Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών

Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Διδάσκοντες: Δημήτρης Φωτάκης, Δώρα Σούλιου

3η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 12/1/2020

Άσκηση 1: Ο Άγιος Βασίλης και τα Χρυσά Κλειδιά

Φέτος ο Άγιος Βασίλης στάθηκε πραγματικά γενναιόδωρος! Το δώρο σας ήταν η μοναδική συλλογή από m χρυσά κλειδιά, που πάντα ονειρευόσαστε, τα οποία φρόντισε να αφήσει κλειδωμένα μέσα σε n κουτιά ασφαλείας κάτω από το Χριστουγεννιάτικο δέντρο. Δίπλα στα n κουτιά, υπήρχε ένα μαγικό σφυρί και ένα σημείωμα που εξηγούσε ότι τα n κουτιά ασφαλείας ανοίγουν με τα m χρυσά κλειδιά που είναι κλειδωμένα μέσα σε αυτά! Κάθε κλειδί ξεκλειδώνει το πολύ ένα κουτί, και κάθε κουτί ανοίγει με κανένα, ένα ή περισσότερα κλειδιά. Στην πίσω σελίδα, υπήρχαν λεπτομερείς οδηγίες σχετικά με το ποια κουτιά μπορείτε να ανοίξετε με το κλειδί (ή τα κλειδιά) που είναι κλειδωμένα σε κάθε κουτί (π.χ., το κλειδί που βρίσκεται στο κουτί i ανοίγει τα κουτιά j_1, j_2 και j_3 ή το κλειδί στο κουτί i' δεν ανοίγει κανένα κουτί ή το κλειδί στο κουτί i'' ανοίγει το κουτί i'').

Θα μπορούσατε, βέβαια, να σπάσετε όλα τα n κουτιά χρησιμοποιώντας το μαγικό σφυρί και να ανακτήσετε τα m χρυσά κλειδιά που είναι κλειδωμένα μέσα σε αυτά. Όμως θέλετε να κρατήσετε όσο το δυνατόν περισσότερα από τα n κουτιά που σας άφησε ο Άγιος Βασίλης. Θέλετε λοιπόν να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει ποια κουτιά πρέπει να σπάσετε και τη σειρά με την οποία πρέπει να ξεκλειδώσετε τα υπόλοιπα, ώστε να ανακτήσετε όλα τα m χρυσά κλειδιά και να μείνουν άθικτα όσο το δυνατόν περισσότερα από τα n κουτιά. Επειδή κανείς δεν παίζει με τα δώρα του Άγιου Βασίλη, είστε αποφασισμένοι να αιτιολογήσετε προσεκτικά την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας, πριν τον χρησιμοποιήσετε στην πράξη.

Άσκηση 2: Μακρύτερο Μονοπάτι σε Δέντρο

Θεωρούμε ένα δέντρο $T(V, E)$ που αναπαρίσταται με λίστα γειτνίασης. Σε κάθε κορυφή u του T έχουμε ένα (ενδεχομένως αρνητικό) βάρος $w(u) \in \mathbb{Z}$ (π.χ., το $w(u)$ θα μπορούσε να είναι το κέδρος ή η ζημιά ενός πωλητή που επισκέπτεται την κορυφή u). Θέλουμε να υπολογίσουμε ένα (απλό) μονοπάτι p με μέγιστο συνολικό βάρος κορυφών $w(p) = \sum_{u \in p} w(u)$. Να διατυπώσετε έναν αλγόριθμο *γραμμικού χρόνου* για αυτό το πρόβλημα. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

Άσκηση 3: Κλέφτες και Αστυνόμοι

Οι φίλοι σας, Κώστας και Ανδρέας, έχουν τελευταία παθιαστεί με ένα καινούργιο επιτραπέζιο που θυμίζει το παιδικό παιχνίδι "Κλέφτες και Αστυνόμοι". Το παιχνίδι βασίζεται σε ένα χάρτη, στη μορφή ενός απλού συνεκτικού μη κατευθυνόμενου γραφήματος $G(V, E)$ με μια διακεκριμένη κορυφή $d \in V$, το *καταφύγιο*. Το παιχνίδι έχει έναν φαντεζί μηχανισμό που καθορίζει μια τυχαία αρχική κορυφή $t \in V$ για τον Κώστα (που υποδύεται πάντα τον "κλέφτη") και μια (διαφορετική) τυχαία αρχική κορυφή $p \in V$ για τον Ανδρέα (που υποδύεται πάντα τον "αστυνόμο"). Ο Κώστας και ο Ανδρέας τοποθετούν τα πιόνια τους στις αντίστοιχες αρχικές κορυφές και το παιχνίδι ξεκινά. Οι παίκτες παίζουν εναλλάξ, με τον Κώστα να έχει πάντα την πρώτη κίνηση. Σε κάθε γύρο, ο παίκτης που έχει σειρά πρέπει να μετακινήσει το πιόνι του από την κορυφή u, όπου αυτό βρίσκεται, σε όποια γειτονική κορυφή της u επιθυμεί (το πιόνι δεν μπορεί να παραμείνει στάσιμο στη u). Ένας επιπλέον περιορισμός είναι ότι ο Ανδρέας δεν μπορεί να μετακινήσει το πιόνι του στο καταφύγιο. Ο Κώστας κερδίζει το παιχνίδι αν καταφέρει να φτάσει στο καταφύγιο d, πριν ο Ανδρέας προλάβει να βρεθεί στην ίδια κορυφή με αυτόν. Ο Ανδρέας κερδίζει το παιχνίδι αν βρεθεί στην ίδια κορυφή με τον Κώστα, πριν ο Κώστας φτάσει στο καταφύγιο. Αν σε κάποιο γύρο επαναληφθεί η θέση κάποιου προηγούμενου γύρου, το παιχνίδι ολοκληρώνεται με ισοπαλία.

Θαυμάζετε βέβαια την τελειότητα που έχουν κατακτήσει οι φίλοι σας σε αυτό το παιχνίδι. Έχετε διαπιστώσει ότι τόσο ο Κώστας όσο και ο Ανδρέας επιλέγουν πάντα με βέλτιστο τρόπο την επόμενή τους κίνηση. Αλλά αυτό κάνει το παιχνίδι απολύτως προβλέψιμο, και έχετε κουραστεί να τους παρακολουθείτε. Για να τους αποδείξετε ότι το παιχνίδι είναι προβλέψιμο (επειδή ακριβώς και οι δύο παίζουν πλέον βέλτιστα), θέλετε να υπολογίσετε το αποτέλεσμα του παιχνιδιού για κάθε πιθανό ζευγάρι αρχικών κορυφών (t, p), $t \neq p$. Ελπίζετε ότι αν οι φίλοι σας δουν τα αποτελέσματα, θα χάσουν το ενδιαφέρον τους για το παιχνίδι, και θα βγείτε και καμιά βόλτα.

Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει το αποτέλεσμα του παιχνιδιού για κάθε πιθανό ζευγάρι αρχικών κορυφών (t, p), $t \neq p$. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας. *Υπόδειξη:* Μπορούμε να καταγράψουμε όλες τις καταστάσεις του παιχνιδιού ως (θέση Κώστα, θέση Ανδρέα, επόμενος παίκτης) και να βρούμε όλες τις πιθανές επόμενες καταστάσεις για κάθε κατάσταση.

Άσκηση 3: Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο με Περιορισμούς

Θεωρούμε ένα συνεκτικό μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, w)$, με n κορυφές, m ακμές και θετικά βάρη w στις ακμές. Θέλουμε να υπολογίσουμε ένα Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο $T^*(s, k)$ του G στο οποίο μια συγκεκριμένη κορυφή s έχει βαθμό ίσο με k (θεωρούμε ότι $k \geq 1$ και ότι το k δεν ξεπερνά τον βαθμό της s στο G, οπότε το G έχει ένα τέτοιο συνδετικό δέντρο).

(α) Να δείξετε ότι η άπληστη στρατηγική, η οποία συμπεριλαμβάνει στο συνδετικό δέντρο τις k ακμές μικρότερου βάρους που προσπίπτουν στην s, δεν οδηγεί πάντα στη βέλτιστη λύση.

(β) Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει ένα Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο $T^*(s, k)$ στο οποίο η κορυφή s έχει βαθμό ίσο με k. Να αιτιολογήσετε αναλυτικά την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

Άσκηση 4: Αλγόριθμος Boruvka

Θεωρούμε ένα συνεκτικό μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, w)$, με n κορυφές, m ακμές και θετικό βάρος $w(e)$ σε κάθε ακμή $e \in E$, όπου τα βάρη των ακμών είναι όλα διαφορετικά μεταξύ τους.

(α) Να δώσετε μια πλήρη (και αναλυτική) απόδειξη ορθότητας για τον αλγόριθμο Boruvka. Ειδικότερα, να δείξετε ότι (i) ο αλγόριθμος Boruvka καταλήγει πάντα σε ένα συνδετικό δέντρο T, και (ii) ότι το συνδετικό δέντρο T στο οποίο καταλήγει ο αλγόριθμος είναι πράγματι ελάχιστου βάρους.

(β) Να περιγράψετε λεπτομερώς μια υλοποίηση του αλγόριθμου με χρόνο εκτέλεσης $O(m \log n)$.

(γ) Να εξηγήσετε πως μπορούμε να συνδυάσουμε την παραπάνω υλοποίηση του αλγόριθμου Boruvka με την υλοποίηση του αλγόριθμου Prim με σωρό Fibonnaci ώστε να επιτύχουμε χρόνο εκτέλεσης $O(m \log\log n)$ για το πρόβλημα του Ελάχιστου Συνδετικού Δέντρου.

(δ) Καλούμε *σύμπτυξη* (contraction) μια ακμής $e = \{u, v\}$ ενός (απλού μη κατευθυνόμενου) γραφήματος G τη διαδικασία κατά την οποία προσθέτουμε στο G μια νέα κορυφή uv, "μετακινούμε" κάθε ακμή που προσπίπτει στην u ή στην v (εκτός από την e) ώστε να προσπίπτει στη νέα κορυφή uv, διαγράφουμε τις κορυφές u και v και την ακμή e, και καθιστούμε το γράφημα που προκύπτει απλό (αν δεν είναι ήδη).

Λέμε ότι μια κλάση $\mathcal{C}$ απλών μη κατευθυνόμενων γραφημάτων είναι *βολική* αν (i) η $\mathcal{C}$ είναι κλειστή ως προς τη σύμπτυξη ακμής (δηλ. για κάθε $G \in \mathcal{C}$, το γράφημα που προκύπτει από την σύμπτυξη μιας οποιασδήποτε ακμής του G ανήκει επίσης στην $\mathcal{C}$), και (ii) το πλήθος ακμών κάθε $G(V, E) \in \mathcal{C}$ είναι $O(|V|)$. Π.χ., η κλάση των απλών επίπεδων γραφημάτων είναι βολική.

Να δείξετε ότι ο αλγόριθμος Boruvka χρειάζεται χρόνο $O(|V|)$ για τον υπολογισμό του Ελάχιστου Συνδετικού Δέντρου ενός απλού μη κατευθυνόμενο γραφήματος $G(V, E, w)$ που ανήκει σε μια βολική κλάση γραφημάτων (π.χ., αν το G είναι απλό επίπεδο γράφημα).

Άσκηση 5: Μονοπάτια Ελάχιστου Bottleneck Κόστους για όλα τα Ζεύγη Κορυφών

Θεωρούμε ένα απλό συνεκτικό *μη κατευθυνόμενο* γράφημα $G(V, E, \ell)$, με n κορυφές, m ακμές και θετικό μήκος $\ell(e)$ σε κάθε ακμή $e \in E$. Αξιολογούμε τα μονοπάτια μεταξύ δύο κορυφών u, v με βάση το μήκος της βαρύτερης ακμής τους. Το (bottleneck) *κόστος* $c(p)$ ενός $u - v$ μονοπατιού p είναι $c(p) = \max_{e \in p}\{\ell(e)\}$. Το ζητούμενο είναι να υπολογίσουμε ένα (όσο το δυνατόν πιο αραιό) συνδετικό υπογράφημα του G που για κάθε ζευγάρι διαφορετικών κορυφών $u, v \in V$, περιέχει ένα $u - v$ μονοπάτι ελάχιστου κόστους.

(α) Έστω T^* ένα Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο του G. Να δείξετε ότι για κάθε ζευγάρι κορυφών $u, v \in V$, το μοναδικό $u - v$ μονοπάτι στο T^* αποτελεί ένα $u - v$ μονοπάτι ελάχιστου κόστους.

(β) Για κάθε ζευγάρι διαφορετικών κορυφών $u, v \in V$, συμβολίζουμε με p^*_{uv} ένα $u - v$ μονοπάτι ελάχιστου κόστους. Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει το συνολικό κόστος των μονοπατιών ελάχιστου κόστους για όλα τα ζευγάρια διαφορετικών κορυφών του G. Δηλαδή, ο αλγόριθμός σας πρέπει να υπολογίζει την ποσότητα $\sum_{u,v \in V, u \neq v} c(p^*_{uv})$. Να αιτιολογήσετε αναλυτικά την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας. *Υπόδειξη:* Δεν είναι απαραίτητο τα ελάχιστα κόστο $c(p^*_{uv})$ για όλα τα ζεύγη κορυφών στο G!