

# Μέγιστη Ροή – Ελάχιστη Τομή

---

**Δημήτρης Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών  
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



# Δίκτυα και Ροές

□ **Δίκτυο** : κατευθυνόμενο γράφημα  $G(V, E)$ .

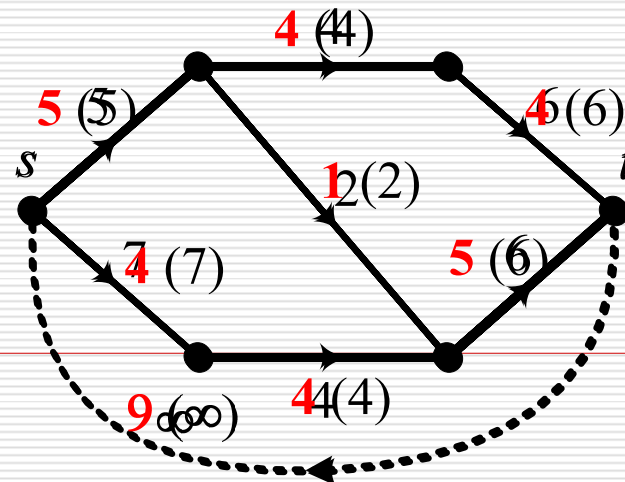
■ Πηγή  $s$ , προορισμός  $t$ , χωρητικότητα ακμής  $b_e$ .

□  $s - t$  ροή μεγέθους  $d$  :  $f : E \mapsto \mathbb{R}_+$  :

■ Χωρητικότητα:  $\forall e \in E \ f_e \leq b_e$

■ Διατήρηση ροής:  $\forall v \in V \ \sum_{e \in \text{in}(v)} f_e = \sum_{e \in \text{out}(v)} f_e$

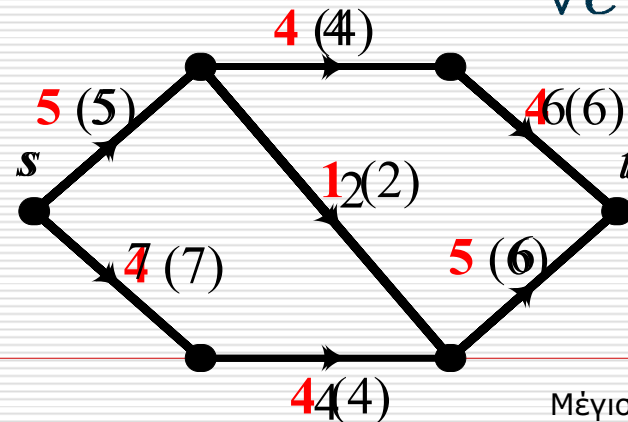
■ Μέγεθος:  $f_{ts} = d$



# Μέγιστη $s - t$ Ροή

- Πρόβλημα **Μέγιστης  $s - t$  Ροής** (Max-Flow):
  - Δεδομένου δικτύου  $G(V, E, s, t, b)$
  - Υπολόγισε  $s - t$  ροή με μέγιστη τιμή.

$$\begin{aligned} \max \quad & f_{ts} \\ \text{s.t.} \quad & f_e \leq b_e && \forall e \in E \\ & \sum_{e \in \text{in}(v)} f_e - \sum_{e \in \text{out}(v)} f_e \leq 0 && \forall v \in V \\ & f_e \geq 0 && \forall e \in E \end{aligned}$$



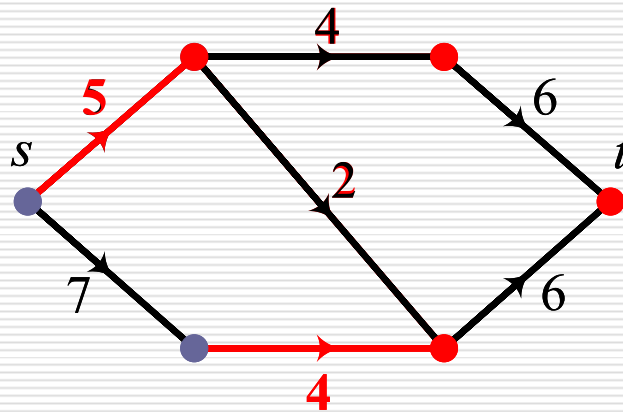
# $s - t$ Τομή

□  $s - t$  τομή χωρητικότητας  $d$  :

■ Διαμέριση  $(S, V \setminus S)$  με  $s \in S$  και  $t \in V \setminus S$ .

■ Χωρητικότητα  $b(S, V \setminus S) = \sum_{(u,v):u \in S, v \notin S} b_{uv} = d$

■ Ακμές χωρητικότητας  $d$  που χωρίζουν  $s$  από  $t$ .



# Ελάχιστη $s-t$ Τομή

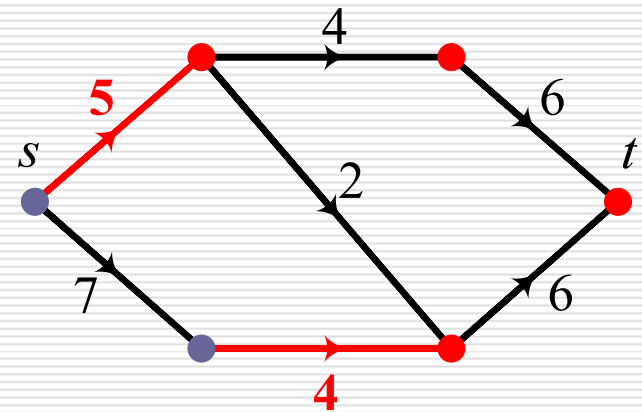
- Πρόβλημα **Ελάχιστης  $s - t$  Τομής** (Min  $s-t$  Cut):
  - Δεδομένου δικτύου  $G(V, E, s, t, b)$
  - Υπολόγισε  $s - t$  τομή με ελάχιστη χωρητικότητα.

$$\min \sum_{(u,v) \in E} d_{uv} b_{uv}$$

$$\text{s.t. } d_{uv} - p_u + p_v \geq 0 \quad \forall (u, v) \in E$$

$$p_s - p_t \geq 1$$

$$d_{uv}, p_v \geq 0$$



# Ροές και Τομές

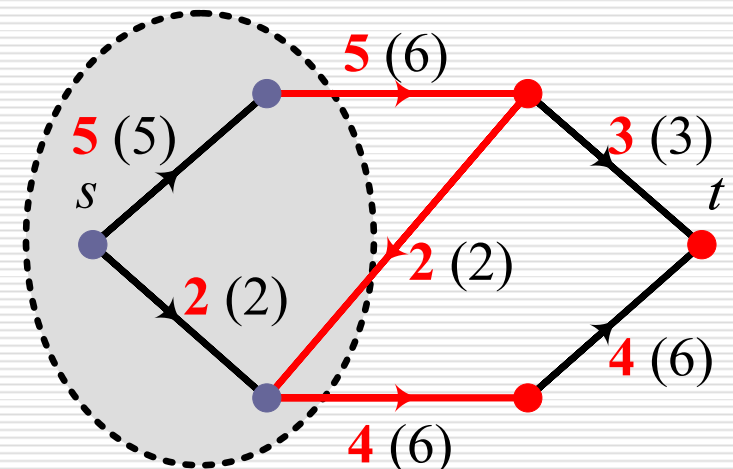
- Έστω ροή  $f$  και τομή  $(S, V \setminus S)$ .

$$f(S, V \setminus S) = \sum_{v \in S, u \notin S} f_{vu} - \sum_{v \in S, u \notin S} f_{uv}$$

- Κάθε  $s - t$  ροή  $f$  και  $s - t$  τομή  $(S, V \setminus S)$ :

$$f_{ts} = f(S, V \setminus S) \leq b(S, V \setminus S)$$

- **Μέγιστη  $s - t$  ροή**  
 **$\leq$  ελάχιστη  $s - t$  τομή.**

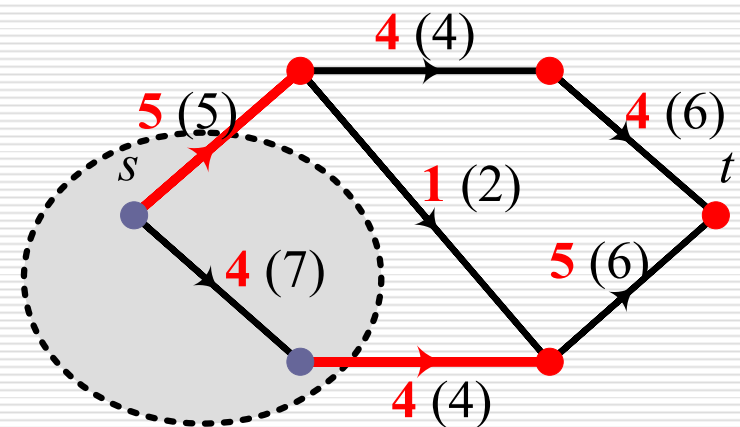


# Μέγιστη Ροή και Ελάχιστη Τομή

## □ Μέγιστη $s - t$ ροή = Ελάχιστη $s - t$ τομή!

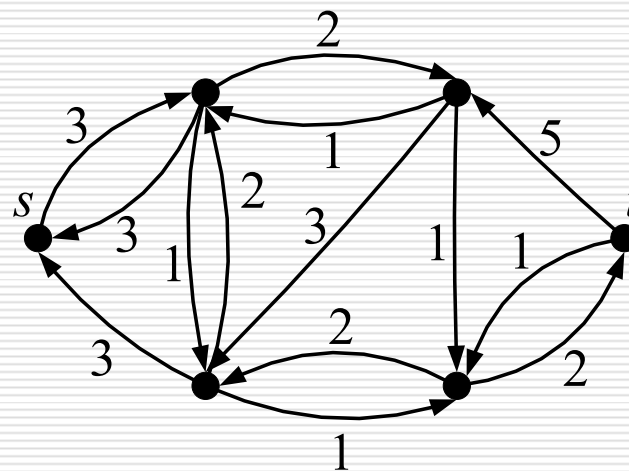
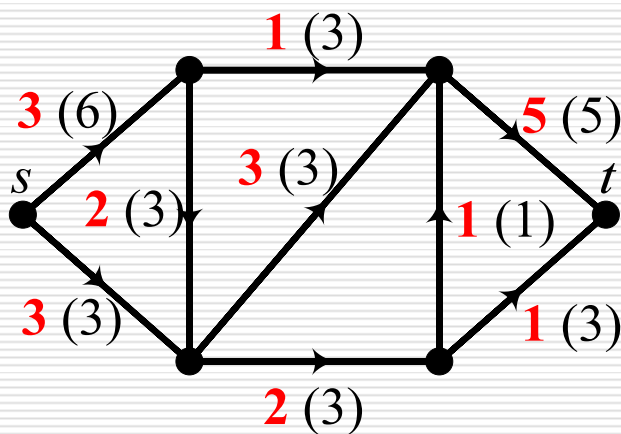
- Max-Flow – Min-Cut Θεώρημα.
- Ακμές ελάχιστης τομής  
κορεσμένες σε μέγιστη ροή.

## □ Μέγιστη ροή, ελάχιστη τομή: συνεκτικότητα / μεταφορική ικανότητα δικτύου.



# Υπολειμματικό Δίκτυο

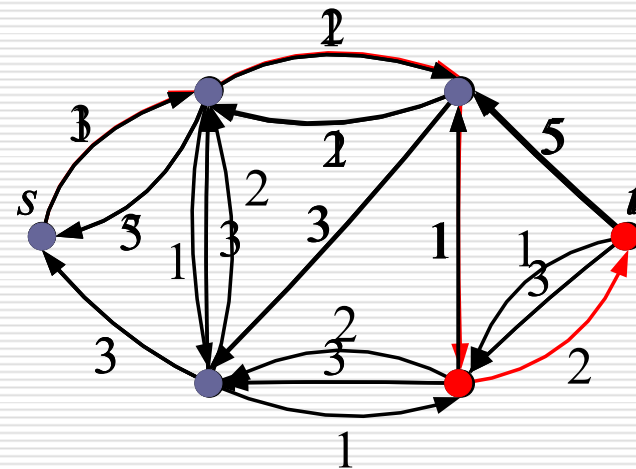
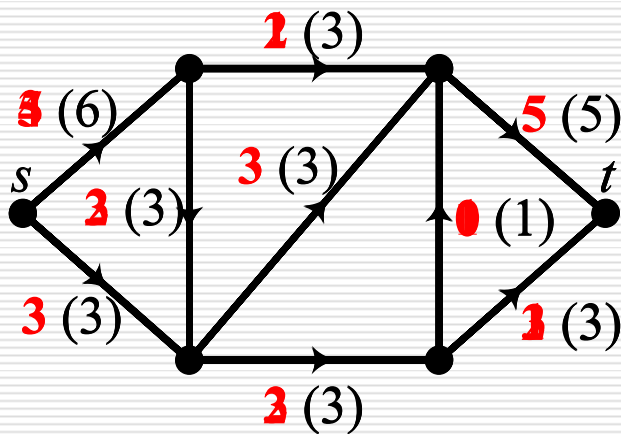
- Δίκτυο  $G(V, E, b)$  και ροή  $f$ .
- Υπολειμματικό δίκτυο  $G_f(V, E_f, r_f)$  :
  - Χωρητικότητα (μπρος-ακμές):  $\forall(u, v) \in E \ r_{uv} = b_{uv} - f_{uv}$
  - Ροή (πίσω-ακμές):  $\forall(u, v) \in E \ r_{vu} = f_{uv}$
- $s - t$  μονοπάτι στο υπολειμματικό: **επαυξητικό μονοπάτι.**





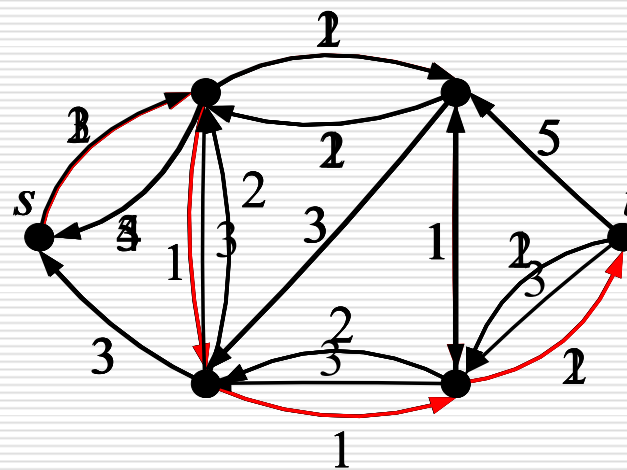
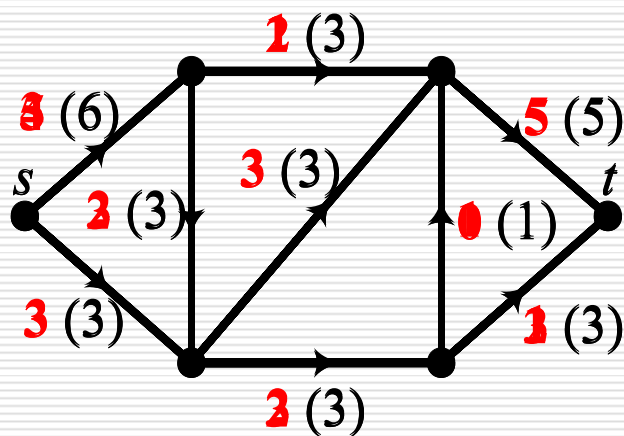
# Χαρακτηρισμός Μέγιστης Ροής

- Μέγιστη ροή ανν όχι επαυξητικό μονοπάτι.
- Επαυξητικό μονοπάτι  $\Rightarrow$  αύξηση ροής  $\Rightarrow$  όχι μέγιστη ροή.
- Όχι επαυξητικό μονοπάτι :
  - Κορυφές προσπελάσιμες από  $s$  ορίζουν τομή χωρητικότητας ίσης με ροή.
  - Μέγιστη ροή και ελάχιστη τομή λόγω  $\Theta$ . Max-Flow-Min-Cut!



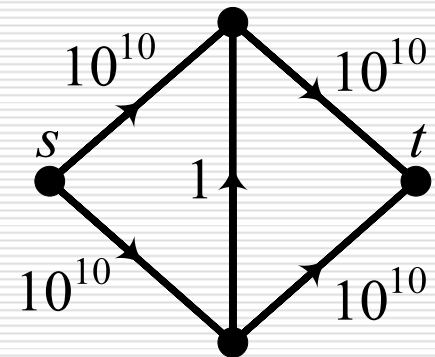
# Αλγόριθμος Ford-Fulkerson

- Ενόσω **επαυξητικό μονοπ.  $p$**  στο υπολειμματικό,
  - Χωρητικότητα επαυξητικού  $\delta \leftarrow \min_{e \in p} \{r_e\}$
  - **Αύξηση ροής κατά  $\delta$**  στο  $p$  και ενημέρωση υπολειμματικού δικτύου.
- Επαυξητικό μονοπάτι με π.χ. **DFS, BFS**.
  - Επαύξηση σε χρόνο  $O(m)$ .



# Χρόνος Εκτέλεσης

- **Ακέραιες χωρητικότητες  $\leq U$ :**
  - Επαύξηση αυξάνει ροή τουλάχιστον κατά 1.
  - Χρόνος εκτέλεσης  $O(m^2 U)$ .
- Δίκτυο με ακέραιες χωρητικότητες έχει **ακέραιη μέγιστη ροή**.
- Μπορεί εκθετικός χρόνος για **μεγάλες χωρητικότητες !**
- Μπορεί να **μην τερματίσει** για **άρρητες χωρητικότητες**.



# Βελτιώσεις Edmonds-Karp

---

- Επαυξητικό μονοπάτι με **μέγιστη χωρητικότητα**.
  - $2m$  επαυξήσεις  $\Rightarrow$  **μέγιστη χωρητικότητα στο μισό**.
  - Αντί «μέγιστης», «αρκετά μεγάλης» χωρητικότητας:
    - Υπολειμματικό γράφημα μόνο με **χωρητικότητες  $\geq \Delta$** .
    - Αν όχι επαυξητικό μονοπάτι,  $\Delta \leftarrow \Delta / 2$ .
  - Χρόνος εκτέλεσης  $O(m^2 \log U)$ .
- Επαυξητικό μονοπάτι **ελάχιστου μήκους** (ακμών).
  - Υπολογισμός με BFS σε χρόνο  $O(m)$ .
  - #επαυξήσεων  $O(nm)$ , χρόνος εκτέλεσης  $O(nm^2)$ .
  - Βελτίωση Dinic: υπολογισμός με BFS σε **χρόνο  $O(n)$** !
    - Χρόνος εκτέλεσης  $O(n^2 m)$ .
- Καλύτεροι αλγόριθμοι με **blocking-flow** και **push-relabel** τεχνικές έχουν χρόνους  **$O(nm \log n)$**  και  **$O(n^3)$**  αντιστ.

# Μέγιστο Ταίριασμα

---

- Διμερές γράφημα: υπολογισμός **μέγιστου** αριθμού **ακμών χωρίς κοινά άκρα** (ταίριασμα).
- **Μέγιστη ροή**: πηγή  $s$ , προορισμός  $t$ , προσανατολισμός  $s \rightarrow t$ , **χωρητικότητα 1**.

