ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΑΛΜΑ **ΑΛΓΟΡΙΘΜΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ**
Διδάσκοντες: Θ. Λιανέας, Ε. Μαρκάκης, Δ. Φωτάκης
Εαρινό εξάμηνο 2020

1η σειρά ασκήσεων **Προθεσμία παράδοσης: 28 Απριλίου 2020**

Πρόβλημα 1. (14 μονάδες) Έστω το εξής παίγνιο:

	W	X	Y	Z
A	15, 42	13, 40	9, 23	0, 23
B	2, 19	2, 14	5, 13	1, 0
C	20, 7	20, 5	11, 3	1, 2
D	20, 45	3, 11	3, 5	1, 2

Αποφασίστε αν ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις. Δικαιολογήστε την απάντησή σας σε κάθεμια από τις προτάσεις.

1. Η στρατηγική B κυριαρχείται αυστηρά από την A.
2. Η X κυριαρχεί αυστηρά την Y.
3. Η D κυριαρχεί ασθενώς την B.
4. Η Z κυριαρχείται ασθενώς από την W.
5. Δεν υπάρχει κυρίαρχη στρατηγική για τον παίκτη 1.
6. Η C είναι βέλτιστη απόκριση στην W.
7. Υπάρχει σημείο ισορροπίας με κοινωνικό όφελος κάτω του 30.

Πρόβλημα 2. (10 μονάδες) Σε μια περίοδο υψηλής ανεργίας, δύο άνεργοι απόφοιτοι ψάχνουν για δουλειά και βρίσκουν 2 εταιρείες του ενδιαφέροντός τους, που προσφέρουν από μια θέση η κάθεμια. Η εταιρεία 1 προσφέρει μηνιαίο μισθό w_1, η εταιρεία 2 προσφέρει μηνιαίο μισθό w_2, και επίσης οι μισθοί αυτοί ικανοποιούν την εξής σχέση:

$$\frac{1}{2}w_1 < w_2 < 2w_1$$

Ας υποθέσουμε ότι καθένας από τους 2 αποφοίτους πρέπει να αποφασίσει να κάνει αίτηση μόνο σε μια από τις 2 δουλειές (π.χ. λόγω έλλειψης χρόνου στην ετοιμασία των δικαιολογητικών και για τις 2 θέσεις). Υποθέτουμε επίσης ότι οι εταιρείες θα αποφασίσουν ως εξής όταν δουν τις αιτήσεις: Αν οι 2 απόφοιτοι έκαναν αίτηση σε διαφορετικές εταιρείες, τότε καθενας τους θα παρει την δουλειά για την οποία έκανε αίτηση, με τον αντίστοιχο μισθό. Αν τώρα και οι 2 έκαναν αίτηση στην ίδια εταιρεία, τότε η εν λόγω εταιρεία θα τους προσλάβει part-time και τους 2, δίνοντας στον καθένα τις μισές μηνιαίες αποδοχές, από τον μισθό που θα έδινε σε εναν full-time υπάλληλο.

(i) (4 μονάδες) Να αναπαραστήσετε το παίγνιο σε κανονική μορφή (δηλ. με μορφή πινάκων). Ως ωφέλεια θεωρήστε το μηνιαίο μισθό του κάθε υπαλλήλου.

(ii) (6 μονάδες) Βρείτε όλα τα σημεία ισορροπίας και με αμιγείς και με μεικτές στρατηγικές.

Πρόβλημα 3. (16 μονάδες)

(i) (10 μονάδες) Θεωρήστε το παρακάτω παίγνιο μηδενικού αθροίσματος

$$\begin{bmatrix} a & 10 \\ 8 & d \end{bmatrix}$$

Για τις παραμέτρους a, d, ισχύει ότι $0 \leq a < 10$, και $d > 10$. Αποφανθείτε για το αν υπάρχει πάντα σημείο ισορροπίας με αμιγείς στρατηγικές. Αν δεν υπάρχει, βρείτε ένα τέτοιο παράδειγμα με συγκεκριμένες τιμές για τα a, d. Διαφορετικά, δείξτε ότι για κάθε $a \in [0, 10)$ και $d \in (10, \infty)$, θα πρέπει να υπάρχει σημείο ισορροπίας με αμιγείς στρατηγικές.

(ii) (6 μονάδες) Εξηγήστε ποια από τα παρακάτω παίγνια μηδενικού αθροίσματος έχουν σημείο ισορροπίας με αμιγείς στρατηγικές, χρησιμοποιώντας τις ποσότητες v_1 και v_2 που είδαμε στο μάθημα.

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 8 & 4 \\ 5 & 6 & 2 \\ 4 & 7 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 8 & 4 \\ 2 & 6 & 9 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Πρόβλημα 4. (15 μονάδες)

(i) (5 μονάδες) Δείξτε ότι σε ένα 2×2 παίγνιο, αν υπάρχουν 3 σημεία ισορροπίας με αμιγείς στρατηγικές, τότε υπάρχει άπειρο πλήθος από σημεία ισορροπίας με μεικτές στρατηγικές.

(ii) (10 μονάδες) Βρείτε όλα τα σημεία ισορροπίας με αμιγείς και με μεικτές στρατηγικές στο παρακάτω παίγνιο:

$$\begin{bmatrix} 0,0 & 5,2 & 3,4 & 6{,}5 \\ 2,6 & 3,5 & 5,3 & 1{,}0 \end{bmatrix}$$

Πρόβλημα 5. (13 μονάδες) Έστω ότι 4 φοιτητικές παρατάξεις ανταγωνίζονται για να εκλεγεί ένας εκπρόσωπος φοιτητών. Ας υποθέσουμε ότι στην ψηφοφορία θα συμμετέχουν 50 φοιτητές. Κάθε φοιτητής καλείται να ψηφίσει μία παράταξη και επίσης κάθε φοιτητής έχει τις δικές του προτιμήσεις, οι οποίες εκφράζονται μέσω μιας ολικής διάταξης. Στον πίνακα 1 βλέπουμε τις προτιμήσεις όλων των φοιτητών, π.χ. οι φοιτητές 11 ως 20 προτιμούν να εκλεγεί εκπρόσωπος από την παράταξη Π_3, η δεύτερη προτίμηση τους είναι να εκλεγεί εκπρόσωπος από την Π_1, η τρίτη προτίμηση είναι η Π_2, και τελευταία προτίμηση είναι η Π_4. Κάθε φοιτητής μπορεί αν θέλει να ψηφίσει κάποια παράταξη που δεν είναι η πρώτη του προτίμηση, αν κρίνει οτι έτσι θα προκαλέσει μια καλύτερη έκβαση για αυτόν και θα αποκλείσει το να εκλεγεί κάποιος που είναι πιο κάτω στις προτιμήσεις του. Τέλος, θεωρούμε ότι σε περίπτωση ισοβαθμίας ευνοείται η παράταξη με τον χαμηλότερο δείκτη.

	Προτιμήσεις			
Φοιτ. 1-10	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4
Φοιτ. 11-20	Π_3	Π_1	Π_2	Π_4
Φοιτ. 21-30	Π_1	Π_4	Π_3	Π_2
Φοιτ. 31-40	Π_2	Π_1	Π_3	Π_4
Φοιτ. 41-50	Π_3	Π_2	Π_4	Π_1

Πίνακας 1: Προτιμήσεις φοιτητών σε μορφή διάταξης.

(i) (3 μονάδες) Δείξτε έναν τρόπο αναπαράστασης της διαδικασίας αυτής ως παίγνιο κανονικής μορφής, περιγράφοντας τις διαθέσιμες στρατηγικές και χρησιμοποιώντας κατάλληλες συναρτήσεις χρησιμότητας (υπάρχουν πολλοί διαφορετικοί τρόποι, και μπορείτε αν θέλετε να περιγράψετε με λόγια τις συναρτήσεις, αρκεί να είναι ξεκάθαρο από την περιγραφή σας τι τιμές παίρνουν σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού τους).

(ii) (4 μονάδες) Δείξτε ότι για κάθε $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, υπάρχει σημείο ισορροπίας του παιγνίου στο οποίο κερδίζει η παράταξη i.

(iii) (6 μονάδες) Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός ψηφοφόρων που πρέπει να μην ψηφίσει την πραγματική του προτίμηση σε σημείο ισορροπίας με νικητή την παράταξη Π_2;

Πρόβλημα 6. (10 μονάδες) Επιχειρηματολογήστε για το αν υπάρχει ή όχι πολυωνυμικός αλγόριθμος για πεπερασμένα παίγνια μηδενικού αθροίσματος 3 παικτών. Ένα παίγνιο με 3 παίκτες είναι μηδενικού αθροίσματος αν για οποιεσδήποτε στρατηγικές x, y, z των 3 παικτών ισχύει ότι: $u_1(x, y, z) + u_2(x, y, z) + u_3(x, y, z) = 0$.

Πρόβλημα 7. (10 μονάδες)

Θεωρήστε το προφίλ στρατηγικών $(p, q) = ((1/2, 1/2), (1/2, 1/2))$. Σε καθένα από τα παρακάτω 2 παίγνια, βρείτε την καλύτερη τιμή $\epsilon \geq 0$ για την οποία το προφίλ αυτό είναι ϵ-σημείο ισορροπίας. Στο δεύτερο παίγνιο, το ϵ θα το δώσετε ως συνάρτηση του δ, όπου το δ είναι μια σταθερά με $0 < \delta < 1/2$.

$$\begin{bmatrix} 2/3,\ 1/3 & 0,\ 0 \\ 0,\ 0 & 1/3,\ 2/3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1/2 - \delta,\ \delta & 0,\ 1/2 - \delta \\ \delta,\ 1/2 - \delta & 1/2 - \delta,\ \delta \end{bmatrix}$$

Πρόβλημα 8. (12 μονάδες)

Θεωρήστε τη δημοπρασία πρώτης τιμής με ενσφράγιστες προσφορές, για ένα αγαθό, που είδαμε στο μάθημα. Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι υπάρχουν n παίκτες, η αποτίμηση του παίκτη i για το αγαθό είναι v_i και ισχύει ότι $v_1 > v_2 > \ldots > v_n > 0$. Νικητής στη δημοπρασία είναι ο παίκτης που δηλώνει τη μεγαλύτερη προσφορά και η τιμή που πληρώνει είναι ακριβώς η προσφορά που δηλώνει. Κάνουμε επίσης την υπόθεση ότι σε περίπτωση ισοβαθμίας, νικητής είναι ο παίκτης με τον μικρότερο δείκτη. Δείξτε γιατί σε οποιοδήποτε σημείο ισορροπίας με αμιγείς στρατηγικές πρέπει να ισχύει ότι:

1. Οι 2 υψηλότερες προσφορές είναι ίσες, και μία από αυτές έχει υποβληθεί από τον παίκτη 1 (που θα είναι και ο νικητής λόγω του κανόνα για τις ισοπαλίες).
2. Οι 2 αυτές υψηλότερες προσφορές ανήκουν στο διάστημα $[v_2, v_1]$.

Θεωρήστε δηλαδή ένα οποιοδήποτε σημείο ισορροπίας κατά Nash, έστω $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ και δείξτε ότι θα πρεπει να ισχύουν τα παραπάνω (στο μάθημα είδαμε ένα τέτοιο συγκεκριμένο σημείο ισορροπίας στη δημοπρασία πρώτης τιμής, δεν είναι όμως και μοναδικό).

Δείξτε επίσης και την αντίθετη κατεύθυνση: Οποιοδήποτε προφίλ στρατηγικών που ικανοποιεί τις 2 παραπάνω συνθήκες αποτελεί και σημείο ισορροπίας.