Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Εργαστήριο Λογικής και Επιστήμης Υπολογισμών

# Θεωρητική Πληροφορική Ι - Υπολογιστική Πολυπλοκότητα
# 1η Σειρά Ασκήσεων

Διδάσκοντες: Ε. Ζάχος, Α. Παγουρτζής
Χειμερινό Εξάμηνο 2019-2020

**Η παράδοση της εργασίας:**
**- γίνεται ηλεκτρονικά στην *σελίδα* του μαθήματος (παράδοση με e-mail δεν θα γίνει αποδεκτή)**
**- πρέπει να γίνει μέχρι και τις 12/11/2019.**

**Είναι αποδεκτό (και σε ορισμένες ασκήσεις απαραίτητο) να αναζητήσετε σχετική βιβλιογραφία και πηγές, είναι όμως απαραίτητο να παραθέσετε αναφορές για ο,τιδήποτε χρησιμοποιήσετε.**
**Η μη αναφορά των πηγών συνιστά *λογοκλοπή*, πρακτική ακαδημαϊκά ανεπίτρεπτη με συνέπειες στην βαθμολόγηση της εργασίας.**

## Άσκηση 1

α΄. Περιγράψτε αναγωγή του προβλήματος εύρεσης κύκλου Hamilton ($S_{HC}$) στο πρόβλημα (απόφασης) ύπαρξης κύκλου Hamilton ($D_{HC}$). Δηλαδή, υποθέτοντας ότι σας δίνουν έτοιμο (black-box) έναν αλγόριθμο πολυωνυμικού χρόνου για το $D_{HC}$, δώστε έναν αλγόριθμο πολυωνυμικού χρόνου για το $S_{HC}$.

β΄. Δώστε ένα ισοδύναμο πρόβλημα απόφασης για το πρόβλημα `FACTORING` (δηλαδή ένα πρόβλημα απόφασης στο οποίο μπορεί να αναχθεί το `FACTORING`). Εξηγήστε γιατί τα δύο προβλήματα είναι πολυωνυμικά ισοδύναμα.

## Άσκηση 2

Αποδείξτε με αναγωγή από το `Halting Problem` ότι οι παρακάτω γλώσσες δεν είναι αναδρομικές:

α΄. $\{M; x \mid \text{The computation of } M \text{ on input } x \text{ uses all states of } M\}$

β΄. $\{M; x \mid M \text{ accepts } x\}$

γ΄. $\{M; x; y \mid M(x) = y\}$

## Άσκηση 3

Κατασκευάστε Μηχανή Turing που να υπολογίζει την συνάρτηση:

$$f(n_1, \ldots, n_k) = \min\{n_1, \ldots, n_k\}$$

όπου το $k$ δεν είναι σταθερό, π.χ. $f(1, 3, 5, 7) = 1$, $f(3, 6, 3, 6, 6, 4, 6) = 3$ κλπ.

## Άσκηση 4

α′. Δείξτε ότι **NP** $\neq$ **DSPACE**$[n]$.
*Υπόδειξη:* Δεν γνωρίζουμε αν κάποια από τις δύο κλάσεις περιέχει την άλλη. Προσπαθήστε να αποδείξετε το ζητούμενο χρησιμοποιώντας κάποια ιδιότητα κλειστότητας που έχει μόνο μία από τις δύο κλάσεις.

β′. Δείξτε ότι η κλάση **NP** είναι κλειστή ως προς τις logspace και τις Karp αναγωγές. Ισχύει το ίδιο και για την κλάση **DTIME**$[n^2]$?

## Άσκηση 5

Δείξτε ότι αν η γλώσσα $L \subseteq \Sigma^*$ είναι πεπερασμένη, τότε $L \in$ **DTIME**$[n]$.

## Άσκηση 6

α′. Έστω $L_1,\ L_2 \in$ **NP**. Δείξτε ότι η κλάση **NP** είναι κλειστή ως προς την ένωση, δηλαδή ότι και $L_1 \cup L_2 \in$ **NP**. Ισχύει το ίδιο για την γλώσσα $L_1 \cap L_2$?

β′. Ορίζουμε ως το άστρο του Kleene μιας γλώσσας $L$ την γλώσσα:

$$L^* = \{x_1 x_2 \dots x_k | k \geq 0 \ \& \ x_1, x_2 \dots, x_k \in L\}$$

Δείξτε ότι η κλάση **NP** είναι κλειστή ως προς το άστρο του Kleene.

## Άσκηση 7

α′. Δείξτε ότι ο ορισμός με πιστοποιητικά της κλάσης **NL** (Ορισμός 4.19 από το βιβλίο των Arora-Barak [2]) είναι ισοδύναμος με τον αρχικό ορισμό της **NL** (**NL** $=$ **NSPACE**$[\log n]$).

β′. Δείξτε ότι αν στον ορισμό με πιστοποιητικά της **NL** επιτρέψουμε στην read-once κεφαλή να κινείται και στις δύο κατευθύνσεις, τότε η κλάση που ορίζεται είναι ακριβώς η **NP**.