ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΑΛΜΑ **ΑΛΓΟΡΙΘΜΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ**
Διδάσκοντες: Θ. Λιανέας, Ε. Μαρκάκης, Δ. Φωτάκης
Εαρινό εξάμηνο 2020

2η σειρά ασκήσεων **Προθεσμία παράδοσης: 26 Μαΐου 2020**

Πρόβλημα 1. (12 μονάδες) Θεωρούμε το εξής παίγνιο που αναφέρεται συνήθως ως δημοπρασία "all-pay": Υπάρχουν 2 παίκτες, και μία ποσότητα ενός αγαθού προς πώληση που και για τους 2 έχει την ίδια χρηματική αξία $K > 0$. Οι 2 παίκτες υποβάλλουν σφραγισμένες προσφορές για τη συνολική ποσότητα, οι οποίες μπορεί να είναι πραγματικοί αριθμοί στο διάστημα $[0, K]$. Νικητής στη δημοπρασία είναι ο παίκτης που δηλώνει τη μεγαλύτερη προσφορά. Οι διαφορές με τις δημοπρασίες που είδαμε στο μάθημα είναι: (i) ότι σε περίπτωση ίσων προσφορών, οι 2 παίκτες παίρνουν τη μισή ποσότητα ο καθένας, η οποία έχει αξία $K/2$, και (ii) ότι ανεξάρτητα με το ποιος κερδίζει, και οι 2 παίκτες πληρώνουν αυτό που δήλωσαν. Τέτοια παίγνια μοντελοποιούν ορισμένες καταστάσεις ανταγωνισμού για την ανάπτυξη ενός νέου προϊόντος. Περιπτώσεις π.χ. όπου και οι δύο εταιρείες πληρώνουν κάποιο κόστος για την επένδυση και την ανάπτυξη του προϊόντος, αλλά μόνο η μία από αυτές υπερισχύει στην αγορά μπορούν να μοντελοποιηθούν ως ένα τέτοιο παίγνιο.

(i) (4 μονάδες) Να εκφράσετε μαθηματικά τις συναρτήσεις ωφέλειας (utility functions) των 2 παικτών, $u_1(b_1, b_2)$, και $u_2(b_1, b_2)$, όπου $u_1(b_1, b_2)$ είναι η ωφέλεια του παίκτη 1, όταν ο ίδιος δηλώνει b_1 και ο παίκτης 2 δηλώνει b_2 (και αντίστοιχα για τον παίκτη 2).

(ii) (8 μονάδες) Να δείξετε ότι το παίγνιο αυτό δεν έχει σημεία ισορροπίας με αμιγείς στρατηγικές.

Πρόβλημα 2. (14 μονάδες) Θεωρούμε τις Knapsack δημοπρασίες που είδαμε στο μάθημα.

(i) (8 μονάδες) Να διατυπώσετε μονότονο προσεγγιστικό αλγόριθμο που για κάθε ακέραιο $k \geq 1$, επιτυγχάνει λόγο προσέγγισης $k/(k+1)$ σε χρόνο $O(kn^{k+1})$, όπου n το πλήθος των bidders.

(ii) (6 μονάδες) Έστω ότι έχουμε 2 knapsacks με χωρητικότητες k και k'. Μια εφικτή ανάθεση στην αντίστοιχη δημοπρασία είναι οποιοδήποτε σύνολο παικτών S που μπορεί να χωριστεί σε 2 υποσύνολα $S = S_1 \cup S_2$ έτσι ώστε το S_1 να είναι εφικτή λύση για το πρώτο knapsack ($\sum_{i \in S_1} w_i \leq k$) και αντίστοιχα το S_2 να είναι εφικτή λύση για το δεύτερο knapsack ($\sum_{i \in S_1} w_i \leq k'$).

Θεωρούμε τον εξής αλγόριθμο ανάθεσης: Τρέχουμε πρώτα τον άπληστο αλγόριθμο (με βάση τον λόγο bid b_i προς μέγεθος w_i) με όλους τους παίκτες για το πρώτο knapsack. Στη συνέχεια με τους παίκτες που περίσσεψαν, τρέχουμε τον ίδιο αλγόριθμο για το δεύτερο knapsack. Να εξετάσετε αν αυτός ο αλγόριθμος είναι μονότονος.

Πρόβλημα 3. (16 μονάδες) Θεωρούμε ένα συνεκτικό μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ όπου κάθε ακμή e "ανήκει" σε διαφορετικό παίκτη A_e και έχει πραγματικό κόστος $c_e > 0$, το οποίο είναι γνωστό μόνο στον A_e. Υποθέτουμε ότι καμία ακμή του G δεν είναι γέφυρα. Θέλουμε να υπολογίσουμε ένα συνδετικό δέντρο με ελάχιστο συνολικό κόστος.

(i) (8 μονάδες) Να διατυπώσετε φιλαλήθη (truthful) μηχανισμό για αυτό το πρόβλημα. Αρχικά κάθε παίκτης A_e υποβάλει μια σφραγισμένη προσφορά b_e στον μηχανισμό για την ακμή e που του ανήκει. Με βάση τις προσφορές b_e, ο μηχανισμός υπολογίζει ένα ελάχιστο συνδετικό δέντρο T και την αμοιβή p_e κάθε παίκτη A_e. Κάθε παίκτης A_e επιδιώκει να μεγιστοποιήσει την ωφέλειά του u_e, η οποία είναι $u_e = p_e$, αν $e \notin T$, και $u_e = p_e - c_e$, αν $e \in T$. Για κάθε παίκτη A_e, ο μηχανισμός πρέπει να εξασφαλίζει ότι $u_e \geq 0$ και ότι ανεξάρτητα από τις προσφορές των άλλων παικτών, η ειλικρινής προσφορά $b_e = c_e$ μεγιστοποιεί το u_e.

(ii) (4 μονάδες) Ποια ιδιότητα πρέπει να έχει το γράφημα G ώστε ο αλγόριθμός σας να είναι φιλαλήθης; Να δώσετε παράδειγμα συνεκτικού γραφήματος για το οποίο ο μηχανισμός που διατυπώσατε δεν είναι φιλαλήθης.

(iii) (4 μονάδες) Να γενικεύσετε τον μηχανισμό που προτείνατε για την περίπτωση που οι παίκτες μπορεί να έχουν στην κατοχή τους περισσότερες από μία ακμές (να θεωρήσετε ότι κάθε ακμή ανήκει σε έναν και μόνο παίκτη). Ποια είναι η ιδιότητα που απαιτείται ώστε ο μηχανισμός που προτείνατε να είναι φιλαλήθης;

Πρόβλημα 4. (15 μονάδες) Θεωρούμε μια δημοπρασία με 1 αγαθό και 2 παίκτες. Η αξία (valuation) των παικτών για το αγαθό προέρχεται από την ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, 1]$.

(i) (5 μονάδες) Να δείξετε ότι το αναμενόμενο κέρδος από την δημοπρασία Vickrey είναι $1/3$.

(ii) (5 μονάδες) Έστω ότι χρησιμοποιούμε δημοπρασία Vickrey με reserve price το $1/2$. Να υπολογίσετε το αναμενόμενο κέρδος σε αυτή την περίπτωση και να το συγκρίνετε με το αναμενόμενο κέρδος της προηγούμενης περίπτωσης.

(iii) (5 μονάδες) Να υπολογίσετε το αναμενόμενο κέρδος από την δημοπρασία Vickrey για 3 παίκτες όπως οι παραπάνω.

Πρόβλημα 5. (5 μονάδες) Να υπολογίσετε την virtual valuation function για την κατανομή με cdf $F(z) = 1 - \frac{1}{(z+1)^c}$, όπου $z \in [0, \infty)$ και $c > 0$. Για ποιες τιμές του c η κατανομή αυτή είναι regular;

Πρόβλημα 6. (14 μονάδες) Θεωρούμε το παρακάτω παίγνιο με 2 παίκτες και 3 στρατηγικές για κάθε παίκτη:

$$\begin{bmatrix} 4,5 & 3,1 & 3,2 \\ 3,4 & 3,2 & 5,1 \\ 4,3 & 2,5 & 4,3 \end{bmatrix}$$

(i) (4 μονάδες) Να σχεδιάσετε το γράφημα για το best response dynamics. Να διερευνήσετε αν υπάρχει συνάρτηση δυναμικού για το best response dynamics σε αυτό το παίγνιο.

(ii) (10 μονάδες) Θεωρούμε την εξής επαναληπτική διαδικασία, που συνήθως αναφέρεται ως *better response dynamics*: έστω ότι ξεκινάμε από κάποια διαμόρφωση, και εάν μπορεί κάποιος παίκτης να αλλάξει την στρατηγική του και να βελτιώσει την ωφέλειά του, την ακολουθούμε. Μια τέτοια κίνηση λέγεται *καλύτερη απόκριση* (better response, δεν είναι απαραίτητα η βέλτιστη δυνατή απόκριση, αλλά σίγουρα βελτιώνει την ωφέλεια του παίκτη που αλλάζει στρατηγική). Αν για μία διαμόρφωση, υπάρχουν περισσότερες από μία καλύτερες αποκρίσεις για έναν παίκτη ή αν και οι δύο παίκτες διαθέτουν καλύτερες αποκρίσεις, ακολουθούμε μία από αυτές αυθαίρετα.

Για κάθε διαμόρφωση του παιγνίου, εξετάστε τι μπορεί να συμβεί αν το better response dynamics εκκινήσει από εκεί. Ειδικότερα, αν από κάποια αρχική διαμόρφωση, το better response dynamics μπορεί να έχει κυκλική συμπεριφορά, εξηγήστε πώς ακριβώς δημιουργείται ο κύκλος. Αν από κάποια αρχική διαμόρφωση, το better response dynamics δεν μπορεί να έχει κυκλική συμπεριφορά, να βρείτε το μονοπάτι μέγιστου μήκους που μπορεί να ακολουθήσει η διαδικασία. Συνολικά, πρέπει να δείξετε και για τις 9 διαμορφώσεις αν υπάρχει κύκλος ή σύγκλιση.

Πρόβλημα 7. (10 μονάδες) Σε ένα ατομικό παίγνιο συμφόρησης με παίκτες διαφορετικού βάρους (ή απλά, παίγνιο συμφόρησης με βάρη), κάθε παίκτης $i \in [n]$ έχει βάρος $w_i \in \mathbb{N}^*$. Ο ορισμός των παιγνίων συμφόρησης με βάρη είναι αντίστοιχος με αυτόν των παιγνίων συμφόρησης με παίκτες μοναδιαίου βάρους, με μόνη διαφορά ότι η συμφόρηση σ_e κάθε ακμής e σε μια διαμόρφωση σ είναι ίση με το *συνολικό βάρος* των παικτών που χρησιμοποιούν την e, δηλ., $\sigma_e = \sum_{i:e\in\sigma_i} w_i$. Κατά τα άλλα, η καθυστέρηση σε κάθε ακμή e είναι $d_e(\sigma_e)$ και το ατομικό κόστος κάθε παίκτη i στην σ είναι $c_i(\sigma) = \sum_{e\in\sigma_i} d_e(\sigma_e)$.

Θεωρούμε ένα παίγνιο συμφόρησης με βάρη σε ένα δίκτυο παράλληλων ακμών με ταυτοτικές συναρτήσεις καθυστέρησης $d(x) = x$. Να δείξετε ότι η $\Phi(\sigma) = \sum_e (\sigma_e)^2$ αποτελεί μια βεβαρημένη συνάρτηση δυναμικού (weighted potential function) για ένα τέτοιο παίγνιο.

Πρόβλημα 8. (14 μονάδες) Ένα παίγνιο σύνδεσης (fair network connection game) ορίζεται σε ένα κατευθυνόμενο δίκτυο $G(V, E)$ με μία διακεκριμένη κορυφή s. Έχουμε n παίκτες, και κάθε παίκτης i πρέπει να συνδέσει μία κορυφή $t_i \in V$ με την s μέσω ενός $t_i - s$ μονοπατιού. Το σύνολο των στρατηγικών κάθε παίκτη i είναι το σύνολο $\mathcal{P}_i$ όλων των $t_i - s$ μονοπατιών στο G. Μια διαμόρφωση σ αποτελείται από ένα $t_i - s$ μονοπάτι σ_i για κάθε παίκτη i. Κάθε ακμή $e \in E$ έχει ένα κόστος $c_e \geq 0$, το οποίο μοιράζονται ισομερώς οι παίκτες που τη χρησιμοποιούν (δηλ. κάθε παίκτης που χρησιμοποιεί την e στη διαμόρφωση σ έχει κόστος c_e/σ_e, όπου $\sigma_e = |\{i : e \in \sigma_i\}|$ είναι το πλήθος των παικτών που χρησιμοποιούν την e στην σ). Το ατομικό κόστος $c_i(\sigma)$ κάθε παίκτη i στη διαμόρφωση σ δίνεται από το άθροισμα του κόστους σε όλες τις ακμές στο μονοπάτι του, δηλ. $c_i(\sigma) = \sum_{e\in\sigma_i} c_e/\sigma_e$.

(i) (6 μονάδες) Να δείξετε ότι η συνάρτηση δυναμικού του Rosenthal αποτελεί μια συνάρτηση δυναμικού για τα παίγνια σύνδεσης.

(ii) (8 μονάδες) Να δείξετε ότι το Τίμημα της Αναρχίας (Price of Anarchy) για ένα παίγνιο σύνδεσης δεν ξεπερνά το n. Να δώσετε παράδειγμα παιγνίου όπου το Τίμημα της Αναρχίας είναι $\Omega(n)$.