



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών

Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Διδάσκοντες: Δημήτρης Φωτάκης, Δώρα Σούλιου

1η Σειρά Προγραμματιστικών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 21/11/2019

Άσκηση 1: Ενοικίαση Αυτοκινήτου

Όπως κάθε χρόνο, έτσι και φέτος, θα διεξαχθεί το Διεθνές Συνέδριο Δυαδικής Αναζήτησης στη Χώρα των Αλγορίθμων! Επειδή το συνέδριο διεξάγεται στην πόλη της Επιλογής, που δεν έχει αεροδρόμιο, οι συνέδριοι ταξιδεύουν αεροπορικώς στην πόλη της Ταξινόμησης και από εκεί οδικώς την πόλη της Επιλογής. Ο δρόμος που συνδέει τις πόλεις της Ταξινόμησης και της Επιλογής είναι μια μεγάλη ευθεία μήκους D χιλιομέτρων. Μεταξύ των πόλεων της Ταξινόμησης και της Επιλογής, υπάρχουν K ενδιάμεσοι σταθμοί (μερικοί μπορεί να βρίσκονται πολύ κοντά μεταξύ τους) οι οποίοι αποτελούν και τα μοναδικά σημεία όπου μπορεί κάποιος να ανεφοδιάσει το αυτοκίνητό του με καύσιμα. Συγκεκριμένα, ο σταθμός j βρίσκεται σε απόσταση d_j χιλιόμετρα από την πόλη της Επιλογής.

Ο Δημήτρης μόλις προσγειώθηκε στο αεροδρόμιο στην πόλη της Ταξινόμησης και σχεδιάζει να ταξίδι του για την πόλη της Επιλογής, ώστε να προλάβει την εναρκτήρια ομιλία του συνεδρίου, που αρχίζει σε T λεπτά ακριβώς. Για το ταξίδι του, θα νοικιάσει ένα από τα N αυτοκίνητα που είναι διαθέσιμα στο αεροδρόμιο. Κάθε αυτοκίνητο i χαρακτηρίζεται από το κόστος ενοικίασης p_i και την χωρητικότητά του c_i σε καύσιμα. Κατά τα άλλα, τα αυτοκίνητα είναι τυποποιημένα. Όλα διαθέτουν δύο ρυθμούς λειτουργίας, τον *οικονομικό*, με τον οποίο καλύπτουν ένα χιλιόμετρο σε T_s λεπτά και καταναλώνουν C_s λίτρα καυσίμου το χιλιόμετρο, και τον *σπορ*, με τον οποίο καλύπτουν ένα χιλιόμετρο σε $T_f < T_s$ λεπτά και καταναλώνουν $C_f > C_s$ λίτρα καυσίμου το χιλιόμετρο. Ευτυχώς, τουλάχιστον, ο χρόνος εναλλαγής από τον ένα ρυθμό λειτουργίας στον άλλο είναι μηδενικός και ο οδηγός μπορεί να αλλάξει όσες φορές θέλει την λειτουργία του οχήματός του. Ο Δημήτρης αγαπάει τη σπορ οδήγηση και βιάζεται να φτάσει στον προορισμό του, αλλά θέλει να είναι σίγουρος ότι δεν θα μείνει από καύσιμα στη μέση της διαδρομής.

Ο Δημήτρης θέλει να γράψει ένα πρόγραμμα που υπολογίζει το ελάχιστο κόστος ενοικίασης αυτοκινήτου που μπορεί να καλύψει την απόσταση από την πόλη της Ταξινόμησης στην πόλη της Επιλογής σε χρόνο όχι μεγαλύτερο από T λεπτά.

Λεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμα αρχικά θα διαβάζει από το standard input τέσσερις θετικούς ακεραίους, το πλήθος N των διαθέσιμων αυτοκινήτων, το πλήθος K των ενδιάμεσων σταθμών, την απόσταση D των πόλεων της Ταξινόμησης και της Επιλογής σε χιλιόμετρα, και το χρονικό περιθώριο T που έχει στη διάθεσή του ο Δημήτρης για να ολοκληρώσει το ταξίδι του. Σε καθεμία από τις επόμενες N γραμμές, θα υπάρχουν δύο θετικοί ακέραιοι p_i και c_i που αντιστοιχούν στο κόστος ενοικίασης και την χωρητικότητα του αυτοκινήτου i (η αρίθμηση των αυτοκινήτων είναι αυθαίρετη, ενώ μπορεί να υπάρχουν αυτοκίνητα i και j με $p_i > p_j$ και $c_i < c_j$). Στην επόμενη γραμμή, θα υπάρχουν K θετικοί ακέραιοι αριθμοί d_1, \dots, d_K που αντιστοιχούν στις αποστάσεις (σε χιλιόμετρα) των ενδιάμεσων σταθμών από την αρχική πόλη της Ταξινόμησης (η αρίθμηση των ενδιάμεσων σταθμών είναι αυθαίρετη, ενώ μπορεί να υπάρχουν σταθμοί $i \neq j$ με $d_i = d_j$). Στην τελευταία γραμμή της εισόδου, θα υπάρχουν τέσσερις θετικοί ακέραιοι T_s, C_s, T_f, C_f που αντιστοιχούν στην χρονική απόδοση και την κατανάλωση του οικονομικού και του σπορ ρυθμού λειτουργίας αντίστοιχα.

Λεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμα πρέπει να τυπώνει στο standard output έναν ακέραιο, το ελάχιστο κόστος ενοικίασης αυτοκινήτου που μπορεί να καλύψει την απόσταση από την πόλη της Ταξινόμησης

στην πόλη της Επιλογής σε χρόνο όχι μεγαλύτερο από T λεπτά. Στην περίπτωση που δεν υπάρχει τέτοιο αυτοκίνητο, το πρόγραμμα πρέπει να τυπώνει -1 .

Περιορισμοί:	Παράδειγμα Εισόδου:	Παράδειγμα Εξόδου:
$1 \leq N \leq 4 \cdot 10^5$	3 1 8 10	10
$1 \leq K \leq 2 \cdot 10^5$	10 8	
$1 \leq D, p_i, c_i \leq 10^9$	5 7	
$1 \leq T \leq 2 \cdot 10^9$	11 9	
$0 < d_j < D$	3	
$1 \leq T_f < T_s \leq 2 \cdot 10^9$	2 1 1 2	
$1 \leq C_s < C_f \leq 10^9$		
Όριο χρόνου εκτέλεσης: 1 sec.		
Όριο μνήμης: 64MB.		

Άσκηση 2: Πολεοδομικό Τέλος

Η κεντρική λεωφόρος στην πρωτεύουσα της Χώρας των Αλγορίθμων αναπτύσσεται ραγδαία! Έχουν ήδη κτιστεί N πανύψηλοι ουρανοξύστες, που τη διαχείρισή τους έχει μία μόνο εταιρεία.

Προσπαθώντας να ελέγξει την τάση ανέγερσης όλο και ψηλότερων κτηρίων, το Υπουργείο Χωροταξίας αποφάσισε να επιβάλει ένα ιδιότυπο πολεοδομικό τέλος στους ουρανοξύστες της κεντρικής λεωφόρου. Το συνολικό ποσό θα υπολογιστεί με βάση έναν ουρανοξύστη που θα επιλεγεί από τον Υπουργό. Αν υποθέσουμε ότι επιλέγεται ο k -οστός ουρανοξύστης, το τέλος που αναλογεί στον ουρανοξύστη i θα είναι ανάλογο του ύψους του ψηλότερου ουρανοξύστη στο τμήμα της λεωφόρου από τον ουρανοξύστη i μέχρι και τον ουρανοξύστη k . Το τέλος που αναλογεί στον ουρανοξύστη k θα είναι ανάλογο του ύψους του. Η εταιρεία που διαχειρίζεται τους ουρανοξύστες θα πρέπει να πληρώσει το συνολικό κόστος για όλους τους ουρανοξύστες.

Ο Πρόεδρος της εταιρείας προσπαθεί να βρει (και να πιέσει τον Υπουργό να επιλέξει ως βάση για τον υπολογισμό του τέλους) τον ουρανοξύστη που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος. Σας ζήτησε λοιπόν να γράψετε ένα πρόγραμμα που υπολογίζει το ελάχιστο συνολικό κόστος για την εταιρεία του.

Λεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμα αρχικά θα διαβάξει από το standard input έναν θετικό ακέραιο, το πλήθος N των ουρανοξυστών. Στη συνέχεια, το πρόγραμμα θα διαβάξει N θετικούς ακέραιους, χωρισμένους με κενό. Ο i -οστος ακέραιος αντιστοιχεί στο ύψους H_i του ουρανοξύστη i .

Λεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμα πρέπει να τυπώνει στο standard output έναν θετικό ακέραιο, το ελάχιστο συνολικό κόστος που πρέπει να πληρώσει η εταιρεία για όλους τους ουρανοξύστες¹. Σημειώστε ότι το ελάχιστο συνολικό κόστος (καθώς και κάποια από τα ενδιάμεσα αποτελέσματα που χρειάζονται για τον υπολογισμό του) μπορεί να υπερβαίνουν το 2^{32} .

Περιορισμοί:	Παράδειγμα Εισόδου:	Παράδειγμα Εξόδου:
$1 \leq N \leq 10^6$	7	28
$1 \leq H_i \leq 10^9$	3 4 1 5 2 3 3	
Όριο χρόνου εκτέλεσης: 1 sec.		
Όριο μνήμης: 64MB.		

¹ **Εξήγηση παραδείγματος:** Το ελάχιστο κόστος επιτυγχάνεται αν επιλέξουμε ως βάση υπολογισμού τον 5ο ουρανοξύστη, με ύψος 2. Τότε το τέλος για καθέναν από τους πρώτους τέσσερις ουρανοξύστες είναι 5, το τέλος για τον 5ο είναι 2, και το τέλος για καθέναν από τους δύο τελευταίους ουρανοξύστες είναι 3. Το συνολικό κόστος είναι 28.