

Αλγοριθμική Θεωρία Παιγνίων

Βαγγέλης Μαρκάκης (ΟΠΑ)

Θανάσης Λιανέας (ΕΜΠ)

Δημήτρης Φωτάκης (ΕΜΠ)

Αντικείμενο - Προαπαιτούμενα

- Αντικείμενο:
 - Βασικές τεχνικές και αποτελέσματα στην τομή των Αλγορίθμων και της Θεωρίας Παιγνίων.
 - Αλγοριθμική οπτική γωνία σε προβλήματα (υπολογιστικής φύσης) της Θεωρίας Παιγνίων.
 - Π.χ., πολυπλοκότητα υπολογισμού ισορροπίας
 - Solution concepts, ιδέες και τεχνικές για αλγοριθμικά προβλήματα με αλληλεπίδραση ιδιοτελών οντοτήτων
 - Π.χ., ιδιοτελής δρομολόγηση, διαφήμιση στο διαδίκτυο.
- Προαπαιτούμενα:
 - Μαθηματική και αλγοριθμική ωριμότητα.
 - Διάθεση για μελέτη και εμπάθунση.

Ατζέντα

- Βασικές έννοιες Θεωρίας Παιγνίων
 - Normal form games, 0-sum games, bimatrix και n-player games.
 - Solution concepts: dominant strategies, Nash equilibrium
- Ισορροπία Nash σε **2-person 0-sum** παίγνια:
 - (Πολύ) σύντομη εισαγωγή στο LP duality.
- Υπολογισμός **ισορροπίας Nash** σε **γενικά παίγνια**:
 - Brouwer's fixed point theorem και Sperner's lemma.
 - Total search problems και PPAD (και PPA, PPP, PLS).
 - Σκιαγράφηση γιατί υπολογισμός Nash ισορροπίας είναι PPAD-complete.
 - Αλγόριθμοι (προσέγγισης) για υπολογισμό ισορροπίας Nash.

Ατζέντα

- Σχεδιασμός Μηχανισμών:
 - Truthfulness, revelation principle
 - Single-item auctions, 1st price και 2nd price auctions
 - Social welfare optimization, single-parameter agents, monotone allocations, Myerson's characterization
 - Multi-parameter agents, VCG
- Υπολογιστικά αποδοτικοί φιλαλήθεις μηχανισμοί:
 - Combinatorial auctions
 - Online mechanisms and secretary problems
 - Procurement auctions
 - Combinatorial public projects.

Ατζέντα

- Μεγιστοποίηση κέρδους στο Σχεδιασμό Μηχανισμών
 - Bayesian setting, virtual valuations και βέλτιστος μηχανισμός του Myerson
 - Μηχανισμοί που επιτυγχάνουν σχεδόν βέλτιστο κέρδος
- Εφαρμογές:
 - Ad-word auctions και Generalized Second Price (GSP)
 - Spectrum auctions και deferred acceptance auctions
 - Προβλήματα σχεδιασμού μηχανισμών και τιμολόγησης στην αγορά ενέργειας (Γιώργος Τσαούσογλου)

Ατζέντα

- Ανταγωνιστική ανάθεση πόρων και **παίγνια συμφόρησης:**
 - Μη ατομικά παίγνια και ατομικά παίγνια συμφόρησης.
 - Ύπαρξη και πολυπλοκότητα (αμιγούς) ισορροπίας Nash, local search problems και η κλάση PLS.
 - Price of anarchy (τίμημα της αναρχίας) και τεχνικές βελτίωσής του (Braess paradox and network design, tolls, Stackelberg strategies).
 - Price of stability (τίμημα της σταθερότητας)
 - Price of anarchy in simple (non-truthful) auctions

ΑΤΖΈΝΤΑ

- Κοινωνική επιλογή
 - Impossibility results: Arrow, Gibbard–Satterthwaite
 - Single-peaked preferences, Moulin's characterization and generalized medians, facility location
 - Voting and preference aggregation
 - Stable matchings, top trading cycles, kidney exchange
- Learning and games
 - No-regret dynamics, fictitious play
 - Correlated and coarse correlated equilibria
 - Convergence of no-regret dynamics to coarse correlated equilibrium.
 - No-regret dynamics in place of best response and application to econometrics.

Βιβλιογραφία - Πληροφορίες

- Roughgarden. Twenty Lectures on Algorithmic Game Theory.
 - Υλικό διαθέσιμο σε μορφή lecture notes και video διαλέξεων:
<http://timroughgarden.org/f13/f13.html>
- Karlin and Perez. Game Theory, Alive.
<https://homes.cs.washington.edu/~karlin/GameTheoryBook.pdf>
- Nisan, Roughgarden, Tardos, Vazirani. Algorithmic Game Theory, 2007
- Πολλές ιστοσελίδες, μαθήματα, διαλέξεις, surveys, ...
- Σε πολλές περιπτώσεις θα ανατρέξουμε σε εξειδικευμένα surveys και ερευνητικές εργασίες.
- **Τρίτη: 15:00-18:00 (:30)**, 1.1.31, Παλ. Κτήριο ΣΗΜΜΥ.
- <https://courses.corelab.ntua.gr/agt>

Βιβλιογραφία - Πληροφορίες

- Βοηθοί διδασκαλίας:
 - Αγγελική Μαθιουδάκη, Παναγιώτης Πατσιλινάκος
- Εξετάσεις – Εργασίες – Βαθμολογία:
 - 3 γραπτές εργασίες (3x10%)
 - Υπολογισμός ισορροπιών Nash, σχεδιασμός μηχανισμών
 - Σχεδιασμός μηχανισμών, παίγνια συμφόρησης, τίμημα αναρχίας
 - Κοινωνική επιλογή, εφαρμογές σχεδιασμού μηχανισμών, learning and games.
 - Γραπτή εξέταση (80%).

Αναγκαιότητα για EECS

- Μεγάλα, πολύπλοκα, και δυναμικά μεταβαλλόμενα συστήματα αποτελούν τμήμα τεχνολογικής υποδομής.
- Δυσχερής η ιδέα μιας κεντρικής διαχειριστικής αρχής που εξασφαλίζει βέλτιστη λειτουργία.
 - Συνιστώσες ενεργούν αυτόνομα και ιδιοτελώς με κριτήριο τη βελτιστοποίηση ατομικών αντικειμενικών στόχων.
- Κλασσικά παραδείγματα:
 - Κυκλοφορία στις μεγάλες πόλεις και στο Internet.
 - Αγορές (χρηματιστήριο, real estate, ηλεκτρονική διαφήμιση).
 - Συνάθροιση προτιμήσεων.
 - Σχεδιασμός κινήτρων για επιθυμητή συμπεριφορά.

Μονόδρομος 'Υποπτου



- Συλλαμβάνεται ύποπτος για μεγάλη ληστεία.
Δεν υπάρχουν επαρκή στοιχεία!
 - Ομολογεί: 5 χρόνια φυλακή.
 - Δεν ομολογεί: 1 χρόνο φυλακή.
- Ο ύποπτος **δεν ομολογεί.**

Δίλημμα Υπόπτων



- Συλλαμβάνονται **δύο** συνεργάτες για μεγάλη ληστεία.
 - Κρατούνται σε **χωριστά** κελιά χωρίς επικοινωνία.

	Ομολογεί B	Δεν ομολογεί B
Ομολογεί A	5, 5	0, 15
Δεν ομολογεί A	15, 0	1, 1

- Αμφότεροι οι ύποπτοι **ομολογούν!**

Θεωρία Παιγνίων

- Προβλέπει συμπεριφορά **αυτόνομων** οντοτήτων που δρουν με στόχο βελτιστοποίηση **ατομικών στόχων**.
 - Εφαρμογή: όταν υπάρχουν **αντικρουόμενα συμφέροντα**.
 - **Υπόθεση**: ορθολογική και στρατηγική συμπεριφορά.
 - Πρόβλεψη: **σημεία ισορροπίας** (γεν. solution concepts).
- **Εργαλείο** για μελέτη «πολύπλοκων» συστημάτων.
 - Σημεία ισορροπίας και ιδιότητες τους.
 - Ορθολογική συμπεριφορά οδηγεί σε σημείο ισορροπίας.
- Περιοχή **εφαρμογής**:
 - Αποδοτικός (κατανεμημένος;) υπολογισμός σημείου ισορροπίας.
 - Αποδοτικότητα (σε σχέση με βέλτιστη διαμόρφωση).
- **Σχεδιασμός Μηχανισμών**:
 - Κανόνες ώστε να επιτύχουμε επιθυμητή συμπεριφορά / απόδοση.

Ανταγωνιστικό Παίγνιο

- Σύνολο παικτών που ανταγωνίζονται (π.χ. για πόρους).
- Κάθε παίκτης αποφασίζει **μόνο τη δική του** στρατηγική.
 - Μοναδικός στόχος: **μεγιστοποίηση ατομικού κέρδους.**
 - Ατομικό κέρδος εξαρτάται από στρατηγικές **όλων.**
- **Ισορροπία Nash:** Κανένας **δεν μπορεί να βελτιώσει** ατομικό κέρδος αλλάζοντας μόνο τη δική του στρατηγική.
 - Nash (1952) απέδειξε ότι **πάντα** υπάρχει τέτοια ισορροπία (αλλά μπορεί να είναι πεπλεγμένη – mixed).
 - Ισορροπία Nash αποτελεί **«λύση» του συστήματος:**
 - Αν οι παίκτες συμπεριφερθούν **στρατηγικά και ορθολογικά** και έχουν στη διάθεσή τους **πλήρη γνώση και επαρκή χρόνο**, τότε καταλήγουν σε μία ισορροπία Nash.

Ισορροπία Nash



	Ομολογεί B	Δεν ομολογεί B
Ομολογεί A	5, 5	0, 15
Δεν ομολογεί A	15, 0	1, 1

- Ισορροπία Nash **δεν βελτιστοποιεί** συνολικό αποτέλεσμα. Συμβιβασμός με δεδομένη την έλλειψη συντονισμού.

Μάχη των Φύλλων

	Σινεμά	ΟΚ, μπάσκετ
ΟΚ, σινεμά	1, 5	0, 0
Μπάσκετ	0, 0	5, 1

- Μοντέλο για συντονισμό με αντικρουόμενες προτιμήσεις.
- Ισορροπία Nash: καθένας επιλέγει best response στη στρατηγική του αντιπάλου.
 - Αμιγής (ντετερμινιστική επιλογή στρατηγικών): $(\Sigma, \Sigma), (M, M)$
 - Πεπλεγμένη (mixed): $((1/6, 5/6), (5/6, 1/6))$
 - Αποδεικνύεται ότι #ισορροπιών Nash είναι περιττός.
- Σινεμά στο Rocky: $((2, -1), (0, 0))$. Τι συμβαίνει;

Πέτρα – Ψαλίδι – Χαρτί

	Πέτρα	Ψαλίδι	Χαρτί
Πέτρα	0, 0	1, -1	-1, 1
Ψαλίδι	-1, 1	0, 0	1, -1
Χαρτί	1, -1	-1, 1	0, 0

- Μοναδική ισορροπία: $((1/3, 1/3, 1/3), (1/3, 1/3, 1/3))$.
- Παίγνιο μηδενικού αθροίσματος με 2 παίκτες.
 - von Neumann (1928): **υπάρχει πάντα** πεπλεγμένη ισορροπία.
 - Εύκολη απόδειξη μέσω LP duality.
- Nash (1952) **γενίκευσε** για παίγνια με μη-μηδενικό άθροισμα και πεπερασμένο πλήθος παικτών.

Ενδιαφέροντα Παραδείγματα

- Το Δίλημμα του (Απελπισμένου) Ταξιδιώτη
 - 2 παίκτες, καθένας δηλώνει έναν αριθμό μεταξύ 2 και 100 (αξία χαμένης βαλίτσας).
 - Αν δηλώσουν το ίδιο x , εισπράττουν x ευρώ ο καθένας.
 - Διαφορετικά, έστω $x < y$ οι δύο δηλώσεις. Αυτός που δήλωσε y , εισπράττει $x - 2$, ο άλλος εισπράττει $x + 2$.
- Μαντεύουμε τα $2/3$ του μέσου όρου.
 - n παίκτες, καθένας δηλώνει έναν αριθμό μεταξύ 0 και 100.
 - Κερδίζει 1000 ευρώ (μόνον) αυτός με αριθμό πλησιέστερα στο $2(x_1 + \dots + x_n)/(3n)$.

Ισορροπία στην Πράξη

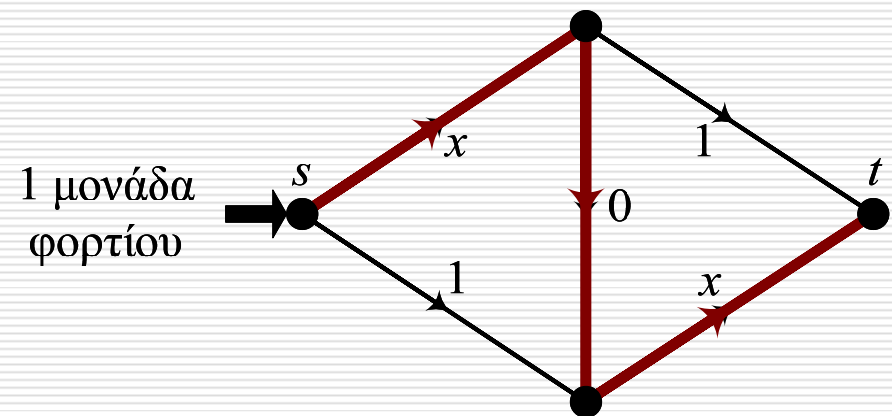
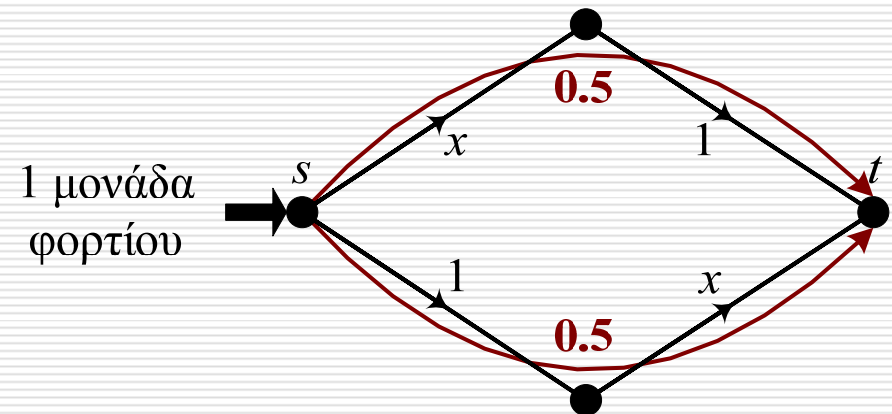
- Χρηματιστήριο:
 - Τιμές αγαθών και μετοχών (market equilibrium)
- Internet, δρόμοι:
 - Δρομολόγηση πακέτων, αυτοκινήτων.
- Κοινωνικά δίκτυα, WWW:
 - Δομή του δικτύου.
- Πως οι συμμετέχοντες υπολογίζουν ισορροπίες;
 - Απόδειξη Nash χρησιμοποιεί **Θ. Σταθερού Σημείου Brouwer**: όχι αποδοτική υπολογιστικά.
 - Μπορεί να υπάρχει αποδοτικός αλγόριθμος;
 - Αν όχι, πως / γιατί / κατά πόσο συστήματα **λειτουργούν σε συνθήκες ισορροπίας;**

Υπολογισμός Ισορροπιών

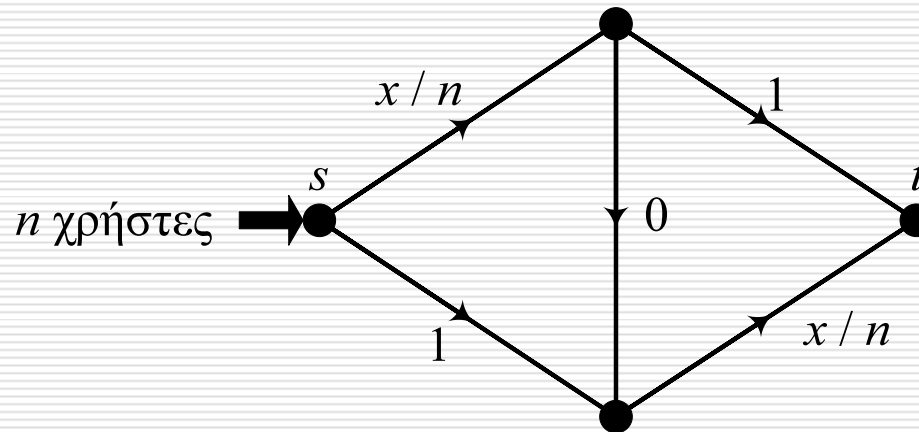
- Παίγνια με 2 παίκτες και **μηδενικό άθροισμα**:
 - **Αποδοτικός υπολογισμός** ισορροπίας Nash μέσω **LP duality**.
- Παίγνια με 2 παίκτες γενικής μορφής:
 - **Δεν** είναι γνωστός **αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου**, παρά το σημαντικό ενδιαφέρον και μεγάλη προσπάθεια.
 - **Lemke-Howson** (simplex-like) αλγ. **δεν** είναι αποδοτικός.
 - Ισορροπία Nash **δεν** είναι **NP-complete** (εξ' ορισμού)!
 - Είναι όμως **PPAD-complete**, δηλ. τόσο **δύσκολη** όσο ο υπολογισμός του **σταθερού σημείου** του Brouwer (ή οποιουδήποτε αντίστοιχου προβλήματος).

Τμήμα Αναρχίας – Παράδοξο Braess

- Συνολική καθυστέρηση **1.5**
 - Nash ισορροπία αποτελεί βέλτιστη λύση.
- Νέα **πολύ γρήγορη** σύνδεση.
- Συνολική καθυστέρηση **αυξάνεται σε 2** γιατί όλοι χρησιμοποιούν νέα σύνδεση.
- Τμήμα Αναρχίας: **4/3**
- Παραδοσιακός σχεδιασμός **δεν επαρκεί.**



Ανταγωνιστική Ανάθεση Πόρων



- Μοντελοποίηση με (μη ατομική και ατομική) παίγνια συμφόρησης.
- Ανάλυση απόδοσης.
 - **Τίμημα Αναρχίας:** Υποβάθμιση λόγω αυτόνομης και ανταγωνιστικής συμπεριφοράς σε σχέση με βέλτιστη κεντροποιημένη διαχείριση.
- Κίνητρα για βελτίωση απόδοσης.
- Τεχνικές για βέλτιστο σχεδιασμό.

Δημοπρασίες και Μηχανισμοί

- Ένα αντικείμενο σε δημοπρασία με n παίκτες.
 - Το αντικείμενο αξίζει v_j για παίκτη j .
- Όλοι υποβάλλουν (σφραγισμένες) προσφορές b_1, \dots, b_n .
- Αντικείμενο κατοχυρώνεται σε παίκτη k με μέγιστη προσφορά b_k αντί τιμής t .
 - Ωφέλεια κερδισμένου = $v_k - t$.
 - Ωφέλεια μη κερδισμένου = 0 .
- Επιλογή τιμής ώστε να είναι πάντα **best response** $b_j = v_j$ (truthfulness);
 - Τιμή ίση με μέγιστη προσφορά.
 - Όχι, π.χ. 100, 5!
 - Τιμή ίση με δεύτερη μεγαλύτερη προσφορά.