Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα
Διδάσκοντες: Δημήτρης Φωτάκης, Δώρα Σούλιου
4η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 16/2/2020

Άσκηση 1: Επιβεβαίωση και Αναπροσαρμογή Συντομότερων Μονοπατιών

Θεωρούμε ένα (ισχυρά συνεκτικό) κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, w)$ με n κορυφές, m ακμές, και (ενδεχομένως αρνητικά) μήκη w στις ακμές. Συμβολίζουμε με $d(u, v)$ την απόσταση των κορυφών u και v στο G.

(α) Δίνονται n αριθμοί $\delta_1, \dots, \delta_n$, όπου κάθε δ_k (υποτίθεται ότι) ισούται με την απόσταση $v_1 - v_k$ στο G. Να διατυπώσετε αλγόριθμο γραμμικού χρόνου που ελέγχει αν τα $\delta_1, \dots, \delta_n$ πράγματι ανταποκρίνονται στις αποστάσεις των κορυφών από την v_1, δηλαδή αν για κάθε $v_k \in V$, ισχύει ότι $\delta_k = d(v_1, v_k)$. Αν αυτό αληθεύει, ο αλγόριθμός σας πρέπει να υπολογίζει και να επιστρέφει ένα Δέντρο Συντομότερων Μονοπατιών με ρίζα τη v_1.

(β) Υποθέτουμε ότι έχουμε υπολογίσει τις αποστάσεις $d(v_i, v_j)$ μεταξύ κάθε (διατεταγμένου) ζεύγους κορυφών $(v_i, v_j) \in V \times V$. Στη συνέχεια, το μήκος μιας ακμής $e = (x, y)$ μειώνεται σε $w'(x, y) < w(x, y)$. Να διατυπώσετε αλγόριθμο με χρόνο εκτέλεσης $O(n^2)$ που αναπροσαρμόζει τις αποστάσεις μεταξύ όλων των κορυφών (εφόσον βέβαια η μείωση δεν δημιουργεί κύκλο αρνητικού μήκους!).

(γ) Τι αλλάζει, σε σχέση με το (β), αν το μήκος μιας ακμής $e = (x, y)$ αυξηθεί σε $w'(x, y) > w(x, y)$; Μπορείτε να επεκτείνετε τον αλγόριθμο του (β) σε αυτή την περίπτωση; Αν ναι, να περιγράψετε την επέκταση του αλγορίθμου, αν όχι, να εξηγήσετε συνοπτικά τις βασικές διαφορές / δυσκολίες.

Άσκηση 2: Σύστημα Ανισοτήτων

Έστω $x_1, \dots, x_n$ ακέραιες μεταβλητές. Θεωρούμε ένα σύστημα S αποτελούμενο από m ανισότητες της μορφής $x_i - x_j \leq b_{ij}$, για κάποια $1 \leq i, j \leq n$, όπου τα b_{ij} είναι ακέραιοι αριθμοί. Το S είναι ικανοποιήσιμο αν υπάρχουν ακέραιες τιμές για τις μεταβλητές $x_1, \dots, x_n$ που ικανοποιούν όλες τις ανισότητες του S.

(α) Να διατυπώσετε ένα κριτήριο για το αν το S είναι ικανοποιήσιμο (και να αποδείξετε την ορθότητα του κριτηρίου σας). Με βάση αυτό το κριτήριο, να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που διαπιστώνει αν το S είναι ικανοποιήσιμο ή όχι. Ποια είναι η υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας;

(β) Να συμπληρώσετε τον αλγόριθμο του (α) ώστε αν το σύστημα S είναι ικανοποιήσιμο, να υπολογίζει αποδεκτές τιμές για τις μεταβλητές $x_1, \dots, x_n$, διαφορετικά να υπολογίζει ένα ελάχιστο (ως προς το πλήθος ανισοτήτων) υποσύστημα S' που δεν είναι ικανοποιήσιμο. Ποια είναι η υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας στις δύο περιπτώσεις;

(γ) Θεωρούμε ότι κάθε ανισότητα $x_i - x_j \leq b_{ij}$ συνοδεύεται από ένα θετικό ακέραιο βάρος w_{ij}. Να διατυπώσετε αλγόριθμο που αν το σύστημα S δεν είναι ικανοποιήσιμο, υπολογίζει ένα ελάχιστου συνολικού βάρους υποσύστημα S' που δεν είναι ικανοποιήσιμο. Ποια είναι η υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας;

(δ) Να διατυπώσετε το πρόβλημα του (γ) ως πρόβλημα απόφασης, και να αποφανθείτε αν αυτό ανήκει στην κλάση $\mathbf{P}$ ή είναι $\mathbf{NP}$-πλήρες. Να αιτιολογήσετε κατάλληλα τον ισχυρισμό σας.

Άσκηση 3: Ταξιδεύοντας με Ηλεκτρικό Αυτοκίνητο

Θεωρούμε κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, w)$, με n κορυφές (ή πόλεις), m ακμές και θετικά μήκη $w : E \to \mathbb{N}_+$ στις ακμές, το οποίο αποτελεί μοντέλο του οδικού δικτύου μιας χώρας. Θέλουμε να ταξιδέψουμε από την πόλη s στην πόλη t. Το αυτοκίνητό μας είναι ηλεκτρικό και έχει αυτονομία α (δηλ. η απόσταση που διανύει το αυτοκίνητο μεταξύ δύο διαδοχικών φορτίσεων δεν μπορεί να ξεπερνά το α). Ευτυχώς σε κάποιες (όχι όλες τις) πόλεις υπάρχουν σταθμοί φόρτισης. Συγκεκριμένα, $C \subset V$ είναι το σύνολο των πόλεων που διαθέτουν σταθμό φόρτισης. Ευτυχώς, τουλάχιστον, οι πόλεις s και t διαθέτουν σταθμούς φόρτισης (δηλ. $s, t \in C$). Στα (α) και (β) παρακάτω, να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα των αλγορίθμων που θα διατυπώσετε.

(α) Εξετάζουμε αρχικά την περίπτωση που η αυτονομία του αυτοκινήτου μας είναι αρκετά μεγάλη, ώστε να μην απαιτείται ενδιάμεση φόρτιση για το ταξίδι μας από την s στην t. Θέλουμε όμως, στη διαδρομή, να επισκεφθούμε τουλάχιστον μία ακόμη πόλη με σταθμό φόρτισης, για να επιβεβαιώσουμε ότι οι σταθμοί φόρτισης στις ενδιάμεσες πόλεις είναι συμβατοί. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει το συντομότερο $s - t$ μονοπάτι που διέρχεται από τουλάχιστον μία πόλη του C διαφορετική από τις s και t (υποθέτουμε ότι $|C| \geq 3$).

(β) Θεωρούμε ότι η αυτονομία α του αυτοκινήτου μας είναι σχετικά μικρή και αναμένεται να λειτουργήσει περιοριστικά για τη διαδρομή που θέλουμε να ακολουθήσουμε. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει το συντομότερο $s - t$ μονοπάτι υπό τον περιορισμό ότι η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών πόλεων με σταθμό φόρτισης στη διαδρομή μας δεν ξεπερνά την αυτονομία α του αυτοκινήτου μας.

Άσκηση 4: Επιβεβαίωση και Αναπροσαρμογή Μέγιστης Ροής

Θεωρούμε ένα (κατευθυνόμενο) $s - t$ δίκτυο $G(V, E, c)$ με n κορυφές, m ακμές, και (θετικές) ακέραιες χωρητικότητες c στις ακμές.

(α) Δίνεται μια ροή f που (υποτίθεται ότι) αποτελεί μια μέγιστη ροή στο G. Να διατυπώσετε αλγόριθμο γραμμικού χρόνου που ελέγχει αν η f αποτελεί πράγματι μια μέγιστη ροή στο G. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

(β) Έστω ότι η f αποτελεί μια μέγιστη ροή στο G, αλλά ανακαλύπτουμε ότι η πραγματική χωρητικότητα μιας ακμής e είναι μικρότερη κατά k μονάδες, $1 \leq k \leq c_e$, από τη χωρητικότητα c_e που είχαμε θεωρήσει αρχικά. Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που (εφόσον χρειάζεται) τροποποιεί την f σε μία μέγιστη ροή f' για το δίκτυο G' που προκύπτει από το G θέτοντας $c'_e = c_e - k$. Ο χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου σας πρέπει να είναι σημαντικά μικρότερος από τον χρόνο υπολογισμού μιας μέγιστης ροής εξ' αρχής.

(γ) Λόγω μιας φυσικής καταστροφής στο t, πρέπει να διακόψουμε τη λειτουργία του δικτύου. Επειδή όμως η πλήρης διακοπή της ροής από το s στο t για σημαντικό χρονικό διάστημα θα προκαλούσε την καταστροφή των αγωγών - ακμών του δικτύου, πρέπει να διατηρήσουμε μια ελάχιστη ροή ℓ_e σε κάθε ακμή e. Θέλουμε λοιπόν να υπολογίσουμε την ελάχιστη ροή g για την οποία ισχύει ότι $c_e \geq g_e \geq \ell_e$ σε κάθε ακμή e. Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που με είσοδο ένα $s-t$ δίκτυο $G(V, E, c, \ell)$, όπου c_e είναι η μέγιστη και ℓ_e είναι η ελάχιστη ροή που επιτρέπουμε σε κάθε ακμή, υπολογίζει μια ελάχιστη $s - t$ ροή g. Αν σας διευκολύνει, μπορείτε να θεωρήσετε ως δεδομένη τη μέγιστη ροή f στο αρχικό δίκτυο $G(V, E, c)$ και ότι $f_e \geq \ell_e$ σε κάθε ακμή e. Να προσπαθήσετε να βελτιστοποιήσετε την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας. Να διατυπώσετε συνοπτικά το επιχείρημα που εξασφαλίζει ότι ο αλγόριθμός σας υπολογίζει πράγματι μια ελάχιστη $s - t$ ροή.

Άσκηση 5: Αναγωγές και NP-Πληρότητα

Να δείξετε ότι τα παρακάτω προβλήματα είναι **NP**-Πλήρη:

3-Διαμέριση

Είσοδος: Σύνολο $A = \{w_1, \ldots, w_n\}$ με n θετικούς ακέραιους. Θεωρούμε ότι το συνολικό άθροισμα $w(A) = \sum_{i \in A} w_i$ των στοιχείων του A είναι πολλαπλάσιο του 3.

Ερώτηση: Υπάρχει διαμέριση του A σε σύνολα A_1, A_2, A_3 ώστε $w(A_1) = w(A_2) = w(A_3)$;

Μακρύ Μονοπάτι

Είσοδος: Μη κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα $G(V, E)$.

Ερώτηση: Υπάρχει στο G μονοπάτι με μήκος τουλάχιστον $|V|/4$;

Πυκνό Γράφημα (Dense Subgraph)

Είσοδος: Μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ και φυσικοί αριθμοί k και b.

Ερώτηση: Υπάρχει σύνολο $S \subseteq V$ με k κορυφές τέτοιο ώστε το επαγόμενο υπογράφημα του G που ορίζεται από τις κορυφές του S να έχει τουλάχιστον b ακμές;

Ικανοποιησιμότητα με Περιορισμούς

Είσοδος: Λογική πρόταση $\varphi = \bigwedge_{j=1}^{m}(\ell_{j1} \vee \ell_{j2} \vee \ell_{j3} \vee \ell_{j4})$ σε 4-Συζευκτική Κανονική Μορφή (4-CNF). Υπενθυμίζεται ότι στην αναπαράσταση της φ σε 4-CNF, κάθε literal ℓ_{ji} είναι είτε μια λογική μεταβλητή είτε η άρνηση μιας λογικής μεταβλητής.

Ερώτηση: Υπάρχει ανάθεση τιμών αλήθειας στις λογικές μεταβλητές ώστε κάθε όρος $\ell_{j1} \vee \ell_{j2} \vee \ell_{j3} \vee \ell_{j4}$ να περιλαμβάνει τουλάχιστον ένα αληθές και τουλάχιστον ένα ψευδές literal;

Επιλογή Ανεξάρτητων Υποσυνόλων

Είσοδος: Συλλογή $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_m\}$ υποσυνόλων ενός συνόλου U με n στοιχεία και φυσικός αριθμός k, $2 \leq k \leq m$.

Ερώτηση: Υπάρχουν k υποσύνολα στη συλλογή $\mathcal{S}$ που να είναι, ανά δύο, ξένα μεταξύ τους;