



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών

Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Διδάσκοντες: Δημήτρης Φωτάκης, Δώρα Σούλιου

4η Σειρά Προγραμματιστικών Ασκήσεων - Ημ/ία Παράδοσης 16/3/2020

Άσκηση 1: Γαλαξιακός Αγώνας Ταχύτητας

Ο Anakin φέτος συμμετέχει στους επήσιους αγώνες ταχύτητας στον πλανήτη Tatooine και πιστεύει ότι μπορεί εύκολα να κερδίσει, αφού το νέο αγωνιστικό ιπτάμενο όχημα που κατασκεύασε έχει εξαιρετικά υψηλές επιδόσεις. Μοναδική του ανησυχία είναι ότι το νέο όχημα καταναλώνει πάρα πολλά καύσιμα, έτσι πρέπει να ανεφοδιαστεί αρκετές φορές κατά τη διάρκεια του αγώνα για να είναι σίγουρος ότι θα τερματίσει.

Στον πλανήτη Tatooine υπάρχουν συνολικά N πόλεις και M δρόμοι διπλής κατεύθυνσης. Κάθε δρόμος e συνδέει 2 διαφορετικές πόλεις και έχει μήκος x_e χιλιόμετρα. Η διαδρομή του αγώνα είναι προκαθορισμένη και περνάει από K διαφορετικές πόλεις, τις $T_1, T_2, \dots, T_{K-1}, T_K$ με αυτή τη σειρά (είναι ασφαλές να υποθέσουμε ότι μεταξύ κάθε δύο διαδοχικών πόλεων από τις παραπάνω υπάρχει δρόμος). Ο Anakin πρέπει να ακολουθήσει την αγωνιστική διαδρομή, χωρίς παρεκτροπές, και χρειάζεται να ανεφοδιαστεί με καύσιμα τουλάχιστον L φορές κατά τη διάρκεια του αγώνα. Ο ανεφοδιασμός μπορεί να γίνει σε οποιοσδήποτε L διαφορετικές πόλεις από τις T_2, \dots, T_{K-1} (δεν έχει νόημα ο ανεφοδιασμός στην αφετηρία και στον τερματισμό).

Στον πλανήτη Tatooine υπάρχουν βενζινάδικα σε B πόλεις, τις C_1, \dots, C_B , και σε καθένα από αυτά υπάρχουν συνεργάτες του Anakin έτοιμοι να κατευθυνθούν προς αυτόν και να τον ανεφοδιάσουν με καύσιμα. Για να ανεφοδιαστεί, ο Anakin πρέπει να σταματήσει σε κάποια πόλη T_i , $2 \leq i \leq K-1$, κατά μήκος της αγωνιστικής διαδρομής. Αμέσως μόλις ο Anakin σταματήσει στην πόλη T_i , ένας συνεργάτης του ξεκινά από το πλησιέστερο βενζινάδικο και κατευθύνεται στην πόλη T_i για τον ανεφοδιασμό. Έτσι ο Anakin καθυστερεί στην T_i ακριβώς τόσο χρόνο όσο χρειάζεται ο συνεργάτης του για να φτάσει από το πλησιέστερο βενζινάδικο, αφού υποθέτουμε ότι ο χρόνος για τον ανεφοδιασμό είναι αμελητέος. Αμέσως μετά τον ανεφοδιασμό, ο Anakin συνεχίζει την πορεία του προς την επόμενη πόλη T_{i+1} .

Ο Anakin σας ζητάει να γράψετε ένα πρόγραμμα για τον υπολογισμό του ελάχιστου χρόνου που χρειάζεται για να ολοκληρώσει τον αγώνα. Για τον υπολογισμό του ελάχιστου χρόνου υποθέτουμε ότι η ταχύτητα με την οποία κινούνται όλα τα οχήματα (τόσο του Anakin όσο και των συνεργατών του) είναι 1 χιλιόμετρο το δευτερόλεπτο, ότι τα οχήματα των συνεργατών του μπορούν να χρησιμοποιήσουν όποιον δρόμο θέλουν, ακόμα και αυτούς της αγωνιστικής διαδρομής, και ότι οι συνεργάτες του ξεκινούν πάντα από το πλησιέστερο βενζινάδικο (που μπορεί να είναι το ίδιο για δύο ή περισσότερα σημεία ανεφοδιασμού).

Δεδομένα Εισόδου: Το πρόγραμμά σας θα διαβάζει από το standard input, στην πρώτη γραμμή, 5 φυσικούς αριθμούς που αντιστοιχούν στο πλήθος N των πόλεων, στο πλήθος M των δρόμων, στο πλήθος K των πόλεων στην αγωνιστική διαδρομή, στο πλήθος L των απαιτούμενων ανεφοδιασμών, και στο πλήθος B των βενζινάδικων. Οι πόλεις είναι αριθμημένες από 1 έως N . Στην i -οστή από τις επόμενες M γραμμές θα υπάρχουν 3 φυσικοί αριθμοί u_i, v_i, x_i που δηλώνουν ότι ο i -οστός δρόμος ενώνει τις πόλεις u_i και v_i και έχει μήκος x_i . Στις επόμενες K γραμμές θα υπάρχουν K

διαφορετικοί φυσικοί αριθμοί T_1, \dots, T_K που δηλώνουν τις πόλεις από τις οποίες διέρχεται η αγωνιστική διαδρομή. Τέλος, στις επόμενες B γραμμές θα υπάρχουν B φυσικοί αριθμοί C_1, \dots, C_B που δηλώνουν τις πόλεις όπου βρίσκονται βενζινάδικα.

Δεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμά σας πρέπει να τυπώνει στο standard output (στην πρώτη γραμμή) έναν ακέραιο που αντιστοιχεί στον ελάχιστο χρόνο σε δευτερόλεπτα που χρειάζεται ο Anakin για να ολοκληρώσει τον αγώνα. Σημειώστε ότι για μεγάλες τιμές των N και M , ο ελάχιστος χρόνος (καθώς και κάποια από τα ενδιάμεσα αποτελέσματα που χρειάζονται για τον υπολογισμό του) μπορεί να υπερβαίνουν το 2^{32} .

Περιορισμοί:	Παράδειγμα Εισόδου:	Παράδειγμα Εξόδου:
$3 \leq N \leq 60000$	5 8 4 2 1	19
$3 \leq M \leq 10^6$	1 2 4	
$1 \leq u_i, v_i, T_i, C_i \leq N$	1 3 1	
$3 \leq K \leq N$	1 4 2	
$1 \leq B \leq N$	2 4 3	
$1 \leq L \leq K - 2$	3 4 5	
$1 \leq x(i) \leq 20000$	5 1 2	
Όριο χρόνου εκτέλεσης: 2sec.	5 3 1	
Όριο μνήμης: 64 MB.	5 2 3	
	1	
	2	
	4	
	3	
	5	

Άσκηση 2: Διαπλανητικά Ταξίδια

Στον μακρινό Γαλαξία των Αλγορίθμων, υπάρχει ένα ηλιακό σύστημα με K πλανήτες στους οποίους κατοικούν ευφυή εξωγήινα όντα! Όλοι οι πλανήτες απέχουν την ίδια απόσταση από τον ήλιο, επομένως μπορούμε να φανταστούμε ότι σχηματίζουν έναν δακτύλιο γύρω από αυτόν.

Οι εξωγήινοι έχουν σχεδιάσει ένα ιεραρχικό δίκτυο μεταφορών που τους επιτρέπει να μετακινούνται μεταξύ των πλανητών. Συγκεκριμένα, στη μεγαλύτερη χώρα κάθε πλανήτη, υπάρχει ένα διαστημοδρόμιο που χρησιμοποιείται για διαστημικές πτήσεις από και προς τους δύο γειτονικούς πλανήτες. Αν δηλαδή αριθμίσουμε τους πλανήτες από το 0 έως το $K - 1$, το διαστημοδρόμιο στον πλανήτη i χρησιμοποιείται για πτήσεις από και προς τους πλανήτες $(i - 1) \bmod K$ και $(i + 1) \bmod K$.

Για τη μετακίνησή τους μεταξύ των χωρών του ίδιου πλανήτη, οι εξωγήινοι έχουν σχεδιάσει οδικά δίκτυα που αντιστοιχούν σε δυαδικά δέντρα (οι κόμβοι του δέντρου αντιστοιχούν στις χώρες του πλανήτη και οι ακμές του δέντρου αντιστοιχούν στους δρόμους). Ρίζα του δέντρου είναι η μεγαλύτερη χώρα του πλανήτη, αυτή δηλαδή όπου βρίσκεται και το διαστημοδρόμιο¹.

Ένας πλούσιος κάτοικος αυτού του ηλιακού συστήματος θέλει να κάνει ένα μεγάλο ταξίδι με σκοπό να θαυμάσει τα αξιοθέατα διαφόρων χωρών. Ωστόσο, δεν θέλει να περάσει από την ίδια χώρα δύο φορές, καθώς το θεωρεί χάσιμο χρόνου. Έτσι, το δρομολόγιό του θα δίνεται από ένα απλό μονοπάτι που αρχίζει και τελειώνει σε διαφορετικές χώρες. Γι' αυτό, αναζητεί το μεγαλύτερο

¹ Το δυαδικό δέντρο που αντιστοιχεί στο οδικό δίκτυο κάθε πλανήτη δεν είναι αναγκαστικά πλήρες. Έτσι, κάθε χώρα (κόμβος) μπορεί να έχει κανένα, ένα ή δύο χώρες (παιδιά) με τις οποίες συνδέεται οδικώς.

απλό μονοπάτι στο δίκτυο του ηλιακού συστήματος (το μήκος κάθε μονοπατιού είναι ίσο με το πλήθος των ακμών του). Για να τον βοηθήσετε, πρέπει να γράψετε ένα πρόγραμμα που υπολογίζει το μήκος του μεγαλύτερου απλού μονοπατιού σε ένα τέτοιο δίκτυο.

Δεδομένα Εισόδου: Το πρόγραμμά σας θα διαβάζει από το standard input, στην πρώτη γραμμή, έναν θετικό ακέραιο αριθμό K που δηλώνει το πλήθος των πλανητών στο ηλιακό σύστημα. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι πλανήτες είναι αριθμημένοι διαδοχικά από 0 έως $K - 1$. Στις επόμενες $2K$ γραμμές θα δίνεται η περιγραφή των K οδικών δικτύων των πλανητών (με τη μορφή των πινάκων γονέων για τα αντίστοιχα δυαδικά δέντρα). Συγκεκριμένα, στη γραμμή $2i$ θα δίνεται ένας θετικός ακέραιος N_i που δηλώνει το πλήθος των χωρών του πλανήτη i . Στη γραμμή $2i + 1$, θα δίνονται $N_i - 1$ φυσικοί αριθμοί που αντιστοιχούν στον πίνακα γονέων του δυαδικού δέντρου του πλανήτη i . Συγκεκριμένα, ως ρίζα θα έχουμε πάντα τη χώρα με αριθμό 1, και δεν θα υπάρχει εγγραφή στον πίνακα γονέων για αυτή. Αν στην ℓ -οστή θέση, $\ell = 1, \dots, N_i - 1$, δίνεται η τιμή j , αυτό δηλώνει ότι η χώρα $\ell + 1$ του πλανήτη i έχει ως πατέρα στο οδικό του δίκτυο τη χώρα j . Στην περίπτωση που $N_i = 1$, δηλαδή όταν ο πλανήτης i έχει μόνο μία χώρα, τη ρίζα του δέντρου, στη γραμμή $2i + 1$ θα υπάρχει η τιμή 0.

Δεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμά σας πρέπει να τυπώνει στο standard output (στην πρώτη γραμμή) έναν θετικό ακέραιο που αντιστοιχεί στο μήκος του μεγαλύτερου μονοπατιού στο δίκτυο μεταφορών της εισόδου.

Περιορισμοί:	Παραδείγματα Εισόδου:	Παραδείγματα Εξόδου:
$3 \leq K \leq 10^5$	4	6
$1 \leq N_i \leq 10^5$	7	
$3 \leq \sum_{i=0}^{K-1} N_i \leq 2 \cdot 10^6$	1 2 3 2 3 5	
Όριο χρόνου εκτέλεσης: 1 sec.	1	
Όριο μνήμης: 64 MB.	0	
	1	
	0	
	1	
	0	
	4	10
	2	
	1	
	11	
	1 2 3 4 5 1 7 8 9 10	
	2	
	1	
	2	
	1	