Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα
Διδάσκοντες: Δημήτρης Φωτάκης, Δώρα Σουλίου
3η Σειρά Προγραμματιστικών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 27/1/2020

Άσκηση 1: Αποστάσεις σε Δίκτυο με Εκθετικά Μήκη Ακμών

Η Επαρχία των Εκθετικών Αποστάσεων είναι μια ενδιαφέρουσα περιοχή της χώρας των Αλγορίθμων. Μεταξύ άλλων, χαρακτηρίζεται από ένα πολύ ιδιαίτερο οδικό δίκτυο. Αποτελείται από N πόλεις που συνδέονται μεταξύ τους με M δρόμους διπλής κατεύθυνσης. Το μήκος κάθε δρόμου είναι μια διαφορετική δύναμη του 2, με τον συντομότερο δρόμο να έχει μήκος 2^0 km και τον μακρύτερο δρόμο να έχει μήκος 2^{M-1} km. Από τότε που μάθατε για το οδικό δίκτυο της Επαρχίας των Εκθετικών Αποστάσεων, δεν μπορείτε να σταματήσετε να το σκέφτεστε! Θέλετε να καταλάβετε τη δομή των συντομότερων διαδρομών μεταξύ των πόλεων, πως αυτές μπορούν να υπολογιστούν αποδοτικά, ποιος είναι ο ευκολότερος τρόπος για να τις αναπαραστήσετε, και πόσες ακμές συνολικά θα χρησιμοποιηθούν.

Ως πρώτο βήμα, θέλετε να γράψετε ένα πρόγραμμα που υπολογίζει το άθροισμα του μήκους των συντομότερων διαδρομών για όλα τα ζευγάρια πόλεων. Αφού το μήκος κάθε δρόμου είναι μια διαφορετική δύναμη του 2, το μήκος κάθε συντομότερης διαδρομής μπορεί να γραφεί φυσιολογικά στο δυαδικό σύστημα. Καλύτερα λοιπόν το πρόγραμμά σας να υπολογίζει την (ενδεχομένως πολύ μεγάλη!) δυαδική αναπαράσταση του συνολικού μήκους των συντομότερων διαδρομών για όλα τα ζευγάρια πόλεων.

Δεδομένα Εισόδου: Το πρόγραμμά σας θα διαβάζει από το standard input δύο θετικούς ακέραιους N και M που αντιστοιχούν στο πλήθος των πόλεων και στο πλήθος των δρόμων του οδικού δικτύου. Οι κόμβοι του δικτύου αριθμούνται από 1 μέχρι N. Σε κάθε μία από τις επόμενες M γραμμές, θα υπάρχουν τρεις φυσικοί αριθμοί a_e, b_e, c_e που δηλώνουν ότι ο δρόμος $e = \{a_e, b_e\}$, που συνδέει τις πόλεις a_e και b_e, έχει μήκος 2^{c_e}. Το οδικό δίκτυο είναι μη κατευθυνόμενο, θα είναι συνεκτικό και δεν θα περιέχει ανακυκλώσεις ή πολλαπλές ακμές. Τα c_e θα είναι διαφορετικά μεταξύ τους.

Δεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμα σας πρέπει να τυπώνει στο standard output, σε μία μόνο γραμμή, τη δυαδική αναπαράσταση του συνολικού μήκους των συντομότερων διαδρομών για όλα τα ζευγάρια πόλεων[1]. Προσέξτε ότι για μεγάλες τιμές των N και M, το αποτέλεσμα μπορεί να έχει μήκος αρκετών χιλιάδων δυαδικών ψηφίων. Ένας τρόπος να αναπαραστήσετε το αποτέλεσμα είναι να διατηρείτε μια ακολουθία $(x_0, c_0), \ldots, (x_k, c_k), \ldots$, όπου το ζεύγος (x_k, c_k) δηλώνει ότι η ακμή μήκους 2^{c_k} περιέχεται x_k φορές στα συντομότερα μονοπάτια μεταξύ των πόλεων. Τελικά, το πρόγραμμά σας πρέπει να τυπώνει τη δυαδική αναπαράσταση του αθροίσματος $\sum_k x_k 2^{c_k}$.

Περιορισμοί:

$3 \leq N \leq 10^5$
$N - 1 \leq M \leq 2 \cdot 10^5$
$c_e \in \{0, 1, \ldots, M-1\}$
Όριο χρόνου εκτέλεσης: 1 sec.
Όριο μνήμης: 64 MB.

Παράδειγμα Εισόδου:

```
5 6
1 3 5
4 5 0
2 1 3
3 2 1
4 3 4
4 2 2
```

Παράδειγμα Εξόδου:

```
1000100
```

[1] **Εξήγηση Παραδείγματος:** Υπολογίζοντας τα συντομότερα μονοπάτια μεταξύ όλων των 10 ζευγαριών πόλεων, βρίσκουμε ότι η ακμή $\{4, 5\}$, μήκους $2^0 = 1$, συμμετέχει σε 4 από αυτά, η ακμή $\{2, 3\}$, μήκους $2^1 = 2$, συμμετέχει επίσης σε 4, η ακμή $\{2, 4\}$, μήκους $2^2 = 4$, συμμετέχει σε 6, και η ακμή $\{1, 2\}$, μήκους $2^3 = 8$, συμμετέχει σε 4. Οι υπόλοιπες ακμές δεν συμμετέχουν σε κανένα συντομότερο μονοπάτι. Το άθροισμα του μήκους των συντομότερων διαδρομών για όλα τα ζευγάρια πόλεων είναι $4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot 4 + 4 \cdot 8 = 68$, η δυαδική αναπαράσταση του οποίου είναι 1000100.

Άσκηση 2: Υποβρύχιο Τρίτων

Είναι μια ακόμα συνηθισμένη μέρα στο υποβρύχιο Τρίτων, μέχρι να χτυπήσει ξαφνικά το τηλέφωνο του Σημαιοφόρου βάρδιας. Στην άλλη άκρη της γραμμής βρίσκεται ο Υπασπιστής του Επιτελάρχη που απαιτεί να του σταλεί άμεσα 2ΚΡ σε τριγωνικό ραντάρ! Επικρατεί σύγχυση, καθώς κανένα από τα μέλη του πληρώματος δεν γνωρίζει τι είναι αυτό. Κανένα, εκτός βέβαια από εσάς, που ως έμπειρος τεχνικός, αναλαμβάνετε να εκπληρώσετε το αίτημα και να σώσετε την ημέρα!

Αφού λοιπόν ανοίξατε το τριγωνικό ραντάρ, εμφανίζεται μπροστά σας ένα πλέγμα διαστάσεων $N \times M$. Παρατηρώντας το πλέγμα, μπορείτε να διακρίνετε πιλοτικές διαβάσεις. Μια πιλοτική διάβαση είναι μια ακμή που συνδέει δύο κουτάκια του πλέγματος μεταξύ τους. Οι μόνες κινήσεις, που μπορεί να πραγματοποιήσει το υποβρύχιο, είναι να μετακινηθεί κατά ένα κουτάκι προς τα αριστερά ή κατά ένα κουτάκι προς τα πάνω. Αν το υποβρύχιο βρίσκεται σε κουτάκι από όπου ξεκινά πιλοτική διάβαση, τότε πρέπει υποχρεωτικά να χρησιμοποιήσει τη συγκεκριμένη πιλοτική διάβαση και να μετακινηθεί στο κουτάκι όπου αυτή καταλήγει. Οπότε, αν δεν θέλουμε το υποβρύχιο να ακολουθήσει μια πιλοτική διάβαση, τότε το υποβρύχιο δεν πρέπει να περάσει από κουτάκι όπου βρίσκεται η αρχή της διάβασης (διαφορετικά θα είναι υποχρεωμένο να την ακολουθήσει). Δεν υπάρχει κανένας περιορισμός στο να περάσει το υποβρύχιο από το κουτάκι όπου καταλήγει μια πιλοτική διάβαση.

Το περιεχόμενο του σήματος έχει σκοπό να επιβεβαιώσει ότι οι κινήσεις του υποβρυχίου δεν είναι εύκολα προβλέψιμες. Πρέπει λοιπόν να γράψουμε ένα πρόγραμμα που υπολογίζει το πλήθος όλων των μονοπατιών που ακολουθούν τους παραπάνω κανόνες, χρησιμοποιούν το πολύ X πιλοτικές διαβάσεις, και οδηγούν το υποβρύχιο από την αρχική του θέση, στο κάτω-αριστερά σημείο του πλέγματος (που στο Ναυτικό είναι το κουτάκι $(N-1, M-1)$), στην τελική του θέση, στο πάνω-δεξιά σημείο του πλέγματος (που στο Ναυτικό είναι το κουτάκι $(0,0)$). Το σήμα φυσικά θα περιέχει τον συνολικό αριθμό αυτών των μονοπατιών mod 1000000103, ώστε να μην ανησυχούμε για υποκλοπές.

Δεδομένα Εισόδου: Το πρόγραμμα θα διαβάζει από το standard input, στην πρώτη γραμμή, τους αριθμούς N, M, K και X. Σε καθεμία από τις επόμενες K γραμμές θα δίνεται ένα ζευγάρι μη-αρνητικών ακέραιων s και e, χωρισμένων με ένα κενό διάστημα, που ορίζουν μια πιλοτική διάβαση. Θεωρώντας ότι το κάτω-αριστερά κουτάκι έχει συντεταγμένες $(N-1, M-1)$ και το πάνω-δεξιά έχει συντεταγμένες $(0,0)$, το s δηλώνει ότι η πιλοτική διάβαση ξεκινά από το κουτάκι με συντεταγμένες $s.x = s/M$, $s.y = s \bmod M$ και καταλήγει στο κουτάκι με συντεταγμένες $e.x = e/M$, $e.y = e \bmod M$. Θα ισχύει ότι τα κουτάκια που αντιστοιχούν στα s και e θα βρίσκονται πάντα εντός πλέγματος. Θα ισχύει ακόμη ότι $s.x \geq e.x$ και $s.y \geq e.y$ (με τουλάχιστον μία από τις δύο ανισότητες να είναι αυστηρές) και ότι η αρχή και το τέλος μιας πιλοτικής διάβασης δεν συμπίπτουν με την αρχή ή το τέλος μιας άλλης.

Δεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμα σας θα τυπώνει στο standard output το πλήθος (mod 1000000103) όλων των μονοπατιών που χρησιμοποιούν το πολύ X πιλοτικές διαβάσεις και οδηγούν το υποβρύχιο από την αρχική του θέση, στο κάτω-αριστερά σημείο $(N-1, M-1)$, στην τελική του θέση, στο πάνω-δεξιά σημείο $(0,0)$. Να είστε προσεκτικοί για περιπτώσεις υπερχείλισης των ενδιάμεσων αποτελεσμάτων.

Περιορισμοί:

$2 \leq N, M \leq 180$
$0 \leq X \leq K \leq 100$
Όριο χρόνου εκτέλεσης: 1 sec.
Όριο μνήμης: 64 MB.

Παραδείγματα Εισόδου:	Παραδείγματα Εξόδου:
4 7 2 0 16 8 25 17	37
8 6 3 1 37 24 25 12 28 21	458