Κρυπτοσυστήματα Διακριτού Λογαρίθμου

Παναγιώτης Γροντάς - Άρης Παγουρτζής

ΕΜΠ - Κρυπτογραφία (2016-2017)

29/11/2016

Περιεχόμενα

Προβλήματα Διακριτού Λογαρίθμου Ι

DLP - Το πρόβλημα του Διακριτού Λογαρίθμου

Δίνεται μια κυκλική ομάδα $\mathbb{G} =< g >$ τάξης q και ένα τυχαίο στοιχείο $y \in \mathbb{G}$
Να υπολογιστεί $x \in \mathbb{Z}_q$ ώστε $g^x = y$
δηλ. το $log_g y \in \mathbb{Z}_q$

CDHP - Το υπολογιστικό πρόβλημα Diffie Hellman

Δίνεται μια κυκλική ομάδα $\mathbb{G} =< g >$, δύο στοιχεία
$y_1 = g^{x_1}, y_2 = g^{x_2}$
Να υπολογιστεί το $g^{x_1 \cdot x_2}$

Προβλήματα Διακριτού Λογαρίθμου ΙΙ

DDHP - Το πρόβλημα απόφασης Diffie Hellman

Δίνεται μια κυκλική ομάδα $\mathbb{G} =< g >$, δύο στοιχεία $y_1 = g^{x_1}, y_2 = g^{x_2}$ και κάποιο $y \in \mathbb{G}$
Να εξεταστεί αν $y = g^{x_1 \cdot x_2}$

ή ισοδύναμα

DDHP - Το πρόβλημα απόφασης Diffie Hellman

Δίνεται μια κυκλική ομάδα $\mathbb{G} =< g >$, δύο στοιχεία $y_1 = g^{x_1}, y_2 = g^{x_2}$ και κάποιο $y \in \mathbb{G}$
Μπορούμε να ξεχωρίσουμε τις τριάδες $(g^{x_1}, g^{x_2}, g^{x_1 x_2})$ και (g^{x_1}, g^{x_2}, y);

Σχέσεις Προβλημάτων

$CDHP \leq DLP$

Αν μπορούμε να λύσουμε το DLP, τότε μπορούμε να υπολογίζουμε τα x_1, x_2 από τα y_1, y_2 και στην συνέχεια το $g^{x_1 \cdot x_2}$

$DDHP \leq CDHP$

Αν μπορούμε να λύσουμε το $CDHP$, υπολογίζουμε το $g^{x_1 \cdot x_2}$ και ελέγχουμε ισότητα με το y

Δηλαδή: $DDHP \leq CDHP \leq DLP$

Επιλογή Ομάδας

- Καθορίζει τη δυσκολία του προβλήματος
- Δύο επιλογές:
  - $(\mathbb{Z}_p^*, \cdot)$ με p πρώτο (σε υποομάδα)
  - $(\mathcal{E}(\mathrm{F}_p), +)$
- Διαφορετική παράμετρος ασφάλειας
- Κατά τα άλλα ισοδύναμες

Αλγόριθμοι DLP

Brute Force

Για ομάδα $\mathbb{G} =< g >$ τάξης q λ bits

Δοκιμή όλων των $x \in \mathbb{Z}_q$ μέχρι να βρεθεί τέτοιο ώστε $g^x = y$

Πολυπλοκότητα $O(2^\lambda)$

Αλγόριθμος Baby step - Giant Step (Shanks)

Αλγόριθμος Meet-In-The Middle

- Ισχύει $x = ak - b,\ k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{Z}$
- $y = g^{ak} \cdot g^{-b} \Rightarrow yg^b = g^{ak}$
- Θα υπολογίζουμε yg^b και g^{ak} μέχρι να συναντηθούν
  - Ξεκινάμε στη 'μέση': $k = \lceil \sqrt{q} \rceil$
  - **Giant steps - μέγεθος** k:Υπολογίζουμε $g^{ak}, a \in \{0 \cdots \lceil \sqrt{q} \rceil - 1\}$ και αποθηκεύουμε σε πίνακα
  - **Baby steps - μέγεθος** 1: Υπολογίζουμε $yg^b, b \in \{0 \cdots \lceil \sqrt{q} \rceil - 1\}$ μέχρι να βρούμε το αποτέλεσμα στον παραπάνω πίνακα
  - $x = ak - b$

Πολυπλοκότητα χώρου και χρόνου: $O(2^{\frac{\lambda}{2}})$
Μείωση χώρου με αλγόριθμους Pollard (ρ, λ)

Παράδειγμα Baby step - Giant Step

Θέλουμε το $2^x = 17 \pmod{29}$ στο $\mathbb{Z}_{29}^* =< 2 >$

$\lceil \sqrt{29} \rceil = 6$

- $2^{0 \cdot 6} = 1 \pmod{29}$
- $2^{1 \cdot 6} = 6 \pmod{29}$
- $2^{2 \cdot 6} = 7 \pmod{29}$
- $2^{3 \cdot 6} = 13 \pmod{29}$
- $2^{4 \cdot 6} = 20 \pmod{29}$
- $2^{5 \cdot 6} = 4 \pmod{29}$

- $17 \cdot 2^0 = 17 \pmod{29}$
- $17 \cdot 2^1 = 5 \pmod{29}$
- $17 \cdot 2^2 = 10 \pmod{29}$
- $17 \cdot 2^3 = 20 \pmod{29}$

Άρα $x = 24 - 3 = 21$

Πράγματι: $2^{21} = 17 \pmod{29}$

Αλγόριθμος Pohlig-Hellman - Ιδέα

Παρατήρηση

Η δυσκολία του DLP σε μια ομάδα $\mathbb{G}$ εξαρτάται από τη δυσκολία του στις διάφορες υποομάδες της.

Πώς

Παραγοντοποίηση της τάξης
Για παράδειγμα στο $\mathbb{Z}_p^*$

$$p-1 = \prod_{i=1}^{m} p_i^{e_i} \text{ με } p_i \text{ πρώτο}$$

Smooth Number

Μπορεί να παραγοντοποιηθεί σε μικρούς πρώτους

Αλγόριθμος Pohlig-Hellman - Βήματα

Για κάθε μικρότερη ομάδα $(\mathrm{mod}\, p_i^{e_i})$

- Παρατηρούμε ότι $x_{p_i} = a_0 + a_1 p_i + \cdot + a_{e_i-1} p_i^{e_i-1} \pmod{p_i^{e_i}}$ με $a_j \in \{0, \cdots, p_i - 1\}$
- Πχ. αν παράγοντας του $p-1$ είναι το 4: $x_2 = a_0 + a_1 * 2 \pmod 4$
- Αποδεικνύεται (εύκολα) ότι: $y^{\frac{p-1}{p_i}} = g^{a_0 \frac{p-1}{p_i}} \pmod p$
- Υπολογισμός a_0 με δοκιμές ή με αλγόριθμο Shanks
- Δημιουργούμε ακολουθία y_j με $y_0 = y$
- $y_j = y \cdot g^{-(a_0 + a_1 p_i + \cdot + a_{j-1} {p_i}^{j-1})} \pmod p$
- Γενικεύοντας: $y_j^{\frac{p-1}{p_i^{j+1}}} = g^{a_j \frac{p-1}{p_i}}$ υπολογίζουμε το a_j
- Υπολογισμός για κάθε p_i : $a_0, y_1, a_1, y_2, \cdots a_{e_i-1}$
- Συνδυασμός λύσεων με CRT

Παράδειγμα Pohlig-Hellman I

Θέλουμε το $2^x = 17 \pmod{29}$ στο $\mathbb{Z}_{29}^* =< 2 >$

$28 = 2^2 7$

$x_2 = a_0 + 2a_1 \pmod 4$ και $x_7 = a_0 \pmod 7$

Υπολογισμός a_0 για το x_2

$y^{\frac{p-1}{2}} = g^{a_0 \frac{p-1}{2}} \Rightarrow 17^{14} = 28 = 2^{14 a_0} \pmod{29}$

Άρα $a_0 = 1$

Υπολογισμός y_1 για το x_2

$y_1 = y g^{-a_0} = 17 \cdot 2^{-1} = 17 * 15 = 23 \pmod{29}$

Παράδειγμα Pohlig-Hellman II

Υπολογισμός a_1 για το x_2

$y_1^{\frac{p-1}{4}} = g^{a_1 \frac{p-1}{2}} \Rightarrow 23^7 = 1 = 2^{14a_1} \pmod{29}$

Άρα $a_1 = 0$

Άρα $x_2 = 1 \pmod 4$

Υπολογισμός a_0 για το x_7

$y^{\frac{p-1}{7}} = g^{a_0 \frac{p-1}{7}} \Rightarrow 17^4 = 1 = 2^{4a_0} \pmod{29}$

Άρα $a_0 = 0$

Άρα $x_7 = 0 \pmod 7$

Από CRT: $x = 21$

Πιο αναλυτικό παράδειγμα

Δυσκολία DDHP I

Θεώρημα

Το DDHP δεν είναι δύσκολο στην $\mathbb{Z}_p^*$

Μπορεί να κατασκευαστεί αποδοτικός αλγόριθμος διαχωρισμού τριάδας DH g^a, g^b, g^{ab} από μια τυχαία τριάδα g^a, g^b, g^c.
Πώς: Χρησιμοποιώντας το σύμβολο Legendre.

Το σύμβολο Legendre διαρρέει το DLP parity

Από τον ορισμό: $(\frac{g^x}{p}) = (g^x)^{\frac{p-1}{2}}$
Όμως: $g^{p-1} = 1 \pmod p$
Άρα: $g^{\frac{p-1}{2}} = -1 \pmod p$
Δηλαδή: $(\frac{g^x}{p}) = (-1)^x$
Αν x μονός τότε $(\frac{g^x}{p}) = -1$ $(g^x \notin QR)$
Αν x ζυγός τότε $(\frac{g^x}{p}) = 1$ $(g^x \in QR)$

Δυσκολία DDHP II

Για τυχαία τριάδα $Prob[(\frac{g^c}{p}) = 1] = \frac{1}{2}$ ανεξάρτητο από τα $(\frac{g^a}{p}), (\frac{g^b}{p})$

Για τριάδα DH: $Prob[(\frac{g^{ab}}{p}) = 1] = \frac{3}{4}$

Ο αλγόριθμος

Υπολόγισε $\frac{g^c}{p}, \frac{g^b}{p}, \frac{g^c}{p}$

Αν $\frac{g^c}{p} = 1$ και $(\frac{g^a}{p} = 1$ ή $\frac{g^b}{p} = 1)$ τότε

  Επιστροφή "Diffie Hellman"

Αλλιώς

  Επιστροφή "Τυχαία"

Πλεονέκτημα: $\frac{3}{8}$ (γιατί;)

ΜΗ ΑΜΕΛΗΤΕΟ

Επιλογή του $\mathbb{G}$

Συνέπειες

Δουλεύουμε σε μεγάλη υποομάδα του $\mathbb{Z}_p^*$ με τάξη πρώτο q

Για παράδειγμα:

Επιλογή safe prime: $p = 2q + 1$ με q πρώτο
Δουλεύουμε στην υποομάδα τετραγωνικών υπολοίπων τάξης q
Επιλογή schnorr primes $p = k \cdot q + 1$ με q πρώτο
Παρ' όλα αυτά: Υποεκθετικοί αλγόριθμοι (index calculus)

Μεγέθη

Symmetric Security	$\lvert p\rvert$	$\lvert q\rvert$
80 bits	1024	160
112 bits	2048	224
128 bits	3072	256

Εναλλακτικά: Ελλειπτικές καμπύλες

Ορισμός ElGamal

Δημιουργία Κλειδιών: $KeyGen(1^\lambda) = (y = g^x, x)$

- Επιλογή δύο μεγάλων πρώτων p, q ώστε $q \mid (p-1)$
- Δουλεύουμε στην υποομάδα τάξης q του $\mathbb{Z}_p^*$ G με γεννήτορα g
- Επιλογή τυχαίου $x \in \mathbb{Z}_q$
- Υπολογισμός $y = g^x \bmod p$
- Επιστροφή (y, x)

Κρυπτογράφηση

- Επιλογή τυχαίου $r \in \mathbb{Z}_q$
- $\texttt{Encrypt}(y, r, m) = (g^r \bmod p, m \cdot y^r \bmod p)$

Αποκρυπτογράφηση

- $\texttt{Decrypt}(x, (a, b)) = \frac{b}{a^x}$

Ορθότητα

$$\texttt{Decrypt}(x, \texttt{Encrypt}(y, r, m)) = \frac{my^r}{(g^r)^x} = m$$

Πρακτικά Θέματα

Πιθανοτική Κρυπτογράφηση: Ένα μήνυμα έχει πολλά πιθανά κρυπτοκείμενα
Message expansion Κρυπτοκείμενο διπλάσιο του μηνύματος

Επιτάχυνση Κρυπτογράφησης

Κόστος: 2 υψώσεις σε δύναμη - 1 πολλαπλασιασμός
Ύψωση σε δύναμη:Δεν εξαρτάται από το μήνυμα (precomputation)

Ασφάλεια Κρυπτογράφησης

ElGamal ≡CDHP

Αντιστοιχία δημοσίων στοιχείων $g^{x_1} \equiv g^r$

$g^{x_2} \equiv y = g^x$

Υπολογισμός $g^{x_1 x_2} \rightarrow$ αποκρυπτογράφηση

Αν δεν μπορώ να αποκρυπτογραφήσω (χωρίς το κλειδί)

$\rightarrow$ δεν μπορώ να λύσω το *CDHP*

Επανάληψη τυχαιότητας $\rightarrow$ Επίθεση KPA

KPA: Γνωρίζουμε ζεύγη μηνυμάτων - κρυπτοκειμένου

Επίθεση

$(c_r, c_1) = \texttt{Encrypt}(y, r, m_1) = (g^r \bmod p, m_1 \cdot y^r \bmod p)$
$(c_r, c_2) = \texttt{Encrypt}(y, r, m_2) = (g^r \bmod p, m_2 \cdot y^r \bmod p)$

Αν γνωρίζω το (m_1, c_1): $c_1 = m_1 \cdot y^r \bmod p \Rightarrow y^r = c_1 \cdot m_1^{-1}$

Μπορώ να υπολογίσω το m_2 ως: $m_2 = \frac{c_2}{y^r} = \frac{c_2}{c_1 \cdot m_1^{-1}}$

Ασφάλεια σε επιθέσεις CPA I

Θεώρημα

Αν το DDHP είναι δύσκολο, τότε το κρυπτοσύστημα El Gamal διαθέτει ασφάλεια IND-CPA.

Απόδειξη:
Έστω ότι το ElGamal δεν διαθέτει ασφάλεια IND-CPA.
Άρα $\exists\ \mathcal{A}$, ο οποίος μπορεί να νικήσει στο παιχνίδι CPA με μη αμελητέα πιθανότητα.
Κατασκευή $\mathcal{B}$:

- Είσοδος: τριάδα στοιχείων
- Εσωτερικά: Προσομοίωση του $\mathcal{C}$ στο παιχνίδι CPA και χρήση $\mathcal{A}$
- Αποτέλεσμα: Ξεχωρίζει DH τριάδα από τυχαία

Ασφάλεια σε επιθέσεις CPA II

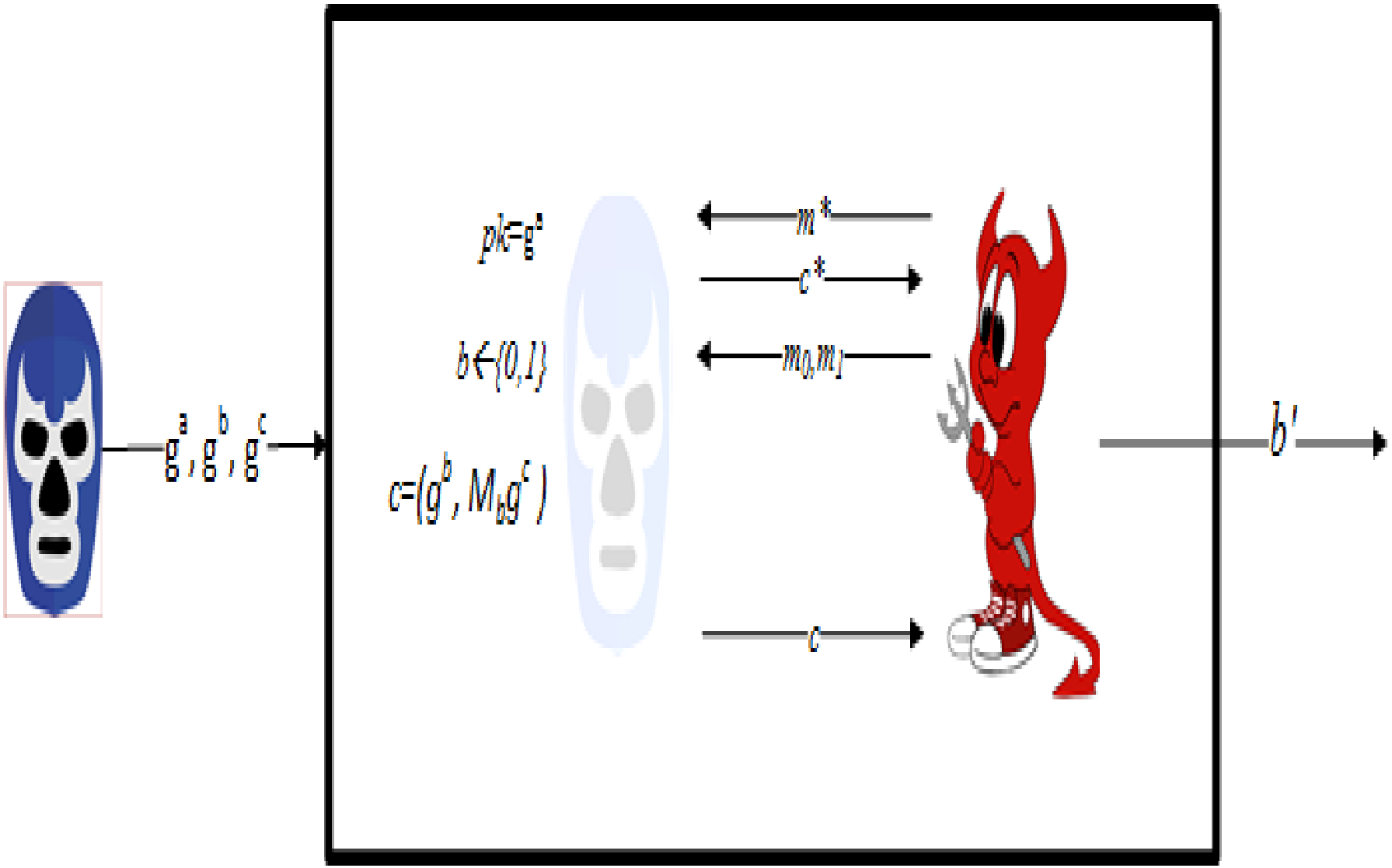
- Είσοδος: $g^{\alpha}, g^{\beta}, g^{c}$
- Στο CPA-GAME δημόσιο κλειδί $y = g^{\alpha}$
- Ο $\mathcal{B}$ απαντά στις κρυπτογραφήσεις του $\mathcal{A}$
- Όταν ο $\mathcal{A}$ προκαλέσει με δύο μηνύματα
  - ο $\mathcal{C}$ διαλέγει τυχαίο $bit \in \{0, 1\}$,
  - κρυπτογραφεί το M_b με τυχαιότητα το g^{β} και πολλαπλασιάζει με g^{c}
  - Τελικά στέλνει το: $(g^{\beta}, M_b \cdot g^{c})$
- Ο $\mathcal{A}$ επιστρέφει την τιμή του bit^*
- Ο $\mathcal{B}$ εξάγει το bit^*

Ασφάλεια σε επιθέσεις CPA III

Ανάλυση

- Για τριάδα DH: $g^c = (g^\alpha)^\beta = y^\beta$
- ο $\mathcal{A}$ θα λάβει ένα έγκυρο κρυπτοκείμενο ElGamal.
- Η πιθανότητα να μαντέψει σωστά είναι τουλάχιστον: $1/2 + \text{non-negl}(\lambda)$.
- Για τυχαία τριάδα: ο $\mathcal{A}$ θα πρέπει να μαντέψει τυχαία
- Πιθανότητα επιτυχίας: $\frac{1}{2}$.
- Τελική πιθανότητα επιτυχίας για $\mathcal{B}$ τουλάχιστον non-negl(λ)
- Μπορεί να ξεχωρίσει μία DH τριάδα από μία τυχαία με μη αμελητέα πιθανότητα.

Ασφάλεια σε επιθέσεις CPA IV



Ομομορφικές Ιδιότητες Ι

Πολλαπλασιαστικός Ομομορφισμός

$$\begin{aligned}
\texttt{Encrypt}(y, r_1, m_1) \cdot \texttt{Encrypt}(y, r_2, m_2) = \\
(g_1^r, m_1 y^{r_1}) \cdot (g_2^r, m_2 y^{r_2}) = \\
(g^{r_1+r_2}, (m_1 \cdot m_2) \cdot y^{r_1+r_2}) = \\
\texttt{Encrypt}(y, r_1 + r_2, m_1 m_2)
\end{aligned}$$

Ομομορφικές Ιδιότητες II

Reencryption

$$\begin{aligned}\texttt{Encrypt}(y, r_1, m) \cdot \texttt{Encrypt}(y, r_2, 1) = \\ (g^{r_1}, my^{r_1}) \cdot (g^{r_2}, y^{r_1}) = \\ (g^{r_1+r_2}, my^{r_1+r_2}) = \texttt{Encrypt}(y, r_1 + r_2, m)\end{aligned}$$

Αλλαγή της τυχαιότητας - Αλλαγή της μορφής του μηνύματος
...χωρίς γνώση του ιδιωτικού κλειδιού
Malleability

Ομομορφικές Ιδιότητες III

Προσθετικός Ομομορφισμός - Εκθετικό ElGamal

Κρυπτογράφηση του g^m
$\texttt{Encrypt}'(y, r, m) = (g^r, g^m y^r)$

$$\begin{aligned}\texttt{Encrypt}'(y, r_1, m_1) \cdot \texttt{Encrypt}'(y, r_1, m_1) = \\ (g_1^r, g^{m_1} y^{r_1}) \cdot (g_2^r, g^{m_2} y^{r_2}) = \\ (g^{r_1+r_2}, g^{m_1+m_2} \cdot y^{r_1+r_2}) = \\ \texttt{Encrypt}(y, r_1 + r_2, (m_1 + m_2))\end{aligned}$$

Αποκρυπτογράφηση: Λαμβάνουμε το g^m
Επίλυση 'εύκολου' διακριτού λογαρίθμου.

Ασφάλεια σε επιθέσεις CCA

Το παραδοσιακό ElGamal δεν διαθέτει CCA-security

Έστω ότι ο $\mathcal{A}$ μπορεί να αποκρυπτογραφήσει μηνύματα επιλογής του, εκτός του c.

- Στόχος: Αποκρυπτογράφηση του $c = (G, M) = (g^r, m_b y^r)$
- Κατασκευή
  $c' = (G', M') = (G \cdot g^{r'}, M \cdot a y^{r'}) = (g^{r+r'}, a \cdot m_b \cdot y^{r+r'})$,
  όπου a επιλέγεται από τον $\mathcal{A}$
- Η αποκρυπτογράφηση του M' $(\frac{M'}{G'^x})$ δίνει το am_b και κατά συνέπεια το m_b
- Αν $m_b = m_0$ επιστρέφει $b^* = 0$ αλλιώς επιστρέφει $b^* = 1$

ElGamal CCA2: Cramer-Shoup cryptosystem I

- Ronald Cramer, Victor Shoup, Crypto 1998
- Επέκταση του ElGamal
- Χρηση συνάρτησης σύνοψης $\mathcal{H}$ με collision resistance (δεν είναι απαραίτητη)
- Αν ισχυει η υπόθεση DDH, τότε παρέχει IND-CCA2

Δημιουργία Κλειδιών

ElGamal CCA2: Cramer-Shoup cryptosystem II

- Επιλογή πρώτων p, q με $p = 2q + 1$
- G ειναι η υποομάδα ταξης q στο $\mathbb{Z}_p^*$
- Επιλογή random generators g_1, g_2
- Επιλογή τυχαίων στοιχείων $x_1, x_2, y_1, y_2, z \in \mathbb{Z}_q$
- Υπολογισμός
  - $c = g_1^{x_1} g_2^{x_2}$
  - $d = g_1^{y_1} g_2^{y_2}$
  - $h = g_1^z$
- Δημόσιο Κλειδί: (c, d, h)
- Μυστικό Κλειδί: (x_1, x_2, y_1, y_2, z)

ElGamal CCA2: Cramer-Shoup cryptosystem III

Κρυπτογράφηση

- Κωδικοποίηση μηνύματος m στο G
- Επιλογή τυχαίου $r \in \mathbb{Z}_q$
- Υπολογισμός
  - $u_1 = g_1^r, u_2 = g_2^r$
  - $e = mh^r$
  - $\alpha = \mathcal{H}\ (u_1||u_2||e)$
  - $v = c^r d^{r\alpha}$
- Κρυπτογράφημα: (u_1, u_2, e, v)

ElGamal CCA2: Cramer-Shoup cryptosystem IV

Αποκρυπτογράφηση

- Υπολογισμός $\alpha = \mathcal{H}\ (u_1||u_2||e)$
- Έλεγχος αν $u_1^{x_1} u_2^{x_2} (u_1^{y_1} u_2^{y_2})^{\alpha} = v$. Σε περίπτωση αποτυχίας έξοδος χωρίς αποκρυπτογράφηση
- Σε περιπτωση επιτυχίας υπολογισμός $m = \frac{e}{u_1^z}$

ElGamal CCA2: Cramer-Shoup cryptosystem V

Ορθότητα

$$\frac{e}{u_1^z} = \frac{mh^r}{u_1^z} = m \cdot \frac{g_1^{zr}}{g_1^{rz}} = m$$

- h, z αντιστοιχούν σε δημόσιο - ιδιωτικό κλειδί ElGamal
- u_1, e αντιστοιχούν στο κρυπτογράφημα του ElGamal

Παρατηρήσεις

- u_2, v λειτουργούν ως έλεγχος ακεραιότητας, ώστε να μπορεί να αποφευχθεί το malleability
- Διπλάσια πολυπλοκότητα από ElGamal τόσο σε μέγεθος κρυπτοκειμένου, όσο και σε υπολογιστικές απαιτήσεις

DLP-based Commitment Schemes

Επανάληψη

- Coin Flipping over the telephone
- Λύση: Commitment Schemes
  - **Hiding** - Προστατεύει αποστολέα - καθώς δεν μπορεί να διαρρεύσει η τιμή του
  - **Binding** - Προστατεύει παραλήπτη - καθώς ο αποστολέας δεν μπορεί να αλλάξει την τιμή του εκ των υστέρων
- Χρήση randomisation για προστασία από brute-force επιθέσεις

Pedersen commitment

- Επιλογή ομάδας με δύσκολο DLP από TTP
  - Επιλογή πρώτου q ώστε $p = 2q + 1$ πρώτος
  - $\mathbb{G} =< g >$ υπομάδα τάξης q του $\mathbb{Z}_p^*$
  - Επιλογή $x \in \mathbb{Z}_q$ και $h = g^x$
  - Δημοσιοποίηση $g, \mathbb{G}, p, q, h$
- Δέσμευση: $c = commit(m, r) = g^m \cdot h^r \bmod p$
- Αποκάλυψη: Αποστολή m, r
- Επαλήθευση: $c =_? g^m \cdot h^r$

Ιδιότητες Ι

Information Theoretically Hiding

$c = g^m \cdot h^r \bmod p = g^{m+xr} \bmod p$

Ακόμα και ένας παντοδύναμος αντίπαλος να μπορεί να λύσει το DLP θα έχει μία εξίσωση της μορφής

$d = m + xr \pmod q$

(2 άγνωστοι m, r - 1 εξίσωση)

Ιδιότητες II

Computationally Binding αν το DLP είναι δύσκολο

Έστω $c = commit(m, r) = commit(m', r')$ με $m \neq m'$

$$
\begin{aligned}
g^m \cdot h^r = g^{m'} \cdot h^{r'} &\Rightarrow \\
g^{m+xr} = g^{m'+xr'} &\Rightarrow \\
m + xr = m' + xr' \pmod{q} &\Rightarrow \\
x = \frac{m' - m}{r - r'} &
\end{aligned}
$$

ΑΤΟΠΟ

Ελλειπτικές καμπύλες

Γενικά

- Πλούσιο σε ιστορία μαθηματικό αντικείμενο (200 έτη)
- Κρυπτογραφία: 80s
- Βασίζονται στο πρόβλημα DLP
  - Αντικατάσταση του $\mathbb{Z}_p$ με σημεία τους
  - Μόνο γενικευμένοι αλγόριθμοι DLP $O(2^{\frac{\lambda}{2}})$ - όχι υποεκθετικοί
  - Ίδια επίπεδα ασφάλειας με μικρότερη παράμετρο ασφάλειας και καλύτερη απόδοση

RSA	EC
1024	160
2048	224
3072	256

Γενική μορφή

Έστω $\mathbb{F}$ ένα σώμα.

Ορισμός $\mathcal{E}(\mathbb{F})$

Μια ελλειπτική καμπύλη $\mathcal{E}$ πάνω από το $\mathbb{F}$ είναι το σύνολο των σημείων $(x, y) \in \mathbb{F}$, που ικανοποιούν την εξίσωση Weierstrass

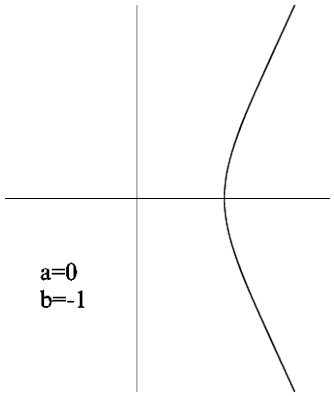
$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$$
$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \in \mathbb{F}$$

και ένα στοιχείο $\mathcal{O}$, - *σημείο στο άπειρο*

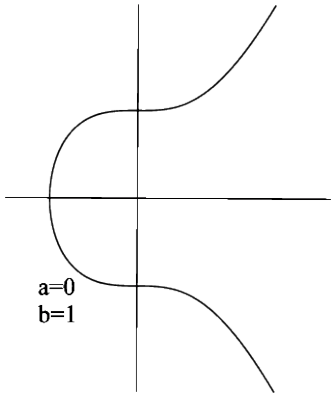
Πρακτικά

$y^2 = x^3 + ax + b, \quad a, b \in \mathbb{F}$

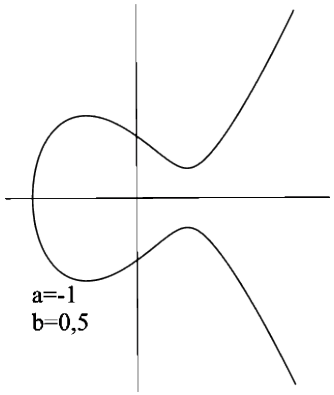
Ελλειπτικές καμπύλες στο $\mathbb{R}$ I



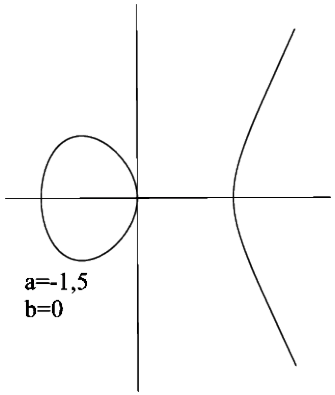
$y^2 = x^3 - 1$



$y^2 = x^3 + 1$



$y^2 = x^3 - x + \frac{1}{2}$



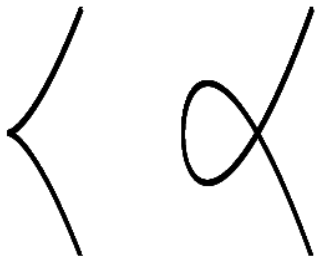
$y^2 = x^3 - \frac{3}{2}x$

Ελλειπτικές καμπύλες στο $\mathbb{R}$ II

Παρατηρήσεις:

- Συμμετρία ως προς άξονα x
- Συμπίεση σημείου $(x, 0)$ ή $(x, 1)$ για πάνω ή κάτω από τον άξονα των x

Προς αποφυγή Singular καμπύλες: Πολλαπλές ρίζες, σημεία τομής



Πρέπει $4a^3 + 27b^2 \neq 0$

Αντίθετο Σημείου

P σημείο στην $\mathcal{E}(\mathbb{R})$.

Το αντίθετο σημείο $-P$

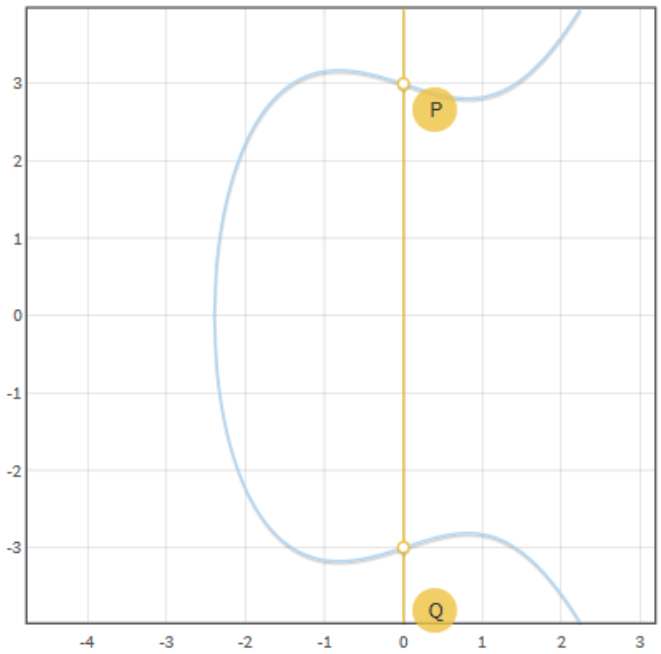
1. Αν $P = \mathcal{O}$, τότε $-P = \mathcal{O}$
2. Αλλιώς αν $P = (x, y)$ τότε $-P = (x, -y)$
   (ανήκει στην $\mathcal{E}$ λόγω συμμετρίας)

(Γεωμετρική) Πρόσθεση Σημείων Ι

Το άθροισμα $P + Q$

Αν $P = \mathcal{O}$, τότε $\mathcal{O} + Q = Q$

Αν $Q = -P$, τότε $P + Q = \mathcal{O}$.

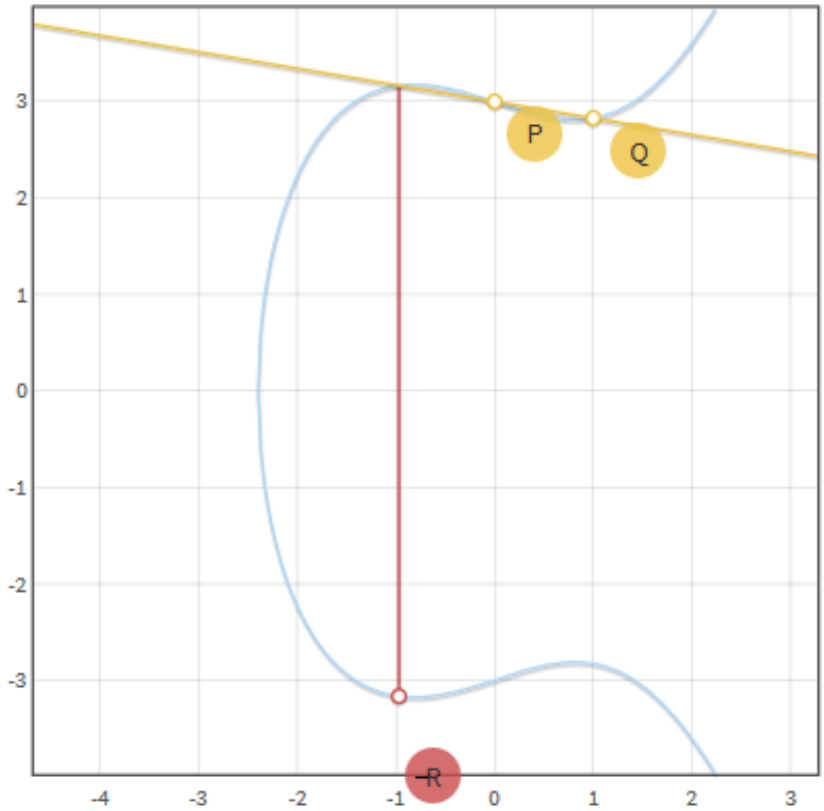


Το σημείο $\mathcal{O}$. υπάρχει σε **κάθε κατακόρυφη**

(Γεωμετρική) Πρόσθεση Σημείων II

Αν $P \neq Q$ τότε:

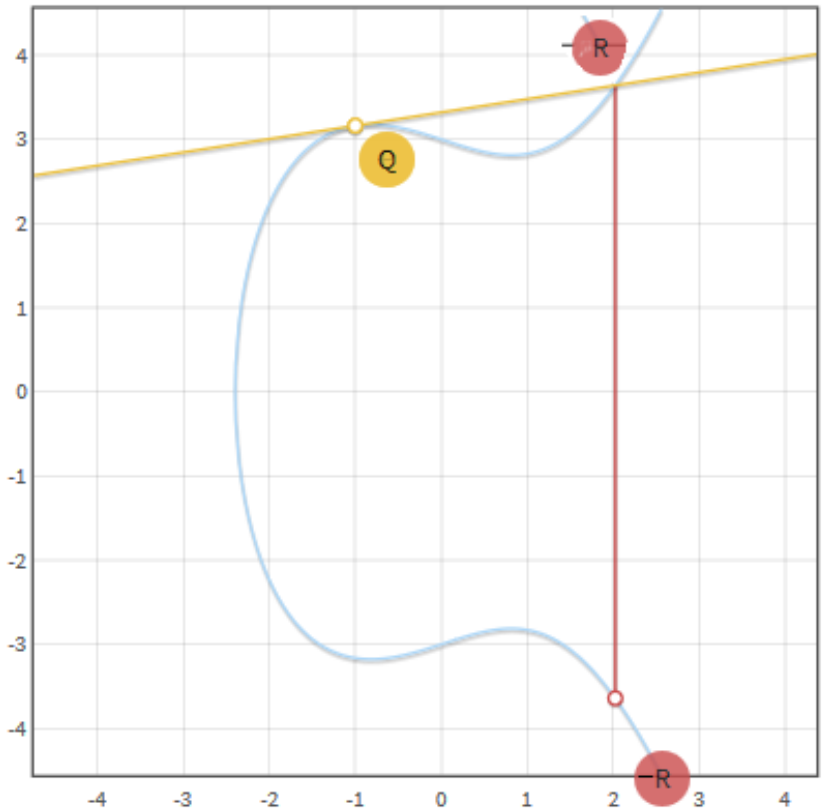
- Θεωρούμε την $\overline{PQ}$
- Βρίσκουμε το σημείο τομής R με την $\mathcal{E}$.
- Βρίσκουμε το αντίθετο



(Γεωμετρική) Πρόσθεση Σημείων III

Αν $P = Q$ τότε:

- Θεωρούμε την εφαπτομένη στο P
- Βρίσκουμε το σημείο τομής R με την $\mathcal{E}$.
- Βρίσκουμε το αντίθετο



Αλγεβρική αναπαράσταση: Τριτοβάθμιες εξισώσεις με συντεταγμένες

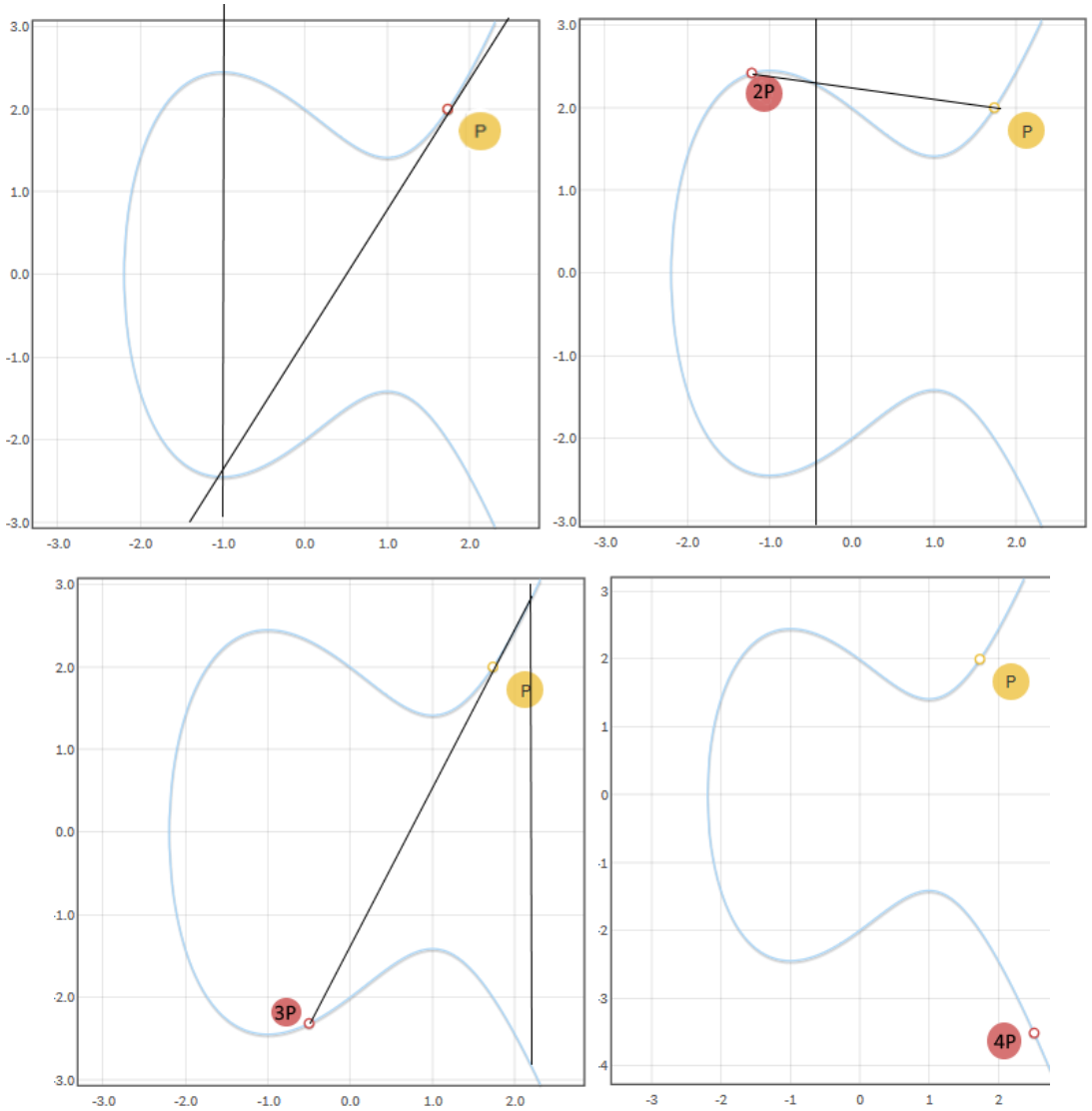
Ομάδα Σημείων Ελλειπτικής καμπύλης

Τα σημεία μιας ελλειπτικής καμπύλης αποτελούν αβελιανή ομάδα ως προς την πρόσθεση

- ουδέτερο στοιχείο $\mathcal{O}$
- αντίθετο στοιχείο $-P$
- πρόσθεση προσεταιριστική και αντιμεταθετική

Πολλαπλασιασμός σημείου με ακέραιο

$$nP = P + P + \cdots + P$$



Double and add

Υπολογισμός nP

Απαιτούνται $n-1$ προσθέσεις

Λύση: Square and multiply - Double and add

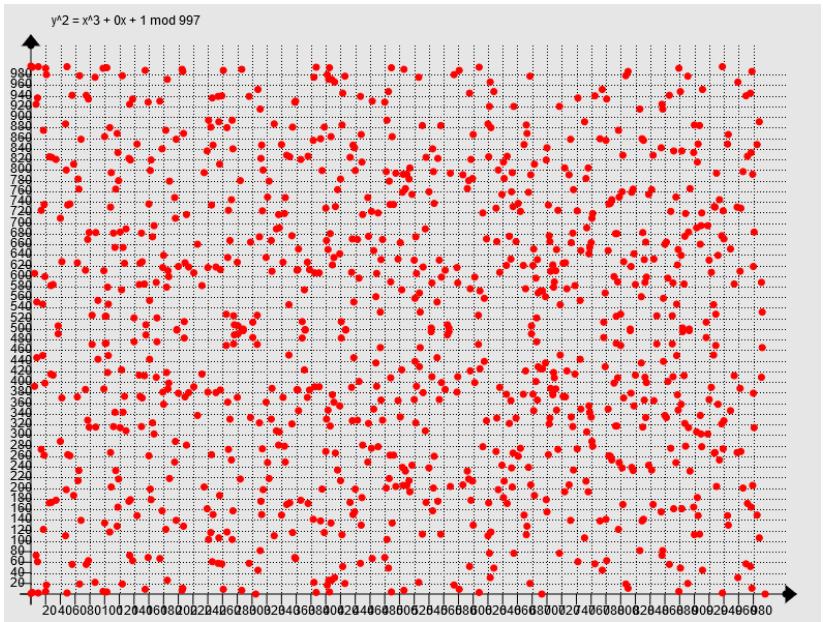
$$17P = P + 16P$$
$$2P = P + P$$
$$4P = 2P + 2P$$
$$8P = 4P + 4P$$
$$16P = 8P + 8P$$

Ελλειπτικές καμπύλες πάνω από το $\mathbb{F}_p$

Ορισμός $\mathcal{E}(\mathbb{F}_p)$

$$\mathcal{E} = \mathcal{O} \cup \{y^2 = x^3 + ax + b \pmod{p},$$
$$(x, y) \in \mathbb{F}_p^2, (a, b) \in \mathbb{F}_p^2 : 4a^3 + 27b^2 \neq 0 \pmod{p}\}$$

Παράδειγμα: $y^2 = x^3 + 1 \pmod{997}$



από Discrete Elliptic Curve Plotter

Η ομάδα των σημείων $\mathcal{E}(\mathbb{F}_p)$ Ι

Εύρεση τάξης ομάδας

Εκθετικός αλγόριθμος

Δοκιμές όλων των $x \in \{0, \cdots, p-1\}$
Έλεγχος ποια ικανοποιούν την εξίσωση της καμπύλης

Θ. Hasse

$$p + 1 - 2\sqrt{p} \leq |\mathcal{E}(\mathbb{F}_p)| \leq p + 1 + 2\sqrt{p}$$

Υπολογισμός: αλγόριθμος Schoof $\in$ P με βελτιώσεις Elkiens, Atkin (SEA)

Η ομάδα των σημείων $\mathcal{E}(\mathbb{F}_p)$ II

Κυκλικές υποομάδες

Κάθε σημείο μιας καμπύλης $\mathcal{E}(\mathbb{F}_p)$ παράγει μια κυκλική υποομάδα

Υπολογισμός τάξης υποομάδας $\mathcal{E}(\mathbb{F}_p)$

Θεώρημα Lagrange:Η τάξη κάθε υποομάδας διαιρεί την τάξη της ομάδας

Τάξη υποομάδας με σημείο βάσης (γεννήτορα) P

- Εύρεση τάξη ομάδας με αλγόριθμο Schoof
- Εύρεση των διαιρετών της τάξης, d
- Για σημείο βάσης P εύρεση $min\{d : dP = \mathcal{O}\}$

Η ομάδα των σημείων $\mathcal{E}(\mathbb{F}_p)$ III

Εύρεση σημείων βάσης

Θέλουμε γεννήτορες μεγάλων υποομάδων

- Ευρεση μεγάλου πρώτου $q \mid |\mathcal{E}|$
- Υπολογισμός $h = \frac{|\mathcal{E}|}{q}$
- Επιλογή τυχαίου σημείου P
- Υπολογισμός $G = hP$
- Αν $G = \mathcal{O}$ επανάληψη

Πρόβλημα ECDLP

Δίνονται:

- Μία ελλειπτική καμπύλη $\mathcal{E}$ ορισμένη πάνω από το $\mathbb{F}_p$ $(p, a, b, \#\mathcal{E})$
- Μία μεγάλη υποομάδα της με τάξη q
- ένα σημείο βάσης G και
- ένα σημείο Y.

Ζητείται: Να βρεθεί, αν υπάρχει, ακέραιος x τέτοιος ώστε $xG = Y$.

Εικασία

Το πρόβλημα ECDLP είναι υπολογιστικά απρόσιτο (όχι σε κάθε καμπύλη)

Ανταλλαγή Κλειδιού ECDH I

Στόχοι

- Κατασκευή κοινού κλειδιού πάνω από δημόσιο κανάλι επικοινωνίας
- Σε EC: Το κοινό κλειδί είναι σημείο της καμπύλης
- Δημόσια επικοινωνία και συμφωνία σε σημείο P μιας ελλειπτικής καμπύλης $\mathcal{E}$

Δημόσια Διαθέσιμες Παράμετροι: $(p, a, b, \#\mathcal{E}, q, G)$

Ανταλλαγή Κλειδιού ECDH II

Πρωτόκολλο

- Η Alice επιλέγει έναν ακέραιο $a \in \{1, \cdots, q-1\}$
- Υπολογίζει το $aG \in \mathcal{E}$ και το δημοσιοποιεί.
- Ο Bob επιλέγει έναν ακέραιο $b \in \{1, \cdots, q-1\}$ και δημοσιοποιεί το $bG \in \mathcal{E}$
- Το δημόσιο κλειδί που θα χρησιμοποιούν στη συνέχεια είναι το $P = a(bG) = b(aG) \in \mathcal{E}$

Κρυπτογραφία Δημοσίου Κλειδιού

Παραλλαγή Κρυπτοσυστήματος ElGamal

Δημιουργία κλειδιών

- Δημόσια Διαθέσιμες Παράμετροι: $(p, a, b, \#\mathcal{E}, q, G)$
- Ιδιωτικό κλειδί: Ένας τυχαίος ακέραιος $x \in \{1, \cdots, q-1\}$
- Δημόσιο κλειδί: Το σημείο $Y = xG \in \mathcal{E}$

Κρυπτογράφηση

- Κωδικοποίηση μηνύματος ως σημείο P_m της $\mathcal{E}$
- Επιλέγεται ένας τυχαίος ακέραιος $k \in \{1, \cdots, q-1\}$
- Κρυπτογράφημα: $\texttt{Encrypt}(Y, P_m) = (kG, P_m + kY)$

Αποκρυπτογράφηση

- Υπολογισμός

$$P_m + kY - x(kG) = P_m$$

Κωδικοποίηση μηνύματος σε σημείο

- Hashed Elgamal
  - 1ος τρόπος
    - Χρήση συνάρτησης $\mathcal{H} : \mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{M}$
    - Κρυπτογράφηση: $\texttt{Encrypt}(Y, P_m) = (kG, m \oplus \mathcal{H}(kY))$
  - 2ος τρόπος
    - Επιλογή τυχαίου α και αντικατάσταση των bits χαμηλής τάξης του με το m
    - Επιλογή ενός από τα δύο πιθανά σημεία της καμπύλης

Πρότυπες καμπύλες

Πρότυπο NIST FIPS186-3

15 ελλειπτικές καμπύλες. Για παράδειγμα:

- **NIST P-256** $y^2 = x^3 - 3x + 41\,058\,363\,725\,152\,142\,129\,326\,129\,780\,047\,268\,409\,114\,441\,015\,993\,725\,554\,835\,256\,314\,039\,467\,401\,291 \mod (2^{256} - 2^{224} + 2^{192} + 2^{96} - 1)$
  Χρήση στην γεννήτρια τυχαιότητας Dual_EC_DRBG.
- **NIST P-384** $y^2 = x^3 - 3x + 27\,580\,193\,559\,959\,705\,877\,849\,011\,840\,389\,048\,093\,056\,905\,856\,361\,568\,521\,428\,707\,301\,988\,689\,241\,309\,860\,865\,136\,260\,764\,883\,745\,107\,765\,439\,761\,230\,575 \mod (2^{384} - 2^{128} - 2^{96} + 2^{32} - 1)$

Φόβοι για υπονόμευση

Εναλλακτικά:
Secp256k1 (OpenSSL, Bitcoin) $y^2 = x^3 + 0x + 7 \mod (2^{256} - 2^{32} - 977)$
Curve25519 (OpenSSH) $y^2 = x^3 + 486662 \cdot x^2 + x \mod (2^{255} - 19)$

Επιλογή Καμπύλης

Το ECDLP δεν είναι δύσκολο σε όλες τις καμπύλες

Δίνεται μια καμπύλη $(p, a, b, \#\mathcal{E}, q, G)$

Πρόβλημα: Είναι ασφαλής (;)

Επαληθευσιμότητα

- Επιλογή τυχαίου αριθμού s
- Υπολογισμός $h = \mathcal{H}(s)$
- Παραγωγή των a, b από το h
- Επαληθευσιμο, αλλιώς a, b από αντιστροφή της σύνοψης

Αλλά: Πρέπει το s να είναι πραγματικά τυχαίο!

Nothing up my sleeve

Το s προέρχεται από ψηφία του π, e,τριγωνομετρικών αριθμών

Βιβλιογραφία I

- St. Zachos and Aris Pagourtzis. Στοιχεία Θεωρίας Αριθμών και Εφαρμογές στην Κρυπτογραφία. Πανεπιστημιακές Σημειώσεις
- Jonathan Katz and Yehuda Lindell. Introduction to Modern Cryptography (Chapman and Hall/Crc Cryptography and Network Security Series). Chapman and Hall/CRC, 2007
- Nigel Smart. Introduction to cryptography
- Paar, Christof, and Jan Pelzl. Understanding cryptography: a textbook for students and practitioners. Springer Science-Business Media, 2009.
- Kiayias, Aggelos Cryptography primitives and protocols, UoA, 2015
- Dan Boneh, Introduction to cryptography, online course

- Neal Koblitz and Alfred J. Menezes, A riddle wrapped in an enigma
- Jeremy Kun Introducing Elliptic Curves
- Andrea Corbellini Elliptic Curve Cryptography: a gentle introduction
- Torben Pryds Pedersen. Non-interactive and information-theoretic secure verifiable secret sharing. In CRYPTO '91, pages 129–140, 1991
- Victor Shoup Why chosen ciphertext security matters, 1998
- DR Stinson The Pohlig - Hellman Algorithm