Παίγνια Συμφόρησης και Παίγνια Δυναμικού

Δημήτρης Φωτάκης

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Μοντέλο Ανάθεσης Πόρων

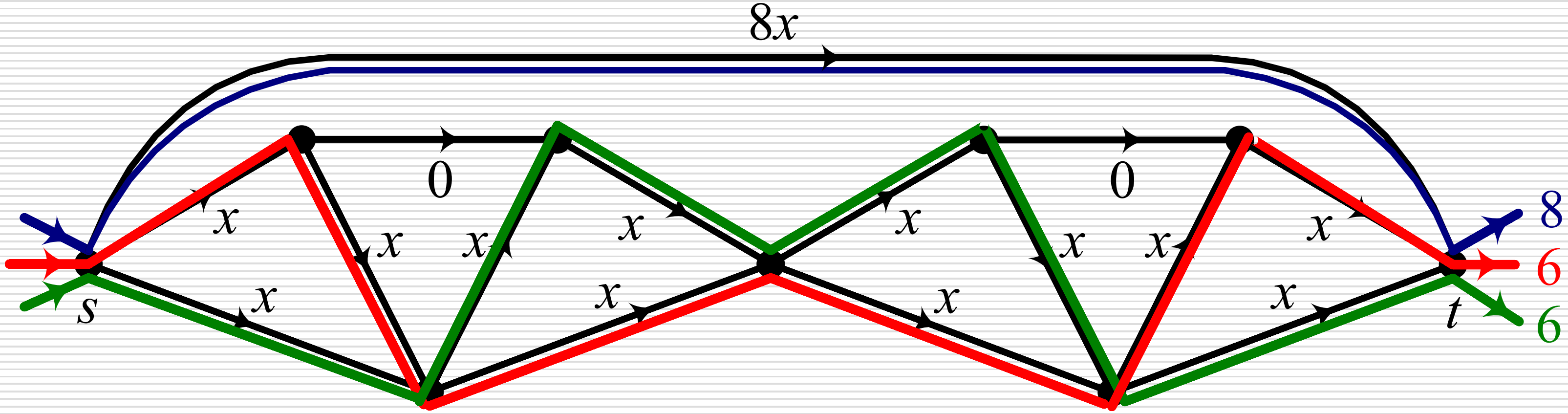
- Σύνολο πόρων $E = \{ e_1, \ldots, e_m \}$.
  - Πόροι: συνδέσεις δικτύου, υπηρεσίες σε υπολογιστικό ή πληροφοριακό σύστημα, αρχεία (ή τμήματα αρχείων) P2P, …
- n παίκτες με απαιτήσεις πρόσβασης σε πόρους.
  - Απαιτήσεις εισάγουν ίδιο (μοναδιαίο) φορτίο.
  - $\Sigma_i \subseteq 2^E$ σύνολο επιλογών (αμιγών στρατηγικών) παίκτη i.
  - Παίκτης i κάνει επιλογή $\sigma_i \in \Sigma_i$.
  - Διάνυσμα επιλογών $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ διαμόρφωση συστήματος.
  - Π.χ. $E = \{s_1, s_2, s_3, p_1, p_2, p_3\}$, $n = 3$.
    $\Sigma_1 = \{ \{s_1, p_1\}, \{s_2, s_3, p_1\} \}$
    $\Sigma_2 = \{ \{s_2, p_2\}, \{s_3, s_1, p_2\} \}$
    $\Sigma_3 = \{ \{s_3, p_3\}, \{s_1, s_2, p_3\} \}$

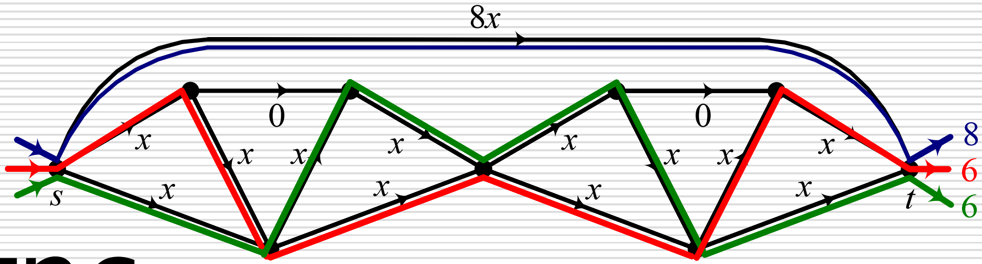
Μοντέλο Ανάθεσης Πόρων

- «Ποιότητα» πόρου υποβαθμίζεται όσο αυξάνεται φορτίο.
  - Φορτίο (ή συμφόρηση) σ_e πόρου e σε διαμόρφωση σ.
    σ_e = #παικτών που χρησιμοποιούν *e* στη σ.
  - Αύξουσα συνάρτηση καθυστέρησης (ή κόστους) πόρου e με συμφόρηση x: $d_e(x)$
  - Καθυστέρηση σε κάθε πόρο αυξάνεται με συμφόρηση!
- Καθυστέρηση παίκτη *i* σε διαμορφ. σ: $c_i(\sigma) = \sum_{e \in \sigma_i} d_e(\sigma_e)$
  - Π.χ. $E = \{s_1, s_2, s_3, p_1, p_2, p_3\}$, n = 3.
    $\Sigma_1 = \{ \{s_1, p_1\}, \{s_2, s_3, p_1\} \}$ (**2**, **2**, **2**)
    $\Sigma_2 = \{ \{s_2, p_2\}, \{s_3, s_1, p_2\} \}$ (**5**, **5**, **5**)
    $\Sigma_3 = \{ \{s_3, p_3\}, \{s_1, s_2, p_3\} \}$
    $\forall e \in E$, κόστος e : $d_e(x) = x$

Μοντέλο Ανάθεσης Πόρων

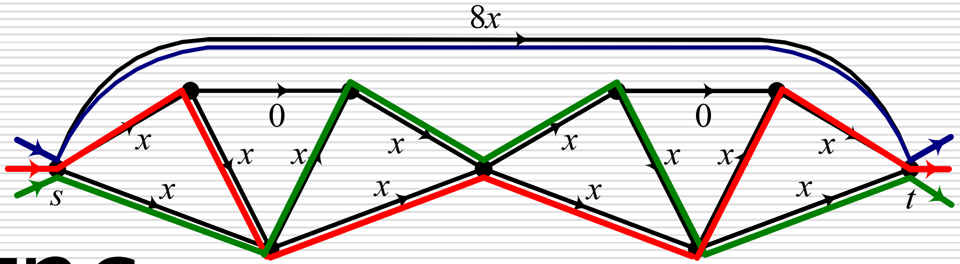
- «Ποιότητα» πόρου υποβαθμίζεται όσο αυξάνεται φορτίο.
  - Φορτίο (ή συμφόρηση) σ_e πόρου e σε διαμόρφωση σ.
    σ_e = #παικτών που χρησιμοποιούν *e* στη σ.
  - Αύξουσα συνάρτηση καθυστέρησης (ή κόστους) πόρου e με συμφόρηση x: $d_e(x)$
  - Καθυστέρηση σε κάθε πόρο αυξάνεται με συμφόρηση!
- Καθυστέρηση παίκτη *i* σε διαμορφ. σ: $c_i(\sigma) = \sum_{e \in \sigma_i} d_e(\sigma_e)$





Παίγνια Συμφόρησης

- Παίγνιο συμφόρησης $\Gamma(N, E, (\Sigma_i)_{i \in N}, (d_e)_{e \in E})$
  - N : σύνολο n παικτών (ανταγωνιστικών οντοτήτων)
  - E : σύνολο m πόρων διαμοιραζόμενων από χρήστες.
  - $\Sigma_i \subseteq 2^E$ σύνολο αμιγών στρατηγικών χρήστη i.
    - $\Sigma_i = \Sigma_j, \forall i, j$: συμμετρικό παίγνιο.
    - Σύνολο στρατηγικών (διαμορφώσεων) $\Sigma = \Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_n$
    - σ_i συμβολίζει στρατηγική παίκτη i σε διαμόρφωση $\sigma \in \Sigma$.
  - Διαμόρφωση $\sigma \in \Sigma$ προκαλεί συμφόρηση σ_e σε πόρο $e \in \Sigma$.
    σ_e = #παικτών που χρησιμοποιούν e στη σ:
    $$\sigma_e = |\{i \in N : e \in \sigma_i\}|$$
  - Αύξουσα συνάρτηση καθυστέρησης (ή κόστους)
    σε πόρο e : $d_e : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}_+$

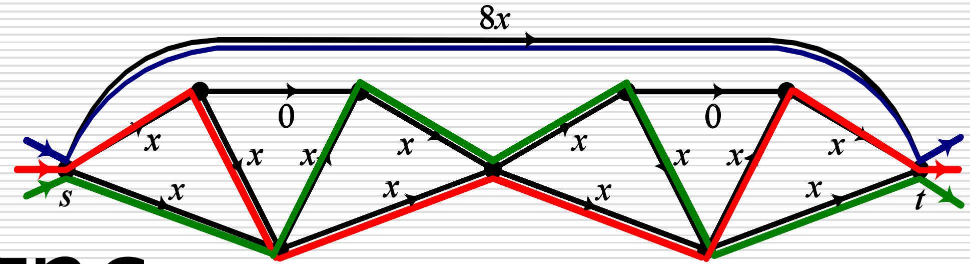


Παίγνια Συμφόρησης

- Παίκτες ενδιαφέρονται μόνο για ατομική καθυστέρηση, δεδομένων στρατηγικών υπολοίπων παικτών.
  - σ^{-i} : διαμόρφωση από στρατηγικές παικτών εκτός του i.
  - Κόστος παίκτη i σε διαμόρφωση σ: $c_i(\sigma) = \sum_{e \in \sigma_i} d_e(\sigma_e)$
  - Κόστος στρατηγικής $p \in \Sigma_i$ (παίκτη i) σε διαμόρφωση σ^{-i}:

$$c_i(\sigma^{-i}, p) = \sum_{e \in p} d_e(\sigma_e^{-i} + 1)$$

  - **Βέλτιστη απόκριση** παίκτη i σε διαμόρφωση σ^{-i}: στρατηγική $p^*(\sigma^{-i}) \in \Sigma_i$ με ελάχιστο κόστος.
- Διαμόρφωση σ είναι αμιγής ισορροπία Nash αν
  - $\forall$παίκτη i, σ_i αποτελεί βέλτιστη απόκριση σε σ^{-i}.
  - Κανένας παίκτης δεν μπορεί να μειώσει την ατομική του καθυστέρηση αλλάζοντας τη στρατηγική του.

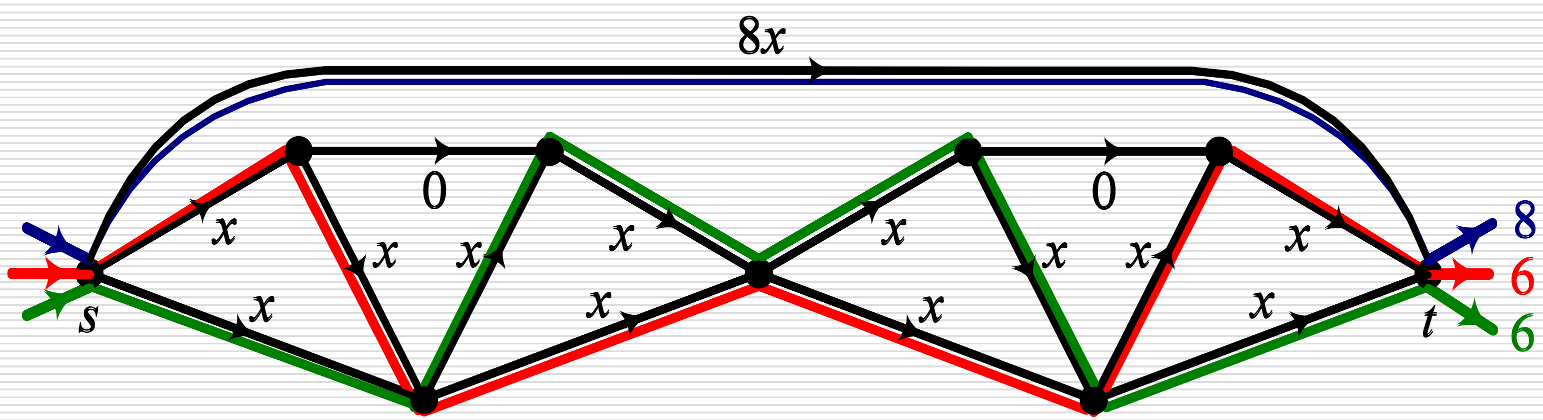


Παίγνια Συμφόρησης

- Διαμόρφωση *σ* είναι αμιγής ισορροπία Nash αν
  - ∀παίκτη *i*, σ_i αποτελεί βέλτιστη απόκριση σε σ^{-i}.
  - Κανένας παίκτης δεν μπορεί να μειώσει την ατομική του καθυστέρηση αλλάζοντας τη στρατηγική του.

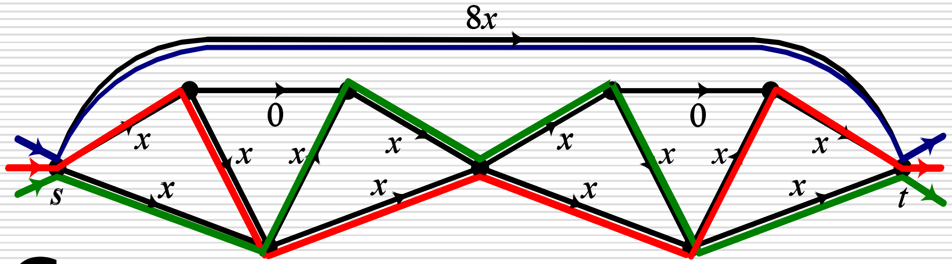
$$\forall i \in N,\ \forall p \in \Sigma_i\,,\ \ c_i(\sigma) \leq c_i(\sigma^{-i}, p)$$

$$\forall i \in N,\ \forall p \in \Sigma_i\,,\ \ \sum_{e \in \sigma} d_e(\sigma_e) \leq \sum_{e \in p} d_e(\sigma_e^{-i} + 1)$$



Παραδείγματα

- n = 2, δύο παράλληλες ακμές με $d_1(x) = x / 2$, $d_2(x) = 1+ε$.
- Δύο παράλληλες ακμές με $d_1(x) = (x/n)^k$, $d_2(x) = 1+ε$.
- $E = \{s_1, s_2, s_3, p_1, p_2, p_3\}$, n = 3.
  $\Sigma_1 = \{ \{s_1, p_1\}, \{s_2, s_3, p_1\} \}$
  $\Sigma_2 = \{ \{s_2, p_2\}, \{s_3, s_1, p_2\} \}$
  $\Sigma_3 = \{ \{s_3, p_3\}, \{s_1, s_2, p_3\} \}$
  $\forall e \in E$, κόστος e : $d_e(x) = x$
  - Ισορροπίες: $(\{s_1, p_1\}, \{s_2, p_2\}, \{s_3, p_3\})$
    $(\{s_2, s_3, p_1\} , \{s_3, s_1, p_2\} , \{s_1, s_2, p_3\})$



Ειδικές Περιπτώσεις

- Δικτυακά παίγνια συμφόρησης:
  - Θεωρούμε (συνήθως κατευθυνόμενο) δίκτυο $G(V, E)$.
  - Κάθε παίκτης i έχει αφετηρία $s_i \in V$ και προορισμό $t_i \in V$.
  - Στρατηγικές παίκτη i είναι όλα τα $s_i - t_i$ μονοπάτια.
  - A.k.a. multi-commodity network congestion games.
- Συμμετρικά δικτυακά παίγνια συμφόρησης:
  - Οι παίκτες έχουν **κοινή** αφετηρία $s \in V$ και προορισμό $t \in V$.
  - A.k.a. single-commodity network congestion games.
- Ειδικές περιπτώσεις δικτύων: parallel links, series-parallel, extension-parallel.
- Παίγνια συμφόρησης: γενικό μοντέλο – πλήθος εφαρμογών!
  - Πόροι: συνδέσεις δικτύου, αρχεία (ή τμήματα αρχείων) P2P, …
  - Στρατηγικές: Σύνολα πόρων για ικανοποίηση στόχου.

Κατευθύνσεις

- **Ύπαρξη** και **δομή** αμιγών ισορροπιών Nash για παίγνια συμφόρησης και γενικεύσεις τους.
- **Υπολογισμός** (και **πολυπλοκότητα** υπολογισμού) αμιγών ισορροπιών Nash (έστω και προσεγγιστικών).
- Ταχύτητα **σύγκλισης** σε αμιγείς ισορροπίες Nash.
- **Ποιότητα** αμιγών ισορροπιών Nash σε σχέση με βέλτιστη ανάθεση πόρων.
  - **Τίμημα αναρχίας** και τίμημα σταθερότητας.
  - Μέθοδοι βελτίωσης τιμήματος αναρχίας: διόδια, network design και Braess paradox, πολιτικές Stackelberg, …
- Αντίστοιχα για **μη-ατομικά** παίγνια συμφόρησης (#παικτών n είναι πολύ μεγάλο, θεωρητικά άπειρο).

Συνάρτηση Δυναμικού

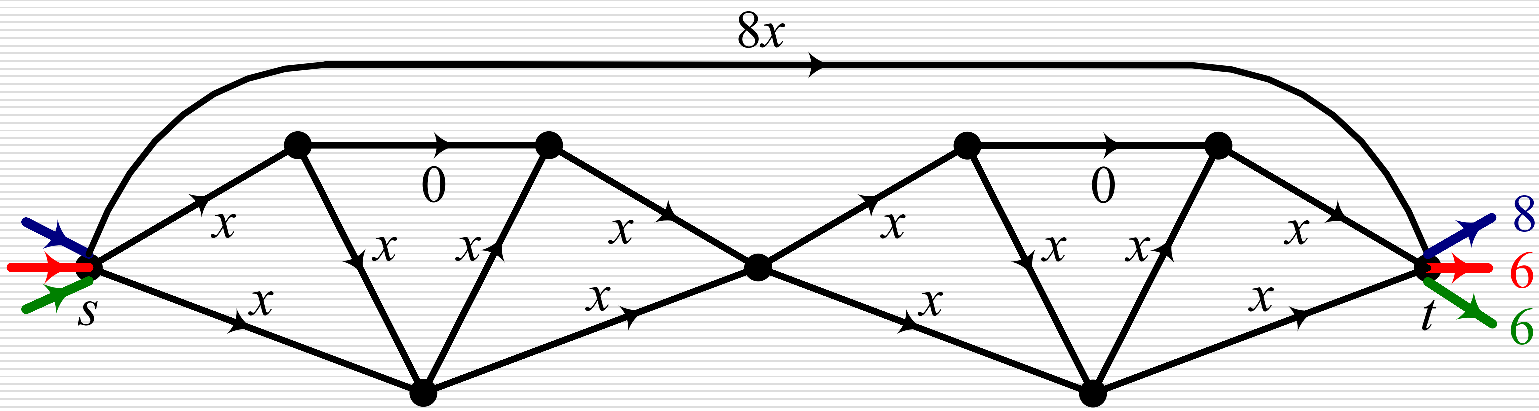
- Ιδιοτελής συμπεριφορά μειώνει συνάρτηση δυναμικού:

  $$\Phi(\sigma) = \sum_{e \in E} \sum_{j=1}^{\sigma_e} d_e(j)$$

  - Όταν χρήστης *i* αλλάζει στρατηγική από *p* σε *p′*, τότε:

    $$c_i(\sigma^{-i}, p) - c_i(\sigma^{-i}, p') = \Phi(\sigma^{-i}, p) - \Phi(\sigma^{-i}, p')$$

    δηλ. μεταβολή κόστους χρήστη *i* = μεταβολή δυναμικού.
  - Ονομάζονται (ακριβείς) συναρτήσεις δυναμικού.



Συνάρτηση Δυναμικού

- Ιδιοτελής συμπεριφορά μειώνει συνάρτηση δυναμικού:
$$\Phi(\sigma) = \sum_{e \in E} \sum_{j=1}^{\sigma_e} d_e(j)$$
  - Όταν χρήστης *i* αλλάζει στρατηγική από *p* σε *p'*, τότε:
$$c_i(\sigma^{-i}, p) - c_i(\sigma^{-i}, p') = \Phi(\sigma^{-i}, p) - \Phi(\sigma^{-i}, p')$$
    δηλ. μεταβολή κόστους χρήστη *i* = μεταβολή δυναμικού.
  - Ονομάζονται (ακριβείς) συναρτήσεις δυναμικού.
- σ (αμιγής) ισορροπία Nash ανν
  σ αποτελεί τοπικό ελάχιστο Φ [Rosenthal, 73].
  - Πολιτική **καλύτερων / βέλτιστων αποκρίσεων** οδηγεί σε αμιγή ισορροπία Nash.
  - Υπολογισμός ισορροπίας Nash ελαχιστοποιώντας δυναμικό.

Συναρτήσεις και Παίγνια Δυναμικού

- Κάθε ανταγωνιστικό παίγνιο με ακριβή συνάρτηση δυναμικού είναι ισομορφικό με κάποιο παίγνιο συμφόρησης [Monderer Shapley, 96].
  - Παίγνια με συναρτήσεις δυναμικού: **potential games.**
- Ordinal potential functions:
  - Χρήστης *i* βελτιώνει κόστος του με αλλαγή στρατηγικής από *p* σε *p′* ανν έχουμε μείωση συνάρτησης δυναμικού.

$$c_i(\sigma^{-i}, p') < c_i(\sigma^{-i}, p) \Leftrightarrow \Phi(\sigma^{-i}, p') < \Phi(\sigma^{-i}, p)$$

- Generalized potential functions:
  - Όταν χρήστης *i* βελτιώνει κόστος του με αλλαγή στρατηγικής από *p* σε *p′*, τότε έχουμε μείωση συνάρτησης δυναμικού.

$$c_i(\sigma^{-i}, p') < c_i(\sigma^{-i}, p) \Rightarrow \Phi(\sigma^{-i}, p') < \Phi(\sigma^{-i}, p')$$

Άλλα Παραδείγματα Παιγνίων Δυναμικού

- MAX-CUT Games (και πολλές παραλλαγές):
  - Πλήρες γράφημα G(V, E) με n κορυφές με βάρος $w_{ij} \geq 0$ σε κάθε ακμή {i, j}.
  - Παίκτες αντιστοιχούν σε κορυφές.
  - Ακμές (και βάρη) δηλώνουν ασυμβατότητα μεταξύ παικτών.
  - Συμμετρία $w_{ij} = w_{ji}$ και μπορεί $w_{ij} = 0$ για κάποιες ακμές.
  - Κάθε παίκτης έχει δύο στρατηγικές A και όχι-A.
  - Διαμόρφωση σ αντιστοιχεί σε τομή παικτών (A, V \ A).
  - Κάθε παίκτης i μεγιστοποιεί βάρος ακμών στο αντίθετο μέρος της τομής: $$c_i(\sigma) = \sum_{j:\sigma_i \neq \sigma_j} w_{ij}$$
  - Δυναμικού το συνολικό βάρος ακμών που διασχίζουν τομή σ: $$\Phi(\sigma) = \sum_{1 \leq i < j \leq n : \sigma_i \neq \sigma_j} w_{ij}$$

Άλλα Παραδείγματα Παιγνίων Δυναμικού

- Network cost-sharing games:
  - Σε δίκτυο G με κόστη ακμών c_e, κάθε παίκτης i επιλέγει μονοπάτι σύνδεσης αφετηρίας s_i σε (κοινό) προορισμό t.
  - Κόστος παίκτη i σε διαμόρφωση σ: $$c_i(\sigma) = \sum_{e \in \sigma_i} \frac{c_e}{\sigma_e}$$
  - Παρόμοια με congestion games.
- Weighted Congestion Games:
  - Παίκτες έχουν διαφορετικά βάρη – απαιτήσεις και επιβαρύνουν διαφορετικά πόρους (όλους με ίδιο βάρος).
  - Βάρη παικτών: $w_1, \ldots, w_n$
  - Φορτίο / συμφόρηση πόρου *e* σε διαμόρφωση *σ*: $\sigma_e = \sum_{i : e \in \sigma_i} w_i$

Weighted Congestion Games

- Για γραμμικές συναρτήσεις καθυστέρησης, $d_e(x) = a_e x + b_e$ υπάρχει συνάρτηση δυναμικού που λαμβάνει υπόψη τα βάρη [Fotakis, Kontogiannis, Spirakis, 04].

$$\Phi(\sigma) = \frac{1}{2}\sum_{e\in E}\left(a_e\sigma_e^2 + 2b_e\sigma_e + a_e\sum_{i:e\in\sigma_i} w_i^2\right)$$

  - Όταν χρήστης *i* αλλάζει στρατηγική από *p* σε *p′*, τότε:

$$w_i[c_i(\sigma^{-i}, p) - c_i(\sigma^{-i}, p')] = \Phi(\sigma^{-i}, p) - \Phi(\sigma^{-i}, p')$$

    (βάρος *i*) x (μεταβολή κόστους *i*) = μεταβολή δυναμικού.

  - Συνάρτηση δυναμικού με βάρη: γενικεύει Rosenthal.

- Για μη-γραμμικές συναρτήσεις, δεν υπάρχει συνάρτηση δυναμικού και μπορεί ούτε αμιγής ισορροπία Nash.

Δυναμικά και Υπολογισμός PNE

- σ αμιγής ισορροπία Nash (PNE) ανν σ αποτελεί τοπικό ελάχιστο συνάρτησης δυναμικού Φ (ακριβούς, με βάρη, ordinal, generalized).
  - Βελτιώνοντας ατομικό κόστος / κέρδος, παίκτες βελτιώνουν την τιμή της συνάρτησης δυναμικού!
  - (Ακολουθιακά) **best / better response dynamics** συγκλίνουν σε αμιγή ισορροπία Nash.
  - Υπολογισμός ισορροπίας Nash ελαχιστοποιώντας δυναμικό.
- Σύγκλιση σε ισορροπία μπορεί να απαιτεί εκθετικό #βημάτων!
  - Υψηλό αρχικό δυναμικό, μικρή μείωση σε κάθε βήμα!
  - Π.χ., MAX-CUT, (weighted) congestion games.
  - Πως χειριζόμαστε αυτές τις περιπτώσεις;

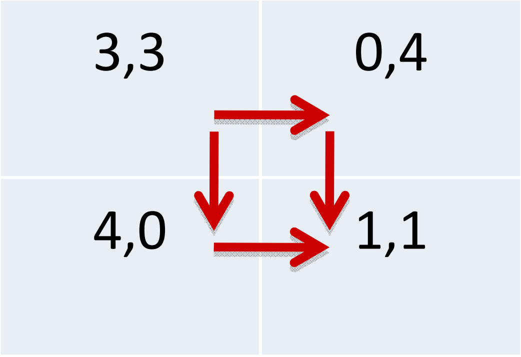
Best / Better Response Dynamics

- Κάθε παίκτης i σε αυθαίρετη αρχική στρατηγική σ_i
  - Αυθαίρετη αρχική διαμόρφωση $\sigma_0 = (\sigma_0(1), \ldots, \sigma_0(n))$.
- Στο βήμα k, αν υπάρχει παίκτης i τ.ω. $\sigma_k(i)$ **όχι best response** στο $\sigma_k(-i)$, i επιλέγει $p \in \Sigma_i$ με ατομικό κόστος $c_i(\sigma_k(-i), p) < c_i(\sigma_k)$ (a.k.a. **profitable deviation**)
  - Ενημέρωση διαμόρφωσης: $\sigma_{k+1} = (\sigma_k(-i), p)$.
- Αν όλοι παίκτες σε best response στο σ_k, τερματισμός.
- Παραλλαγές ως προς σειρά παικτών, επιλογή στρατηγικής, παραλληλισμός κινήσεων.
- Παίγνια δυναμικού: ουσιαστικά local search στη συνάρτηση δυναμικού με γειτονιά deviations παικτών.
  - Σύγκλιση σε PNE έπεται από μείωση δυναμικού σε κάθε βήμα.

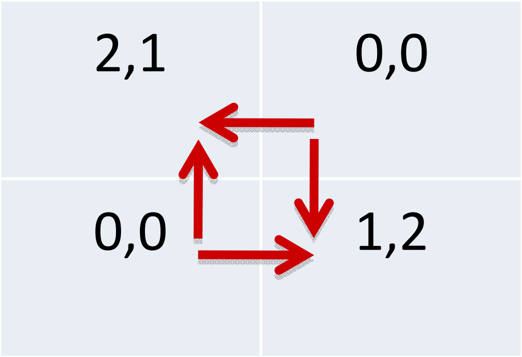
Best / Better Response Dynamics

- Nash dynamics: κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$.
  - Κορυφές αντιστοιχούν σε διαμορφώσεις.
  - Ακμές αντιστ. better / best responses μεμονωμένων παικτών.
  - Better response: ακμή (σ, σ') αν $\exists$παίκτης i τ.ω.
    $\sigma(-i) = \sigma'(-i)$ και $c_i(\sigma') < c_i(\sigma)$.
  - Best response: ακμή (σ, σ') αν $\exists$παίκτης i τ.ω.
    $\sigma'(-i) = (\sigma(-i), p)$ και $c_i(\sigma(-i), p) < c_i(\sigma(-i), p'),\ \forall p' \in \Sigma_i$

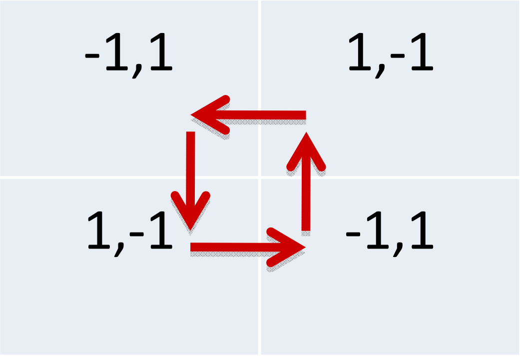
Prisoner's dilemma



Battle of the sexes



Matching pennies



Best / Better Response Dynamics

- Nash dynamics: κατευθυνόμενο γράφημα G(V, E) με κορυφές να αντιστοιχούν σε διαμορφώσεις και ακμές σε better / best responses μεμονωμένων παικτών.
  - Αμιγείς ισορροπίες Nash (PNE) αντιστοιχούν σε κορυφές με έξω-βαθμό 0 (sinks).
  - Κύκλος αποτελεί μοναδικό λόγω μη σύγκλισης BRD σε PNE.
- Σύγκλιση BRD σε PNE εγγυημένη ανν Nash dynamics είναι ακυκλικό.
  - Ακυκλικότητα εγγυάται σύγκλιση BRD σε PNE.
  - Αν BRD συγκλίνει σε ισορροπία για κάθε αρχική κατάσταση, τότε Nash dynamics graph είναι αναγκαστικά ακυκλικό.
  - Συνάρτηση δυναμικού (κάθε είδους) εγγυάται ακυκλικότητα.
  - Ακυκλικότητα συνεπάγεται generalized potential function.

Ταχύτητα Σύγκλισης

- Ταχύτητα σύγκλισης: #βημάτων BR για PNE.
  - Μπορεί εκθετικός στη γενική περίπτωση.
- Πολυωνυμική σύγκλιση σε ειδικές περιπτώσεις.
  - Παίγνια συμφόρησης με πολυωνυμικές καθυστερήσεις.
  - MAX-CUT με πολυωνυμικά βάρη.
  - (Συμμετρικά) παίγνια συμφόρησης σε parallel-links και σε extension-parallel networks [Fotakis, 07].
    - Λόγος σχετίζεται με discrete convexity!
  - (Μη-συμμετρικά) παίγνια συμφόρησης όταν κάθε σύνολο στρατηγικών αποτελεί σύνολο βάσεων ενός matroid [Ackerman, Roglin, Vocking, 06].

Αλγόριθμοι Υπολογισμού PNE

- Συμμετρικά παίγνια συμφόρησης σε (s, t)-δίκτυα (ανεξαρτήτως συναρτήσεων καθυστέρησης):
  - Υπολογισμός PNE (που ελαχιστοποιεί συνάρτηση δυναμικού) ανάγεται σε min-cost-flow πρόβλημα.
  - Κάθε ακμή e δικτύου αντικαθίσταται από n ακμές χωρητικότητας 1 και κόστους $d_e(1), \ldots, d_e(n)$.
  - Min-cost flow μεγέθους n: διαμόρφωση ελάχιστου δυναμικού.
- Συμμετρικά παίγνια συμφόρησης σε (s, t)-series-parallel δίκτυα (ανεξαρτήτως συναρτήσεων καθυστέρησης):
  - Min-cost-flow υπολογίζεται άπληστα!
  - Παίκτες επιλέγουν s–t μονοπάτι με τη σειρά, δεδομένων των επιλογών των προηγούμενων.

Κλάση PLS (Polynomial Local Search)

- Local Search πρόβλημα Π ορίζεται από πρόβλημα βελτιστοποίησης και γειτονιά N(σ) στον χώρο λύσεων.
  - Τοπικό βέλτιστο σ^*: $c(\sigma^*) \leq c(\sigma)$, για κάθε $\sigma \in N(\sigma^*)$.
- Local Search πρόβλημα Π ανήκει στην PLS αν:
  - Για κάθε στιγμιότυπο I, υπολογίζουμε αρχική διαμόρφωση / λύση σ_0 σε πολυωνυμικό χρόνο.
  - Για κάθε στιγμιότυπο I και κάθε διαμόρφωση / λύση σ, αντικειμενική τιμή Φ(σ) υπολογίζεται σε πολυωνυμικό χρόνο.
  - Για κάθε στιγμιότυπο I και κάθε διαμόρφωση / λύση σ, αποφασίζουμε σε πολυωνυμικό χρόνο αν υπάρχει $\sigma' \in N(\sigma)$ με $\Phi(\sigma') < \Phi(\sigma)$ ή όχι (και βρίσκουμε τέτοιο σ', αν υπάρχει).
  - PLS: local search προβλήματα με πολυωνυμικό βήμα του local search αλγόριθμου [Johnson, Papadimitriou, Yannakakis, 1988]

PLS-completeness

- PLS-reductions αντιστοιχούν «local search dynamics» ενός LS προβλήματος Π_1 σε αυτό LS προβλήματος Π_2.
  - Από τοπικό βέλτιστο Π_2 βρίσουμε (σε πολυωνυμικό χρόνο) τοπικό βέλτιστο του Π_1.
- PLS-complete προβλήματα:
  - Θεωρείται intractable πρόβλημα ο υπολογισμός τοπικών βέλτιστων για αυτά.
  - MAX-CUT (γειτονιά flip), γενικά παίγνια συμφόρησης, παίγνια συμφόρησης με βάρη με καθυστέρηση $d_e(x) = x$, $\forall e$.
  - Πολύ μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον τα τελευταία χρόνια!

Σύγκλιση σε Προσεγγιστική Ισορροπία

- Γρήγορη συντονισμένη σύγκλιση σε προσεγγιστική ισορροπία για συμμετρικά παίγνια με α-bounded jump,

$$\forall e \in E, \forall x \geq 1,\ d_e(x+1) \leq \alpha d_e(x)$$

  - [Chien and Sinclair, 07].
- Διαμόρφωση σ είναι ε-ισορροπία αν

$$\forall i \in N, \forall p \in \Sigma_i,\ (1-\varepsilon)c_i(\sigma) \leq c_i(\sigma^{-i}, p)$$

  - δεν υπάρχει χρήστης με δυνατότητα σημαντικής βελτίωσης.

Σύγκλιση σε Προσεγγιστική Ισορροπία

- $\Phi(\sigma) \leq \sum_{i=1}^{n} c_i(\sigma) \leq n c_k(\sigma)$ όπου *k* ο χρήστης με μεγαλύτερο ατομικό κόστος στην σ.
- Ενόσω σ όχι ε-ισορροπία, κινείται «ανικανοποίητος» χρήστης με μεγαλύτερο ατομικό κόστος στην σ.
  - Αν *k* «ανικανοποίητος», μείωση δυναμικού κατά:
    $\Phi(\sigma) - \Phi(\sigma') = c_k(\sigma) - c_k(\sigma') > \varepsilon c_k(\sigma) \geq \frac{\varepsilon}{n}\Phi(\sigma)$
  - Σύγκλιση σε #βημάτων $\leq \frac{n}{\varepsilon} \log \Phi(\sigma_0)$
  - Αν *k* «ικανοποιημένος» και κινείται χρήστης *j*, τότε λόγω συμμετρίας και α-bounded jump: $c_k(\sigma)/\alpha \leq c_j(\sigma)$
  - Σύγκλιση σε #βημάτων $\leq \frac{n\alpha}{\varepsilon} \log \Phi(\sigma_0)$
- Παρόμοια αποτελέσματα και για άλλα κριτήρια συντονισμού.