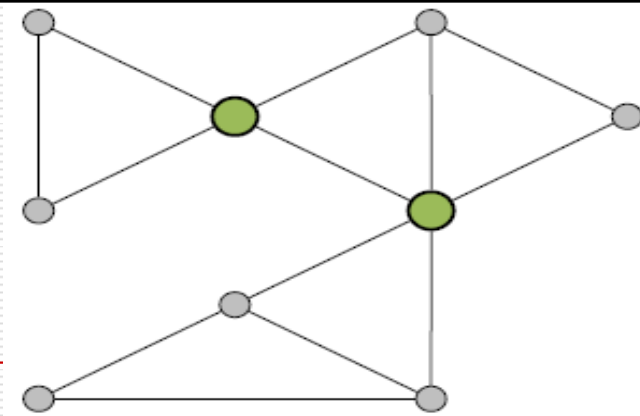
Μερικές Ιδιότητες

- Για μη-κατευθυνόμενα γραφήματα, DFS υπολογίζει **συνεκτικές συνιστώσες** (όπως και BFS).
- Αν v απόγονος u στο DFS-δάσος, $[d[v], f[v]] \subset [d[u], f[u]]$
Αν v όχι απόγονος u στο DFS-δάσος, $[d[v], f[v]] \cap [d[u], f[u]] = \emptyset$
- Γράφημα **ακυκλικό** ανν DFS **δεν** παράγει **πίσω ακμές**.
 - Εξερεύνηση **πίσω ακμής** (u, v) όταν v ΥΕ \Rightarrow Μονοπάτι $v \rightarrow u$ και ακμή $(u, v) \Rightarrow$ κύκλος.
 - Έστω κύκλος C , v πρώτη κορυφή C που τίθεται ΥΕ, και (u, v) ακμή C που εισέρχεται στην v .
 - u απόγονος της v στο DFS-δάσος γιατί:
 - Υπάρχει $v \rightarrow u$ μονοπάτι.
 - Όλες οι άλλες κορυφές του C είναι Α όταν v γίνεται ΥΕ.
 - Άρα (u, v) **πίσω ακμή**.

Εφαρμογές

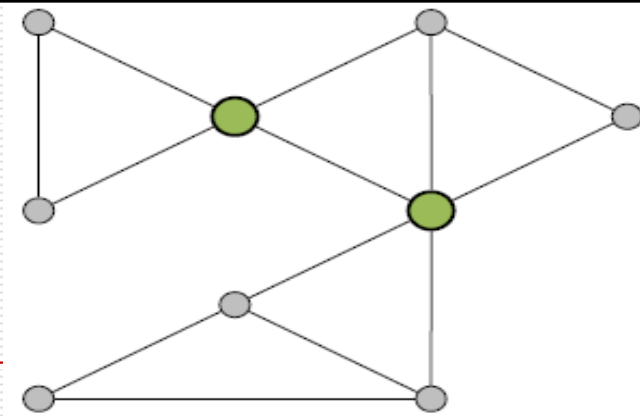
- «Χρόνοι» πρώτης επίσκεψης και αναχώρησης δίνουν πληροφορίες για δομή γραφήματος:
 - Σημεία κοπής και γέφυρες σε μη-κατευθυνόμενα γραφήματα.
 - Τοπολογική διάταξη σε Directed Acyclic Graphs (DAGs).
 - Ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες σε κατευθυνόμενα γραφήματα.

Σημεία Κοπής



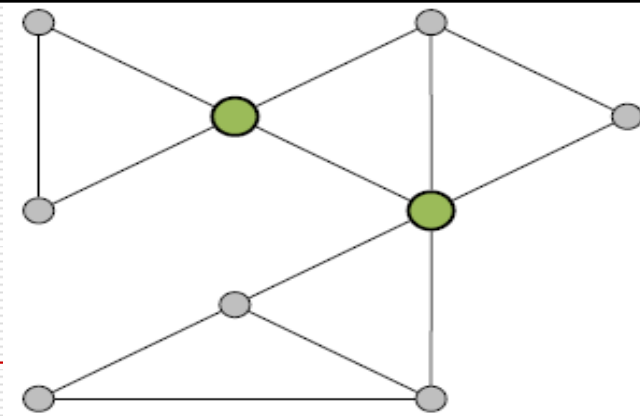
- **Σημείο κοπής v** (cut vertex, articulation point) μη κατευθυνόμενου γραφήματος $G(V, E)$: αφαίρεση v **αυξάνει** πλήθος **συνεκτικών συνιστωσών** του G .
 - **Ρίζα s** DFS-δέντρου T είναι σημείο κοπής αν s έχει **2 ή περισσότερα παιδιά** στο T .
 - **Δεν** υπάρχουν **ακμές διασταύρωσης**: όλα τα μονοπάτια από ένα υποδέντρο στο άλλο διέρχονται μέσω s .
 - Κορυφή v ($\neq s$) είναι **σημείο κοπής** αν υπάρχει **απόγονος u** της v στο T τ.ω. **όλα $u - s$ μονοπάτια** στο G διέρχονται από v .
 - Κορυφή v ($\neq s$) **δεν** είναι **σημείο κοπής** αν κάθε **απόγονος u** της v στο T μπορεί να **«παρακάμψει» v** (μέσω πίσω ακμής).
 - ... ανν από **κάθε υποδέντρο** με ρίζα παιδί της v έχει **πίσω ακμή** που καταλήγει σε **πρόγονο** της v .

Σημεία Κοπής



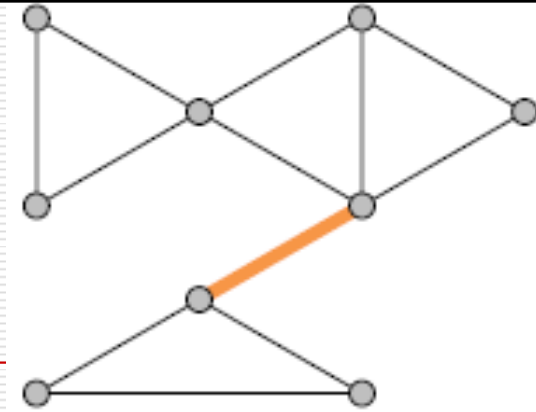
- Κορυφή v ($\neq s$) είναι **σημείο κοπής** ανν έχει **απόγονο** u στο T τ.ω. **όλα** $u - s$ **μονοπάτια** στο G διέρχονται **από** v .
 - ... ανν v έχει **παιδί** u τ.ω. η u και οι **απόγονοι** u **δεν** έχουν **πίσω ακμή** προς **πρόγονο** της v .
- **$low(v)$** : χαμηλότερο βάθος ενός γείτονα κάποιας κορυφής απόγονου της v στο DFS δέντρο T .
 - Αν v φύλλο στο T :
 $low(v) = \min\{d(v), \min\{d(u): (v, u) \text{ πίσω ακμή}\}\}$
 - Διαφορετικά:
 $low(v) = \min\{d(v), \min\{d(u): (v, u) \text{ πίσω ακμή}\}, \min\{d(u): w \text{ απόγονος } v, (w, u) \text{ πίσω ακμή}\}\}$
(το 3^ο είναι το ελάχιστο **low value** παιδιών της v)
 - Υπολογισμός σε γραμμικό χρόνο (μικρή τροποποίηση DFS)

Σημεία Κοπής



- Σημεία κοπής μη κατευθυνόμενου γραφήματος $G(V, E)$:
 - Ρίζα s στο DFS δέντρο ανν έχει ≥ 2 παιδιά.
 - Κάθε άλλη κορυφή v που έχει παιδί u με $low(u) \geq d(v)$
- Υπολογισμός **δισυνεκτικών συνιστωσών** σε γραμμικό χρόνο.
 - **Δισυνεκτική συνιστώσα**: μεγιστικό (επαγόμενο) υπογράφημα που **δεν περιέχει σημείο κοπής**.
 - Αν v σημείο κοπής τ.ω. το υποδέντρο T_v (στο DFS δέντρο) δεν περιέχει άλλο σημείο κοπής, τότε οι **κορυφές του T_v** ορίζουν **δισυνεκτική συνιστώσα**.

Γέφυρες



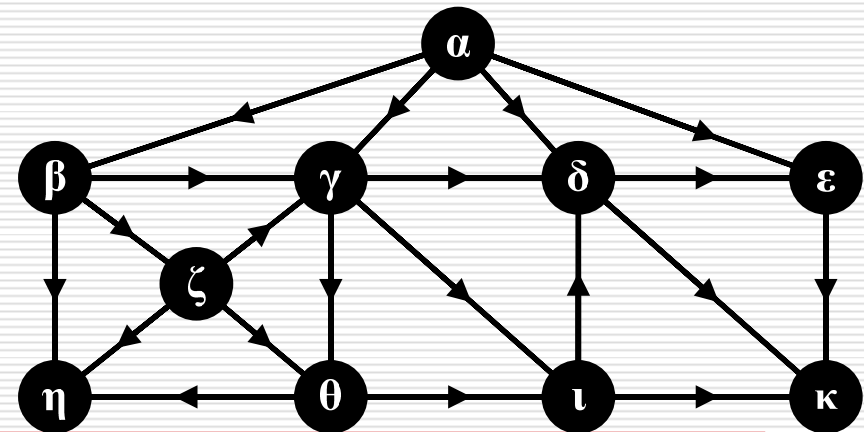
- Ακμή e (μη κατευθυνόμενου γραφήματος) είναι **γέφυρα** αν αφαίρεση e **αυξάνει** πλήθος **συνεκτικών** συνιστωσών
 - Ακμή e είναι **γέφυρα** αν e **δεν** ανήκει σε κύκλο.
 - Ακμή e είναι γέφυρα αν e (και τα άκρα της) αποτελούν **δισυνεκτική συνιστώσα**.
 - Μόνο ακμές στο DFS δέντρο μπορούν να είναι γέφυρες (**απαραίτητες** για συνεκτικότητα).
 - Ακμή $e = \{v, u\}$ (v πατέρας u στο DFS δέντρο) είναι γέφυρα αν **$low(u) > d(v)$** .

Τοπολογική Διάταξη

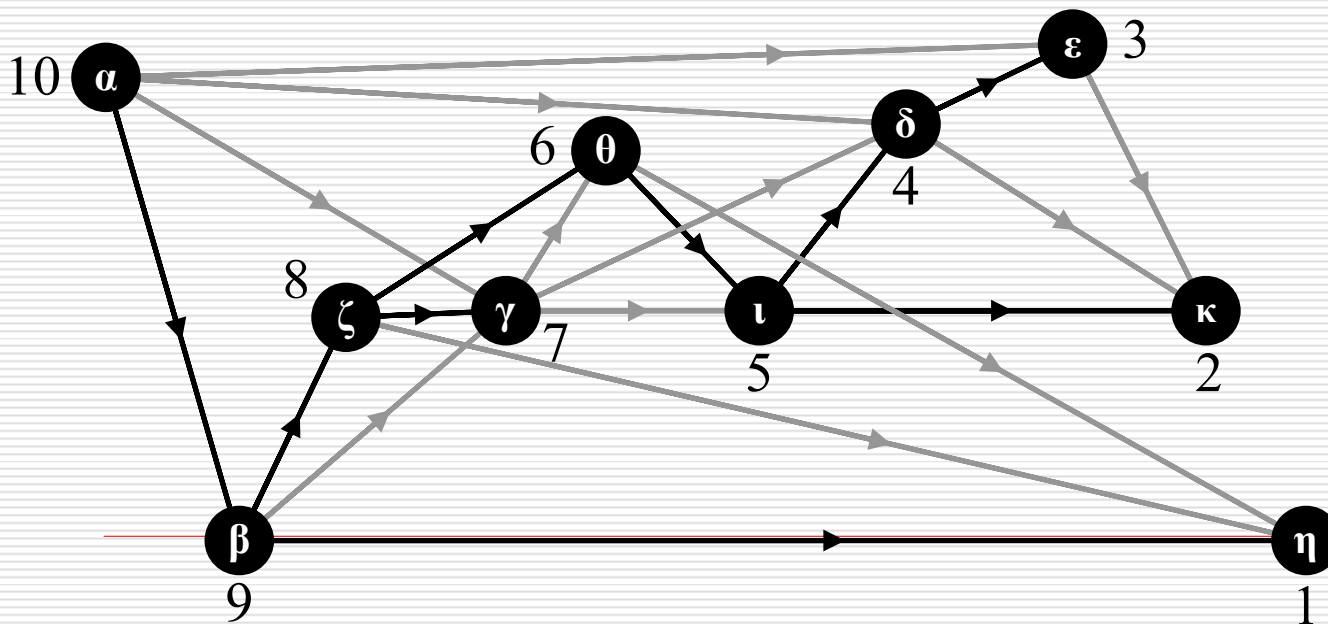
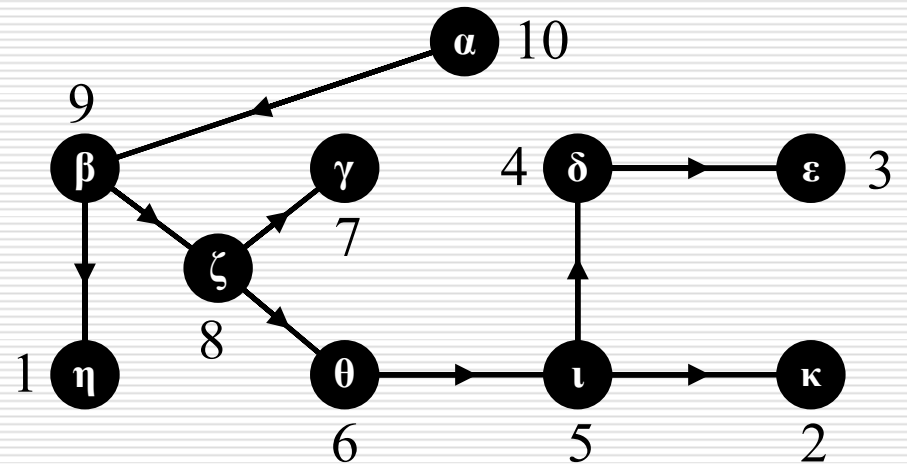
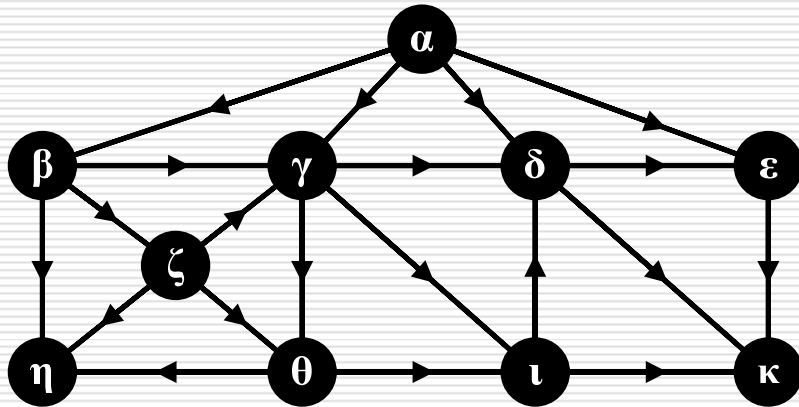
- **DAG** (Directed Acyclic Graph) αντιστοιχεί σε σχέση μερικής διάταξης:
 - Ακμή $(u, v) \Leftrightarrow u \leq v$ (δηλ. u «προηγείται» v).
 - Σειρά υπολογισμού αλγεβρικών παραστάσεων, π.χ.
$$(ac)x^2 + [(a + c)(b + d) - ac - bd]x + bd$$
 - Προγραμματισμός εργασιών σε σύνθετα έργα.
- Ύπαρξη κύκλου δεν συνάδει με «διάταξη», έστω μερική.
- DFS ελέγχει για ύπαρξη κύκλων και υπολογίζει «σειρά» κορυφών **συμβατή** με μερική διάταξη του DAG.
 - Τοπολογική διάταξη.

Τοπολογική Ταξινόμηση

- ... μετάθεση n κορυφών κατευθυνόμενου $G(V, E)$ ώστε
$$\forall (u, v) \in E, \pi(u) < \pi(v)$$
 - Δηλ. κορυφές σε ευθεία ώστε όλες οι ακμές να έχουν φορά από αριστερά προς τα δεξιά.
- Τοπολογική διάταξη αν γράφημα ακυκλικό (DAG).
 - Κορυφές σε φθίνουσα σειρά χρόνων αναχώρησης του DFS, δηλ. $f[v_1] > f[v_2] > \dots > f[v_n]$
 - Υλοποίηση με στοίβα:
Εξερευνημένη κορυφή μπαίνει στην ουρά.
 - Σειρά στην ουρά αντιστοιχεί σε τοπολογική διάταξη.
 - Χρόνος $\Theta(n+m)$.

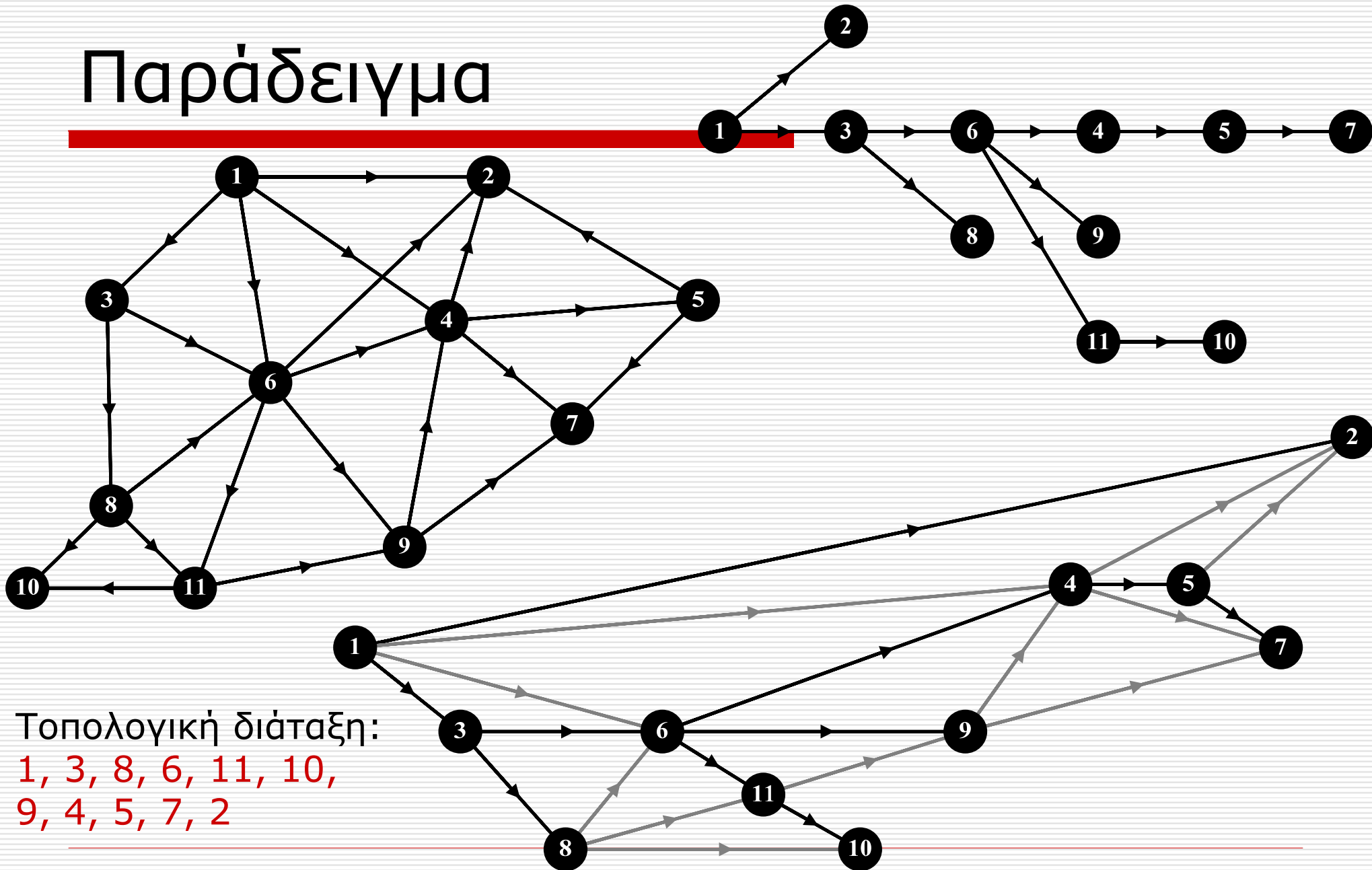


Παράδειγμα



Τοπολογική διάταξη:
α, β, ζ, γ, θ, ι, δ, ε, κ, η

Παράδειγμα



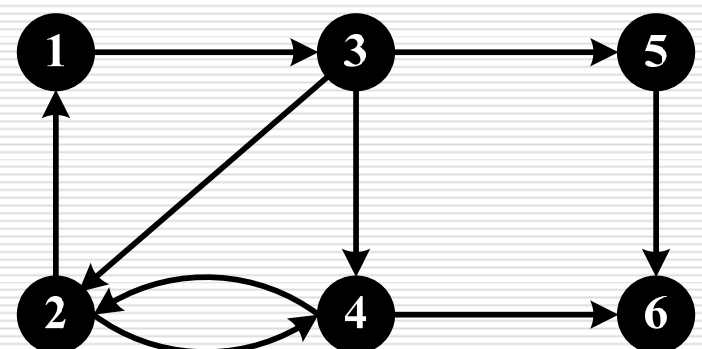
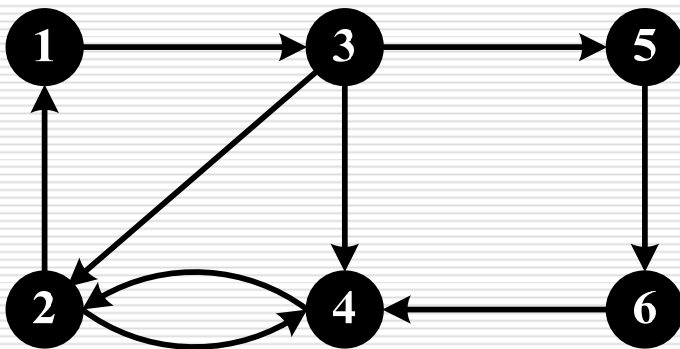
Τοπολογική διάταξη:
1, 3, 8, 6, 11, 10,
9, 4, 5, 7, 2

Τοπολογική Ταξινόμηση: Ορθότητα

- Έστω DAG $G(V, E)$. Θδο $\forall (u, v) \in E, f[u] > f[v]$.
 - Εξερεύνηση (u, v) συμβαίνει όταν $u \in Y_E$ και $v \in \text{Ανεξ. ή Εξερ.}$
 - Αν $v \in Y_E$, τότε (u, v) πίσω ακμή \Rightarrow κύκλος!
 - Αν $v \in \text{Εξερ.}$, τότε εξερεύνηση της v ολοκληρώθηκε πριν ολοκληρωθεί εξερεύνηση u , άρα $f[u] > f[v]$.
 - Αν $v \in \text{Ανεξ.}$, τότε v απόγονος της u στο DFS-δάσος.
 - Άρα $f[u] > f[v]$, γιατί πρώτα τίθεται $f[v]$ και μετά $f[u]$.
- Έστω σύστημα με n (πραγματικές) μεταβλητές x_1, \dots, x_n και m περιορισμούς της μορφής $x_i < x_j$.
 - Αλγόριθμος με χ.ε. $O(n+m)$ που υπολογίζει μια λύση του συστήματος ή αποφαινεται ότι το σύστημα δεν έχει λύση;

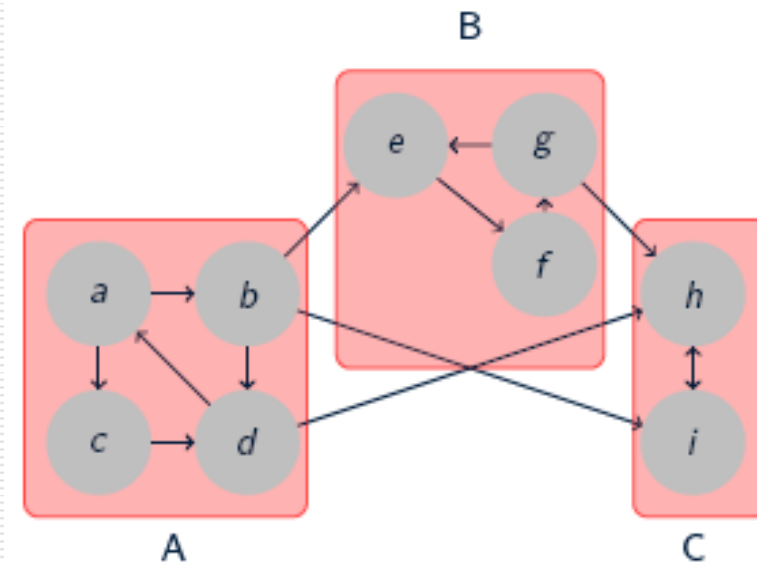
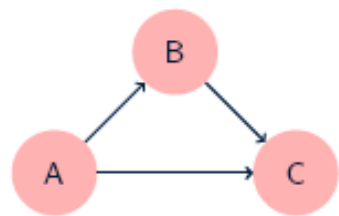
Ισχυρά Συνεκτικές Συνιστώσες

- Κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ **ισχυρά συνεκτικό** αν $\forall u, v \in V$, υπάρχουν $u - v$ και $v - u$ μονοπάτια.
 - Για κάθε ζευγάρι κορυφών ισχυρά συνεκτικού γραφήματος, υπάρχει κυκλική διαδρομή που τις περιλαμβάνει.
- Αν ένα κατευθυνόμενο γράφημα δεν είναι ισχυρά συνεκτικό, διαμερίζεται σε **ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες**:
 - Μεγιστικά ισχυρά συνεκτικά υπογραφήματα.
 - «Υπάρχουν μονοπάτια $u - v$ και $v - u$ »: **σχέση ισοδυναμίας**.



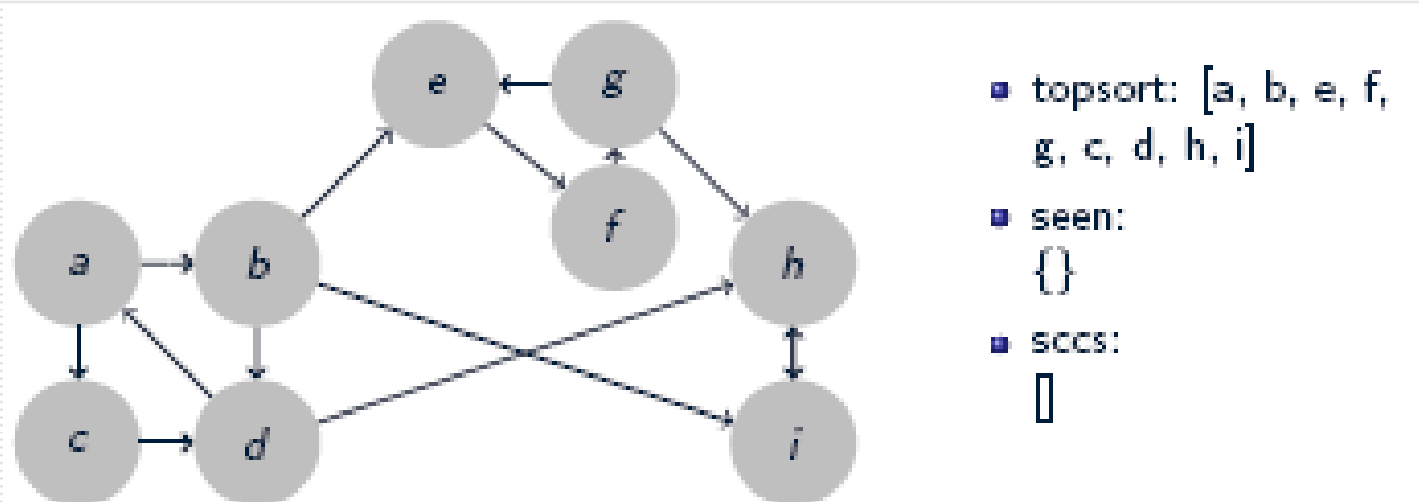
Ισχυρά Συνεκτικές Συνιστώσες

- (Κατευθυνόμενο) γράφημα **ισχυρά συνεκτικών συνιστωσών** έχει **κορυφή** για κάθε **ΙΣΣ** και **ακμή** (x, y) από **ΙΣΣ** x προς **ΙΣΣ** y ανν (αρχικά) υπάρχει **ακμή** (v, u) για $v \in x$ και $u \in y$.
 - Γράφημα ΙΣΣ είναι **ακυκλικό** (DAG) και μπορεί να ταξινομηθεί τοπολογικά.
 - Τι θα συμβεί αν ξεκινήσουμε **DFS** από **καταβόθρα** (τελευταία κορυφή στην τοπολογική διάταξη) του DAG των ΙΣΣ;



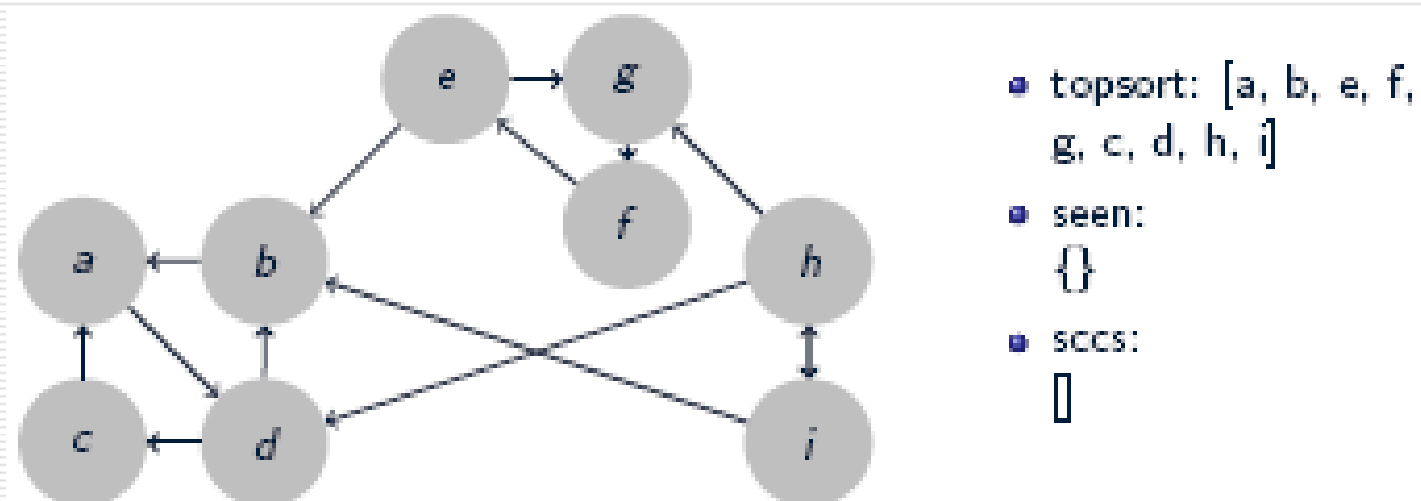
Υπολογισμός Ισχυρά Συνεκτικών Συνιστωσών

- Αλγόριθμος Kosaraju σε κατευθυνόμενο $G(V, E)$:
 - **Υπολόγισε** τοπολογική διάταξη με DFS (αγνοώντας τις πίσω ακμές).
 - Υπολόγισε το **ανάστροφο γράφημα G^T** (αντιστροφή κατεύθυνσης ακμών, G και G^T έχουν **ίδιες ΙΣΣ**).



Υπολογισμός Ισχυρά Συνεκτικών Συνιστωσών

- Αλγόριθμος Kosaraju σε κατευθυνόμενο $G(V, E)$:
 - Υπολόγισε **τοπολογική διάταξη** με DFS (αγνοώντας τις πίσω ακμές).
 - **Υπολόγισε** το **ανάστροφο γράφημα G^T** (αντιστροφή κατεύθυνσης ακμών, G και G^T έχουν **ίδιες ΙΣΣ**).
 - Εφαρμοσε **DFS σε G^T** με **σειρά** της **τοπολογικής διάταξης**.
 - Κάθε φορά που φτάνουμε σε αδιέξοδο: **νέα ΙΣΣ**.



Υπολογισμός Ισχυρά Συνεκτικών Συνιστωσών

- Υπολόγισε **τοπολογική διάταξη** με DFS (αγνοώντας τις πίσω ακμές).
- Υπολόγισε το **ανάστροφο γράφημα G^T** (αντιστροφή κατεύθυνσης ακμών, G και G^T έχουν **ίδιες ΙΣΣ**).
- **Εφαρμοσε DFS** σε G^T με σειρά της **τοπολογικής διάταξης**.
 - Κάθε φορά που φτάνουμε σε αδιέξοδο: **νέα ΙΣΣ**.

