# Κρυπτογραφία

## Μονόδρομες συναρτήσεις - Συναρτήσεις σύνοψης

Άρης Παγουρτζής - Πέτρος Ποτίκας

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

# Περιεχόμενα

# Συναρτήσεις μονόδρομες ή μονής-κατεύθυνσης (one-way functions)

- Συνάρτηση που είναι εύκολο να υπολογιστεί, αλλά “δύσκολο” να αντιστραφεί
- Απαραίτητη προϋπόθεση για κρυπτογραφία ιδιωτικού κλειδιού
- Γεννήτριες ψευδοτυχαιότητας βασίζονται στην υπόθεση ύπαρξης μονόδρομων συναρτήσεων
- Με αμελητέα πιθανότητα μπορώ να αντιστρέψω μια μονόδρομη συνάρτηση
- Με εξαντλητική αναζήτηση (εκθετικό χρόνο) μπορώ να αντιστρέψω μια μονόδρομη συνάρτηση

# Μονόδρομες Συναρτήσεις

Έστω συνάρτηση $f : \{0,1\}^* \mapsto \{0,1\}^*$.

Ορίζουμε για κάθε αλγόριθμο $\mathcal{A}$ και κάθε παράμετρο ασφαλείας $n$ το

**Πείραμα αντιστρεψιμότητας** $Invert_{\mathcal{A},f}(n)$

1. Διάλεξε $x \leftarrow \{0,1\}^n$. Υπολόγισε $y = f(x)$
2. Ο $\mathcal{A}$ με είσοδο το $1^n$ και το $y$ επιστρέφει το $x'$
3. Η έξοδος είναι 1, αν $f(x') = y$, αλλιώς 0

Παρατήρηση: Δε χρειάζεται να βρούμε το ίδιο το $x$, αλλά οποιαδήποτε $x'$, τ.ώ. $f(x') = y = f(x)$.

# Μονόδρομες Συναρτήσεις

## Ορισμός

Μία συνάρτηση $f : \{0,1\}^* \mapsto \{0,1\}^*$ είναι *μονόδρομη συνάρτηση* αν είναι:

1. (Εύκολα υπολογίσιμη) Υπάρχει πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμος $M_f$ που την υπολογίζει, δηλ. $M_f(x) = f(x), \forall x$
2. (Δύσκολα αντιστρέψιμη) Για κάθε PPT αλγόριθμο $\mathcal{A}$ υπάρχει αμελητέα συνάρτηση $\epsilon$ έτσι ώστε:

$$Pr[Invert_{\mathcal{A},f}(n) = 1] \leq \epsilon(n)$$

Πιο αναλυτικά,

$$Pr_{x \leftarrow \{0,1\}^n}[\mathcal{A}(1^n, f(x)) \in f^{-1}(f(x))] \leq \epsilon(n)$$

# Μονόδρομες Συναρτήσεις

Παρατηρήσεις:

1. Μια συνάρτηση που δεν είναι μονόδρομη δεν είναι απαραίτητο να αντιστρέφεται πάντα εύκολα (ή “συχνά”).
   Π.χ. αν υπάρχει αντίπαλος που αντιστρέφει μια συνάρτηση με πιθανότητα $n^{-10}$ για όλους άρτιους $n$ (αλλά αποτυγχάνει για τους μονούς), τότε δεν είναι μονόδρομη.
2. Αν έχουμε εκθετικό χρόνο, τότε αν μας δίνεται ένα $y$ και η παράμετρος ασφαλείας $1^n$, τότε μπορούμε να δοκιμάσουμε όλα τα $x \in \{0,1\}^n$, μέχρι να βρούμε ένα $x$, τέτοιο ώστε $f(x) = y$.

# Μονόδρομες Μεταθέσεις

Μια συνάρτηση λέμε ότι *διατηρεί το μήκος* αν $|f(x)| = |x|, \forall x$.

## Ορισμός

Μια μονόδρομη συνάρτηση που διατηρεί το μήκος και είναι 1-1, είναι μια *μονόδρομη μετάθεση*.

Η τιμή $y$ καθορίζει μοναδικά το $x$ από το οποίο προήλθε. Παρόλα αυτά είναι δύσκολο να βρούμε το $x$ σε πολυωνυμικό χρόνο.

# Υποψήφιες μονόδρομες συναρτήσεις

Υπάρχουν μονόδρομες συναρτήσεις με την προϋπόθεση πως κάποια προβλήματα είναι δύσκολα, π.χ. παραγοντοποίηση ακεραίων

## Παράδειγμα 1

$f_{mult}(x, y) = xy$, όμως με μεγάλη πιθανότητα, το αποτέλεσμα άρτιος, οπότε το $(2, xy/2)$ είναι αντίστροφος. Με περιορισμό, είναι μονόδρομη:

1. $f_{mult}(x, y) = (xy, |x|, |y|)$, (εναλλακτικά, $x, y$ έχουν ίδιο μήκος)
2. $x, y$ πρώτοι αριθμοί ίσου μήκους

## Παράδειγμα 2

Η συνάρτηση $f(x_1, ..., x_n, J) = (x_1, ..., x_n, \sum_{j \in J} x_j)$, όπου κάθε $x_i$ είναι ένας ακέραιος και $J \subseteq \{1, 2, ..., n\}$. Εύρεση αντιστρόφου είναι το γνωστό $\mathcal{NP}$-πλήρες πρόβλημα Subset Sum. Είναι μονόδρομη;

# Υποψήφιες μονόδρομες μεταθέσεις

## Παράδειγμα 3

Έστω ένας πρώτος αριθμός $p$ μήκους $n$-bits και ένας γεννήτορας $g \in \mathbb{Z}_p^*$. Έστω ένα στοιχείο $x \in \mathbb{Z}_p^*$. Ορίζουμε

$$f_{p,g}(x) = g^x \bmod p$$

- Η συνάρτηση αυτή διατηρεί το μήκος και είναι 1-1, άρα μετάθεση.
- Η δυσκολία αντιστροφής της βασίζεται στη δυσκολία του προβλήματος διακριτού λογάριθμου.

Πρακτικά συστήματα, όπως το AES, δίνουν μονόδρομες συναρτήσεις, π.χ. με την υπόθεση ότι είναι ψευδοτυχαία μετάθεση.

# Μονόδρομες συναρτήσεις καταπακτής (Trapdoor one-way functions)

Μονόδρομες συναρτήσεις που είναι δύσκολο να αντιστραφούν, εκτός και αν ξέρουμε κάποιο μυστικό, την *καταπακτή* (trapdoor).

**Παράδειγμα**

Έστω $N = pq$, όπου $p, q$ μεγάλοι πρώτοι αριθμοί.

Η συνάρτηση $f_N(x) = x^2 \bmod N$ είναι μια μονόδρομη μετάθεση με καταπακτή.

Βασίζεται στην δυσκολία εύρεσης τετραγωνικών ριζών *mod* $N$, για σύνθετο $N$, εκτός και αν ξέρουμε την παραγοντοποίηση του.

Γνωστή ως μονόδρομη μετάθεση Rabin (κρυπτοσύστημα)

# Συναρτήσεις σύνοψης (hash functions)

- Γνωστές και ως συναρτήσεις κατακερματισμού.
- Σημαντικές ιδιότητες:
  - Συμπίεση $h : X \to Y, |Y| < |X|$.
    Συνήθως $X = \Sigma^*$, $Y = \Sigma^n$, δηλαδή η $h(x)$ έχει συγκεκριμένο μήκος για οποιαδήποτε είσοδο $x$.
  - Ευκολία Υπολογισμού Ο υπολογισμός της τιμής $h(x)$ για κάποιο $x$ γίνεται "εύκολα". Δηλαδή υπάρχει αλγόριθμος $A$ πολυωνυμικού χρόνου, έτσι ώστε για κάθε $x$ να ισχύει $h(x) = A(x)$.
  - Μια συνάρτηση σύνοψης ορίζει σχέση ισοδυναμίας:

$$x \sim x' : \quad h(x) = h(x')$$

Δύο στοιχεία στην ίδια κλάση ισοδυναμίας λέμε ότι προκαλούν σύγκρουση (collision).

# Συναρτήσεις σύνοψης (hash functions): επιθυμητές ιδιότητες

Έστω hash function $h : X \to Y$. Η $h$ έχει:

1. Αντίσταση πρώτου ορίσματος (preimage resistance), αν για $y \in Y$ είναι υπολογιστικά δύσκολο να βρεθεί $x \in X$ τ.ώ. $h(x) = y$.
2. Αντίσταση δεύτερου ορίσματος (2nd preimage resistance), αν για $x \in X$ είναι υπολογιστικά δύσκολο να βρεθεί $x' \in X$ τ.ώ. $x \neq x'$ και $h(x) = h(x')$.
3. Δυσκολία εύρεσης συγκρούσεων (collision resistance / freeness), αν είναι υπολογιστικά δύσκολο να βρεθούν $x, x' \in X$ έτσι ώστε $h(x) = h(x')$.

Άλλα ονόματα: για το (2) weak collision freeness, για το (1) non-invertibility.

Σειρά ισχύος: $(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$ (υπό προϋποθέσεις).

One-way hash functions (OWHFs): (1) & (2).
Collision-resistant hash functions (CRHFs): (1) & (2) & (3).

# Συναρτήσεις σύνοψης (hash functions): παραδείγματα

1. $f(x) = (x^2 - c) \mod p$: δεν είναι μονής κατεύθυνσης αφού η εύρεση τετραγωνικών ριζών στο $\mathbb{Z}_p$ είναι δυνατή σε πολυωνυμικό χρόνο.
2. $g(x) = x^2 \mod n$, $n = pq$, $p, q$ κρυφοί: αντίσταση πρώτου ορίσματος, αλλά όχι αντίσταση δεύτερου ορίσματος (γιατί;), επομένως δεν είναι CRHF.
3. $h : \mathbb{Z}_q^2 \to \mathbb{Z}_p^*$, $h(x_1, x_2) = \alpha^{x_1} \beta^{x_2} \mod p$, $p, q$ πρώτοι, $p = 2q + 1$, $\alpha, \beta$ γεννήτορες του $\mathbb{Z}_p^*$.
   Είναι γνωστή ως συνάρτηση σύνοψης Chaum-van Heijst-Pfitzman και είναι CRHF αν ισχύει η Υπόθεση Διακριτού Λογαρίθμου στη $\mathbb{Z}_p^*$.

# Επίθεση τετραγωνικής ρίζας (Παράδοξο Γενεθλίων)

## Θεώρημα

*Έστω συνάρτηση σύνοψης* $h : X \to Y$ *και η* $h(x) \in Y$ *ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή πιθανότητας όταν η* $x \in X$ *ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή. Η πιθανότητα να βρεθεί σύγκρουση μετά από τυχαία επιλογή* $x_1, x_2, \ldots, x_k$ *είναι περίπου* $\frac{1}{2}$ *όταν* $k \cong 1.17\sqrt{n}$*, όπου* $n = |Y|$.

## Απόδειξη

$NoColl_i$: δεν έχουμε σύγκρουση στα $\{y_1, y_2, ..., y_i\}$
Έχουμε $NoColl_k$ αν $NoColl_i$ για όλα τα $i \leq k$, δηλαδή
$Pr[NoColl_k] = Pr[NoColl_1]Pr[NoColl_2|NoColl_1] \cdots Pr[NoColl_k|NoColl_{k-1}]$

- $Pr[NoColl_1] = 1$
- Αν συμβαίνει το $NoColl_i$, τότε η πιθανότητα να συγκρουστεί το $y_{i+1}$ με τα προηγούμενα είναι $\frac{i}{n}$

# Επίθεση τετραγωνικής ρίζας (Παράδοξο Γενεθλίων)

## απόδειξη – συν.

$$Pr[NoColl_k] = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} = \prod_{i=1}^{k-1}(1-\frac{i}{n})$$

Ισχύει $\forall x \in \mathbb{R}, 1+x \leq e^x$, οπότε:

$$\prod_{i=1}^{k-1}(1-\tfrac{i}{n}) \leq \prod_{i=1}^{k-1} e^{-\frac{i}{n}} = e^{-\frac{\sum_{i=1}^{k-1} i}{n}} = e^{-\frac{k(k-1)}{2n}} \Rightarrow$$

$$Pr[Coll_k] \geq 1 - e^{-\frac{k(k-1)}{2n}}$$

□

# Επίθεση τετραγωνικής ρίζας (Παράδοξο Γενεθλίων)

## απόδειξη – συν.

$$Pr[Coll_k] \geq 1 - e^{-\frac{k(k-1)}{2n}}$$

Για να είναι επομένως η πιθανότητα σύγκρουσης τουλάχιστον $p$ αρκεί:

$$1 - e^{-\frac{k(k-1)}{2n}} \geq p \Rightarrow \ln(1-p) \geq -\frac{k(k-1)}{2n} \Rightarrow k^2 - k - 2n \ln \frac{1}{1-p} \geq 0$$

Λύνοντας ως προς $k$: $k \geq 1 + \sqrt{2n \ln \frac{1}{1-p}}$

Για $p = \frac{1}{2}$ προκύπτει $k \geq 1.17\sqrt{n} + 1$. Για $n = 365$, $k \geq 23$. □

Σημαντική εφαρμογή (μεταξύ άλλων): μέθοδος παραγοντοποίησης $\rho$

# Επιθέσεις γενεθλίων

- Συμπέρασμα, αν $h : \{0,1\}^* \mapsto \{0,1\}^l$, τότε αν πάρω $k = \mathcal{O}(2^{l/2})$ τυχαία στοιχεία από το $\{0,1\}^*$, η πιθανότητα να έχω σύγκρουση είναι $1/2$
- Διαφορά $2^l, 2^{l/2}$ στην πράξη: για ασφάλεια 128 bits, πρέπει η συνάρτηση hash να δίνει έξοδο 256 bits.
- Αδυναμίες επίθεσης γενεθλίων (για τον επιτιθέμενο):
  1. τυχαίες τιμές μπορεί να είναι άχρηστες
  2. τετραγωνικό πλήθος συγκρίσεων, πολυπλοκότητα $\mathcal{O}(2^l)$ ;
  3. απαγορευτικά μεγάλος χώρος

# Επιθέσεις γενεθλίων με επιλεγμένα μηνύματα

- Επιλογή των μηνυμάτων: Οι τιμές που δίνουμε για να πετύχουμε σύγκρουση, μπορούν να έχουν σχέση μεταξύ τους, για παράδειγμα η Alice απολύεται και θέλει να βρει δύο μηνύματα $x$ και $x'$ έτσι ώστε $H(x) = H(x')$, όπου το πρώτο λέει τους λόγους της απόλυσής της, ενώ το δεύτερο επαινετικά λόγια.
- Φτιάχνουμε $k = \Theta(2^{l/2})$ μηνύματα από τον πρώτο τύπο και άλλα τόσα από το δεύτερο και τις εικόνες τους.

"Είναι δύσκολο/απίθανο/σπάνιο να βρεις μια τόσο αποδοτική/εργατική/φιλότιμη υπάλληλο σαν την Alice. Η δουλειά της είναι καταπληκτική/ασύγκριτη/πρωτοποριακή."

- Από παράδοξο γενεθλίων έχουμε καλή πιθανότητα να πετύχουμε σύγκρουση μεταξύ μηνυμάτων των δύο τύπων.
- Όμως: το πρόβλημα του μεγάλου χώρου παραμένει.

# Βελτιωμένες επιθέσεις γενεθλίων

Μια πρώτη ιδέα:

## Επίθεση γενεθλίων γραμμικού πλήθους συγκρίσεων

1. Πάρε τυχαία αρχική τιμή $x_0$ και για $i := 1, 2, \ldots$ υπολόγισε $x_i = H(x_{i-1})$
2. Σύγκρινε $x_i$ με $x_{2\lfloor \log i \rfloor}$ : γραμμικό πλήθος συγκρίσεων.
3. Εξήγηση: $x_i = x_j \Rightarrow \forall k \geq 1, x_{i+k} = x_{j+k}$.
4. Η σύγκρουση $x_i = x_j$ θα εντοπιστεί το αργότερο στην θέση $x_{4j}$. (*Γιατί; Άσκηση!*)

Μπορεί να υλοποιηθεί σε σταθερό χώρο: κάθε φορά χρειαζόμαστε μόνο τα $x_i, x_{2\lfloor \log i \rfloor}$.

Μια ακόμη ταχύτερη επίθεση σταθερού χρόνου περιγράφεται παρακάτω.

Οι ίδιες ιδέες εφαρμόζονται και στην μέθοδο παραγοντοποίησης $\rho$.

# Βελτιωμένες επιθέσεις γενεθλίων

## Επίθεση γενεθλίων σταθερού χώρου

1. Πάρε τυχαία αρχική τιμή $x_0$ και για $i > 0$ υπολόγισε $x_i = H(x_{i-1})$ και $x_{2i} = H(H(x_{2(i-1)}))$
2. Σε κάθε επανάληψη έλεγξε $x_i \stackrel{?}{=} x_{2i}$. Εάν ίσα, τότε ψάξε από το $x_0$ έως το $x_{i-1}$ για σύγκρουση.
3. Βρες το μικρότερο $j$ ώστε $x_j = x_{j+i}$ και τύπωσε τα $x_{j-1}, x_{j+i-1}$

# Βελτιωμένες επιθέσεις γενεθλίων

## Αλγόριθμος Επίθεσης Γενεθλίων Σταθερού Χώρου

**Είσοδος**: Συνάρτηση σύνοψης $H : \{0,1\}^* \mapsto \{0,1\}^l$
**Έξοδος**: $x \neq x'$, με $H(x) = H(x')$

$x_0 \leftarrow \{0,1\}^{l+1}, x' = x = x_0$
**for** $i = 1, 2, \ldots$ **do** :
  $x = H(x)$
  $x' = H(H(x'))$
  // τώρα $x = H^{(i)}(x_0)$ και $x' = H^{(2i)}(x_0)$
  **if** $x = x'$ **break**
$x' = x, x = x_0$
**for** $j = 1 \rightarrow i$ **do** :
  **if** $H(x) == H(x')$ **return** $x, x'$
  **else** $x = H(x), x' = H(x')$
  // τώρα $x = H^{(j)}(x_0)$ και $x' = H^{(j+i)}(x_0)$

- Σταθερός χώρος: δύο στοιχεία $x_i, x_{2i}$.
- Επιτυχία με πιθανότητα $\geq 1/2$ σε $\Theta(2^{l/2})$ βήματα.

# Βελτιωμένες επιθέσεις γενεθλίων

## Λήμμα

*Έστω $x_1, \ldots, x_q$ η ακολουθία τιμών με $x_m = H(x_{m-1})$. Αν $x_I = x_J$, με $1 \leq I < J \leq q$, τότε υπάρχει ένα $i < J$ τέτοιο ώστε $x_i = x_{2i}$.*

## Απόδειξη.

Η ακολουθία $x_I, x_{I+1}, \ldots$ επαναλαμβάνεται με περίοδο $\Delta = J - I$. Δηλ. για κάθε $i \geq I$ και $k = 0, 1, \ldots$, έχουμε $x_i = x_{i+k\Delta}$. Έστω $i$ το μικρότερο πολλαπλάσιο του $\Delta$ που είναι μεγαλύτερο ή ίσο του $I$. Έχουμε $i < J$ (γιατί;). Επειδή $i \geq I$, το $2i$ είναι πολλαπλάσιο του $\Delta$, έχουμε $x_i = x_{2i}$. □

# Βελτιωμένες επιθέσεις γενεθλίων με επιλεγμένα μηνύματα

Όρισε $g\colon \{0,1\}^l \mapsto \{0,1\}^*$, όπου το τελευταίο bit δείχνει ποιά πρόταση θα επιλεγεί και τα υπόλοιπα ποιά λέξη.

## Παράδειγμα

0: Bob is a good/hardworking and honest/trustworthy worker/employee.
1: Bob is a difficult/problematic and taxing/irritating worker/employee.

g(0000) = Bob is a good and honest worker.
g(1011) = Bob is a problematic and taxing employee.

- Ορίζουμε $f(x) = H(g(x))$.
- Οποιαδήποτε σύγκρουση $x, x'$ στην $f$ δίνει δύο μηνύματα $g(x), g(x')$ που συγκρούονται.
- Η πιθανότητα να είναι μηνύματα διαφορετικού τύπου είναι 1/2.
- Αν είναι ίδιου τύπου, επαναλαμβάνουμε.

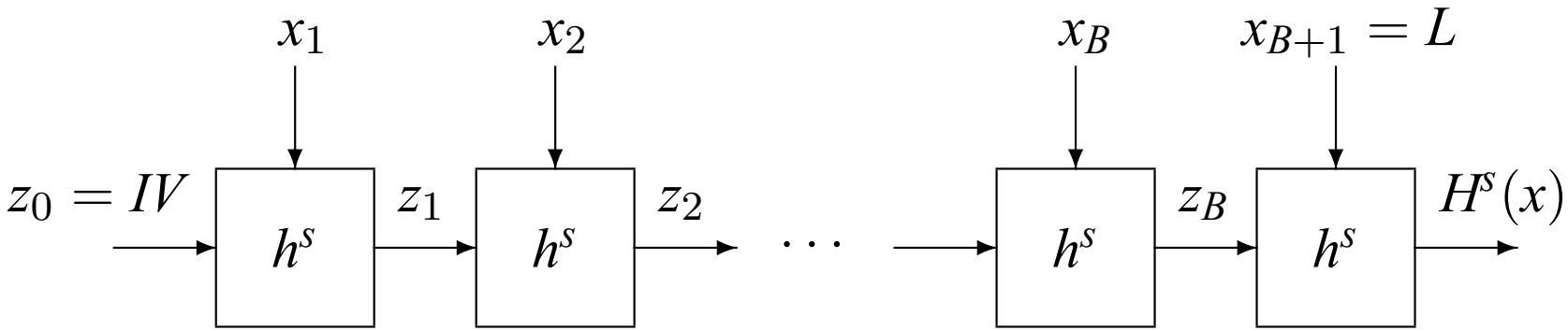
# Επέκταση συναρτήσεων σύνοψης

## Merkle-Damgård Hash Function Extension

Έστω $h$ μια συνάρτηση σύνοψης που απεικονίζει είσοδο μήκους $2n$ σε έξοδο μήκους $n$. Κατασκευάζουμε μια συνάρτηση σύνοψης $H$ μεταβλητού μήκους ως εξής:

- $H$: με είσοδο ένα string $x \in \{0,1\}^*$ μήκους $L \leq 2^n$:
  1. Θέσε $B = \lceil \frac{L}{n} \rceil$ (πλήθος block του $x$). (Πρόσθεσε μηδενικά στο $x$ ώστε το μήκος να είναι πολλαπλάσιο του $n$) ($x = x_1, ..., x_B$). Θέσε $x_{B+1} = L$ (το $L$ δυαδική αναπαράσταση)
  2. Θέσε $z_0 = 0^n$ (Initialization vector)
  3. Για $i = 1, ..., B+1$, υπολόγισε το $z_i = h(z_{i-1}||x_i)$
  4. Έξοδος: $z_{B+1}$

# Κατασκευή Merkle-Damgård




Σχήμα: Merkle-Damgård

# Επέκταση συναρτήσεων σύνοψης

## Θεώρημα

*Αν η συνάρτηση σύνοψης h είναι collision resistant, τότε και η H που κατασκευάζεται με τη μέθοδο Merkle-Damgård είναι επίσης collision resistant.*

## Απόδειξη.

Έστω $x' = x'_1 \ldots x'_{B'} \neq x = x_1 \ldots x_B : \; x'_{B'+1} = L', x_{B+1} = L$, με $H(x) = H(x')$.
Τότε έχουμε δύο περιπτώσεις:

1. $L \neq L'$, οπότε στο τελευταίο βήμα είναι $z_{B+1} = h(z_B||L)$ και $z'_{B'+1} = h(z'_{B'}||L')$, άρα σύγκρουση στην $h$, αφού τα strings $z_B||L$ και $z'_{B'}||L'$ είναι διαφορετικά.
2. $L = L'$, οπότε $B = B'$. Έστω $z_0, \ldots, z_{B+1}$ οι τιμές που παράγονται από την $H(x)$, και $I_i = z_{i-1}||x_i$, $I_{B+2} = z_{B+1}$. Έστω $N$ ο μεγαλύτερος δείκτης, ώστε $I_N \neq I'_N$ (υπάρχει;). Αφού ο $N$ μέγιστος, έχουμε $I_{N+1} = I'_{N+1}$ (ειδικά $z_N = z'_N$). Αλλά τότε τα $I_N, I'_N$ είναι σύγκρουση στην $h$.

□

# Συναρτήσεις σύνοψης: μερικές ακόμη παρατηρήσεις

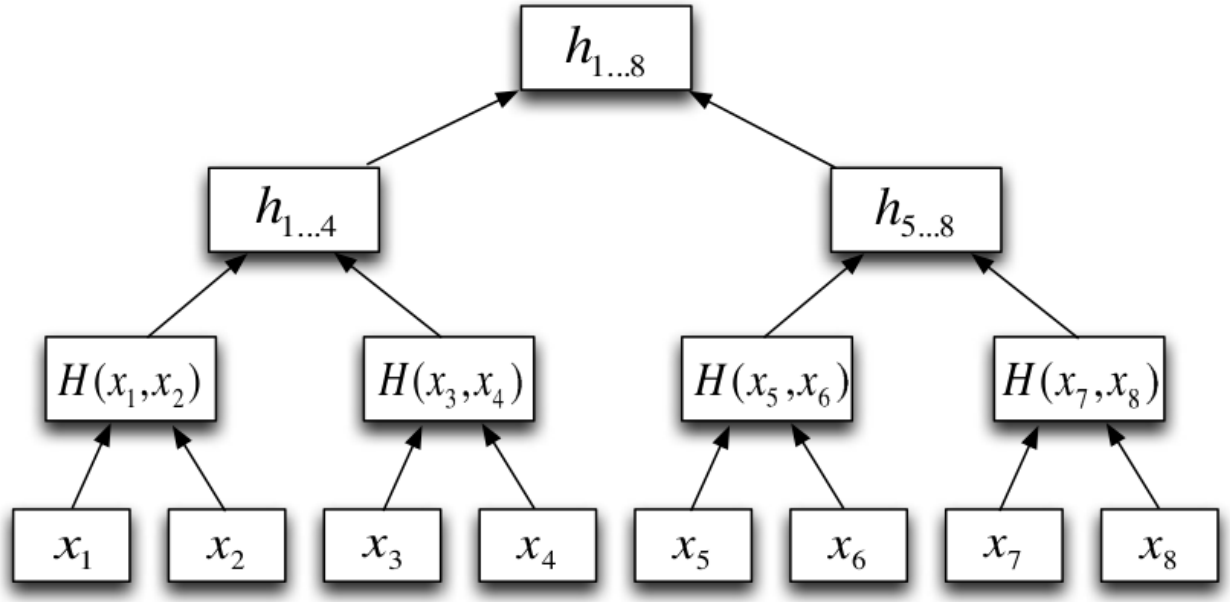
- Οι πιο διάσημες συναρτήσεις, MD5 και SHA-1 στηρίζονται σε πράξεις που θυμίζουν συμμετρική κρυπτογραφία (rotation, XOR, πρόσθεση $\mathrm{mod} 2^{32}$, δυαδικές πράξεις) και στην κατασκευή Merkle-Damgård.
- Υπέστησαν εντατικές επιθέσεις (*επίθεση γενεθλίων* κ.ά.). Η MD5 δεν θεωρείται πλέον ασφαλής, η SHA-1 αντικαταστάθηκε από την (οικογένεια) SHA-2, ενώ έχει αναπτυχθεί και η SHA-3 (Keccak).

# Δένδρα Merkle

- Ένας χρήστης θέλει να ανεβάσει αρχείο $x$ σε έναν server.
- Όταν το κατεβάσει, θέλει να ελέγξει αν είναι το ίδιο.
- Λύση: αποθηκεύει τοπικά το $h = H(x)$, και όταν καταβάζει το ζητούμενο αρχείο $x'$ ελέγχει $H(x') \stackrel{?}{=} h$.
- Αν έχει πολλά αρχεία; Υπάρχουν διάφορες λύσεις.

# Δένδρα Merkle

- Δένδρο Merkle με είσοδο $x_1, x_2, \ldots, x_t$: ένα δυαδικό δένδρο με φύλλα τα $x_1, \ldots, x_t$ και εσωτερικούς κόμβους τις τιμές σύνοψης των παιδιών του.




Σχήμα: Δένδρο Merkle

- Για δοσμένη συνάρτηση σύνοψης $H$, συμβολίζουμε με $\mathcal{MT}_t$ τη συνάρτηση που με είσοδο τα $x_1, \ldots, x_t$, υπολογίζει το δένδρο Merkle και τη ρίζα του δένδρου.

# Δένδρα Merkle

## Θεώρημα

*Έστω* $(Gen_H, H)$ *συνάρτηση σύνοψης ελεύθερη συγκρούσεων. Τότε και η* $(Gen_H, \mathcal{MT}_t)$ *είναι ελεύθερη συγκρούσεων για κάθε σταθερό* $t$*.*

# Δένδρα Merkle

- Ο χρήστης υπολογίζει το $h = \mathcal{MT}_t(x_1, \ldots, x_t)$, ανεβάζει τα $x_1, \ldots, x_t$ στον server και αποθηκεύει το $h$ (και το $t$)
- Όταν ο χρήστης θέλει το $i$-οστό αρχείο, ο server του στέλνει το $x_i$ μαζί με μια "απόδειξη" $\pi_i$ ότι είναι το σωστό αρχείο
- Η απόδειξη αποτελείται από τις τιμές που είναι γειτονικές στο μονοπάτι από το $x_i$ προς τη ρίζα.

**Παράδειγμα** Έστω ότι ζητάει το $x_3$. Τότε ο server του στέλνει το $x_3$ μαζί και τα $x_4$, $h_{1..2}$, $h_{5..8}$

# Δένδρα Merkle

- Αν η $H$ είναι ελεύθερη συγκρούσεων, τότε είναι αδύνατο ο server να στείλει ψεύτικο αρχείο (και απόδειξη) που να επαληθεύεται.
- Ο χρήστης χρειάζεται σταθερό χώρο και $\mathcal{O}(\log t)$ επικοινωνία με τον server για να πάρει το αρχείο.
- Σημείωση: Συνήθως έχουμε τις hash τιμές των $x_i$ στα φύλλα του δένδρου.

# Χρήσεις συναρτήσεων σύνοψης

- Ψηφιακές υπογραφές. Σε συνδυασμό με αλγόριθμο υπογραφής, για επιτάχυνση της διαδικασίας. Παραδείγματα: MD5, που χρησιμοποιείται με RSA στο PGP, SHA-1 (τώρα SHA-2), που χρησιμοποιείται στο DSS (Digital Signature Standard), κ.ά.
- Έλεγχος γνησιότητας μηνύματος – αυθεντικοποίηση (με συμμετρικό κλειδί): keyed hash functions, π.χ. HMAC.
- Ακεραιότητα δεδομένων (με ή χωρίς κλειδί).
- Bitcoin: blockchain, proof of work, Merkle trees.
- Γεννήτριες ψευδοτυχαίων αριθμών (με random seed + counter).
- Stream ciphers, αλλά και block ciphers (SHACAL).