Προηγμένα Θέματα Αλγορίθμων (ΣΗΜΜΥ ΕΜΠ)
Αλγόριθμοι Δικτύων και Πολυπλοκότητα (ΕΜΠ - ΑΛΜΑ)

Διδάσκοντες: Δημήτρης Φωτάκης - Άρης Παγουρτζής

Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι

Επιμέλεια διαφανειών: Άρης Παγουρτζής

Άνοιξη 2020

Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι

- Αφορούν κυρίως σε προβλήματα βελτιστοποίησης: σε κάθε στιγμιότυπο αντιστοιχούν εφικτές (αποδεκτές / έγκυρες) λύσεις (feasible solutions) που η κάθε μια έχει μια τιμή μέσω μιας αντικειμενικής συνάρτησης (objective function) (συνήθως εκφράζει: κόστος, μήκος, βάρος, κ.λπ.).
  Ζητείται βέλτιστη λύση, δηλαδή εφικτή λύση με βέλτιστη τιμή.
- Προβλήματα ελαχιστοποίησης (minimization): Shortest Paths, Dominating Set, Vertex Cover.
- Προβλήματα μεγιστοποίησης (maximization): Maximum Matching, Independent Set, Clique.
- Ενδιαφερόμαστε κυρίως για **NP**-optimization προβλήματα.
  Κλάση **NPO**: το αντίστοιχο πρόβλημα απόφασης ανήκει στην κλάση **NP**.

Συμβολισμοί

- Π: πρόβλημα βελτιστοποίησης
- I: στιγμιότυπο (είσοδος) του προβλήματος
- $SOL_A(\Pi, I)$: η τιμή της λύσης που επιστρέφει ο αλγόριθμος A για το στιγμιότυπο I του προβλήματος Π.
- $OPT(\Pi, I)$: η τιμή της βέλτιστης λύσης για το στιγμιότυπο I του προβλήματος Π.

Σημείωση: Συχνά Π, A και I παραλείπονται.

Προσεγγισιμότητα: προβλήματα ελαχιστοποίησης

- Λόγος προσέγγισης αλγορίθμου: Το ελάχιστο ρ που ικανοποιεί

$$\frac{SOL_A(I)}{OPT(I)} \leq \rho$$

  για κάθε στιγμιότυπο I ενός προβλήματος ελαχιστοποίησης λέγεται λόγος (ή παράγοντας) προσέγγισης (approximation ratio) του αλγορίθμου A, και ο A λέγεται ρ-προσεγγιστικός αλγόριθμος για το πρόβλημα.

- Λόγος προσέγγισης προβλήματος: Αν για πρόβλημα Π υπάρχει ρ-προσεγγιστικός αλγόριθμος, λέμε ότι το Π προσεγγίζεται με λόγο (ή παράγοντα) ρ. Μας ενδιαφέρει το ελάχιστο ρ μεταξύ όλων των δυνατών προσεγγιστικών αλγορίθμων για το Π.

Σημείωση: συνήθως, ο όρος προσεγγιστικός αλγόριθμος αναφέρεται σε αλγόριθμο πολυωνυμικού χρόνου ως προς το μέγεθος εισόδου $|I|$.

Προσεγγισιμότητα: προβλήματα μεγιστοποίησης

- Προβλήματα μεγιστοποίησης: ο αλγόριθμος A λέγεται ρ-προσεγγιστικός για το Π αν για κάθε I:

$$\frac{SOL_A(I)}{OPT(I)} \geq \rho$$

  (δηλαδή $\rho < 1$ για προβλήματα μεγιστοποίησης)

- Λόγος προσέγγισης αλγορίθμου για πρόβλημα μεγιστοποίησης: το μέγιστο ρ που ικανοποιεί την παραπάνω σχέση (για κάθε I).
- Λόγος προσέγγισης προβλήματος: το μέγιστο ρ μεταξύ όλων των αλγορίθμων που το επιλύουν.

Προσεγγισιμότητα: εναλλακτικοί ορισμοί

- Εναλλακτικός ορισμός του λόγου προσέγγισης, κοινός για προβλήματα ελαχιστοποίησης και μεγιστοποίησης:

  Ενας αλγόριθμος A για ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης Π λέγεται ρ-προσεγγιστικός, αν για κάθε έγκυρο στιγμιότυπο I:

$$\max\{\frac{SOL_A(I)}{OPT(I)}, \frac{OPT(I)}{SOL_A(I)}\} \leq \rho$$

  Στο πλαίσιο αυτό $\rho > 1$ πάντοτε. Ακολουθείται σε κάποια βιβλιογραφία, εμείς θα χρησιμοποιήσουμε τους προηγούμενους ορισμούς.

- Παλαιότερος ορισμός εξετάζει το *σχετικό σφάλμα*. Ένας αλγόριθμος A έχει σχετικό σφάλμα προσέγγισης ϵ αν $\forall I$:

$$\frac{|SOL_A(I) - OPT(I)|}{OPT(I)} \leq \epsilon$$

Προσεγγισιμότητα: άλλες έννοιες

- Ο λόγος προσέγγισης στην γενική περίπτωση είναι συνάρτηση του μεγέθους (μήκους) της εισόδου:

$$\forall I : \quad \frac{SOL_A(I)}{OPT(I)} \leq \rho(|I|) \quad (\geq \quad \text{για max})$$

- Ασυμπτωτικός λόγος προσέγγισης: η ανισότητα ισχύει $\forall I, |I| \geq n_0$.
- **APX**: κλάση προβλημάτων που επιλύονται με σταθερό λόγο προσέγγισης σε πολυωνυμικό χρόνο. Υποκλάση της **NPO**.
- Πιθανοτικοί προσεγγιστικοί αλγόριθμοι: ο λόγος προσέγγισης επιτυγχάνεται *με μεγάλη πιθανότητα* (τυπικοί ορισμοί αργότερα).

Κλάσεις προσεγγισιμότητας

- **PTAS**: κλάση προβλημάτων που επιλύονται με οποιοδήποτε σταθερό λόγο προσέγγισης $1+\varepsilon$ (μεγιστ/σης: $1-\varepsilon$) σε πολυωνυμικό χρόνο ως προς $|I|$. Υποκλάση της **APX**.
- **FPTAS**: κλάση προβλημάτων που επιλύονται με οποιοδήποτε σταθερό λόγο προσέγγισης $1+\varepsilon$ (μεγιστ/σης: $1-\varepsilon$) σε πολυωνυμικό χρόνο ως προς $|I|$ και $\frac{1}{\varepsilon}$. Υποκλάση της **PTAS**.
- **log − APX**: κλάση προβλημάτων που επιλύονται με λογαριθμικό (ως προς $|I|$) λόγο προσέγγισης σε πολυωνυμικό χρόνο. Υπερκλάση της **APX**.
- **poly − APX**: κλάση προβλημάτων που επιλύονται με πολυωνυμικό (ως προς $|I|$) λόγο προσέγγισης σε πολυωνυμικό χρόνο. Υπερκλάση της **log − APX**.

Ιεραρχία προσεγγισιμότητας

$$\mathbf{FP} \subseteq \mathbf{FPTAS} \subseteq \mathbf{PTAS} \subseteq \mathbf{APX} \subseteq \mathbf{log-APX} \subseteq \mathbf{poly-APX} \subseteq \mathbf{NPO}$$

Το πρόβλημα **Vertex Cover (VC)**

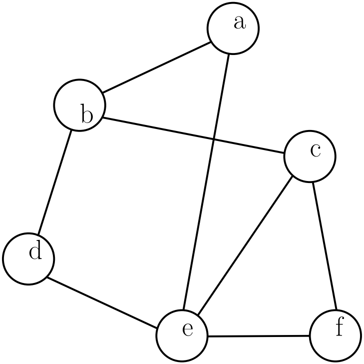
Vertex Cover

Δίνεται: γράφος $G(V, E)$
Ζητείται: Κάλυμμα ή κάλυψη κόμβων (vertex cover) ελάχιστης πληθικότητας, δηλαδή ελάχιστο σύνολο κόμβων V' έτσι ώστε κάθε ακμή να έχει τουλάχιστον έναν από τους κόμβους της στο V'.

Weighted Vertex Cover (WVC): οι κόμβοι έχουν και βάρος και το ζητούμενο είναι το σύνολο V' να είναι ελαχίστου βάρους.

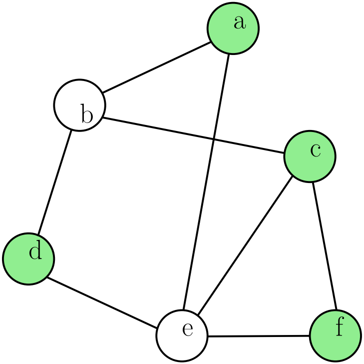
Σημείωση: Συχνά ο όρος **Vertex Cover** χρησιμοποιείται για την weighted εκδοχή του προβλήματος. Τότε για το πρώτο πρόβλημα χρησιμοποιούνται οι όροι "Unweighted" ή "Cardinality".

Παράδειγμα (**Vertex Cover**)



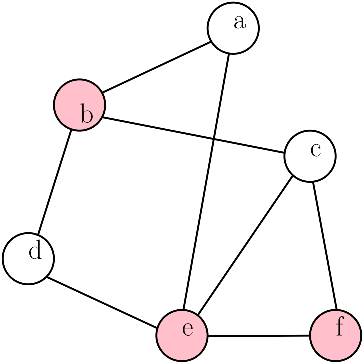
Σχήμα: Ένα στιγμιότυπο του προβλήματος **Vertex Cover**

Παράδειγμα (Vertex Cover)



Σχήμα: Μια μη βέλτιστη λύση

Παράδειγμα (Vertex Cover)



Σχήμα: Μια βέλτιστη λύση

Άπληστος αλγόριθμος για το **Vertex Cover**

Αλγόριθμος VC-Greedy

$C \leftarrow \emptyset$

Επανάλαβε για όσο $\exists e = \{u, v\} \in E : \{u, v\} \cap C = \emptyset$

- Βρές κόμβο v που καλύπτει μέγιστο πλήθος ακάλυπτων ακμών
- $C \leftarrow C \cup S_i$

Ερώτηση: τι λόγο προσέγγισης επιτυγχάνει ο VC-Greedy ;

Θα το απαντήσουμε σε λίγο

Αλγόριθμος VC-Match

- Βρες maximal matching $M_{\max}$ στον γράφο
- Επίστρεψε το σύνολο V' των κόμβων που είναι άκρα ακμών του $M_{\max}$

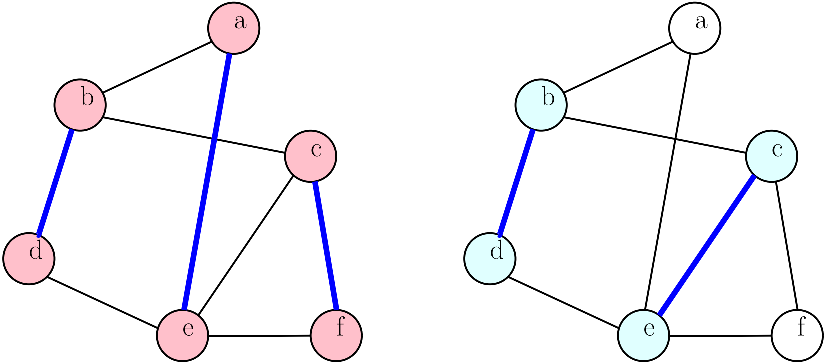
Θεώρημα

Ο παραπάνω αλγόριθμος είναι 2-προσεγγιστικός.

Απόδειξη.

1. Το V' είναι εφικτή λύση (γιατί;)
2. $|M_{\max}| \leq OPT$
3. $SOL = 2 \cdot |M_{\max}| \leq 2 \cdot OPT$ $\square$

Παράδειγμα εκτέλεσης VC-Greedy



Σχήμα: Δύο εκτελέσεις του VC-Greedy: η πρώτη δίνει λύση κόστους $6 (= 2OPT)$ η δεύτερη δίνει λύση κόστους $4 (= \frac{4}{3}OPT)$

Ανελαστική Ανάλυση (Tight Analysis)

- Η παραπάνω ανάλυση είναι ανελαστική (tight), δηλαδή αποδεικνύεται ότι ο αλγόριθμος δεν μπορεί να πετύχει καλύτερο λόγο προσέγγισης.
- Η απόδειξη συνήθως συνίσταται στη εύρεση ανελαστικού παραδείγματος (tight example): άπειρη οικογένεια στιγμιοτύπων για τα οποία ο αλγόριθμος δεν μπορεί να πετύχει λόγο προσέγγισης $2 - \varepsilon$, για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$.
- Για τον προηγούμενο αλγόριθμο για το **VC** ένα tight example είναι οι πλήρεις διμερείς γράφοι $K_{n,n}$.

Ανελαστικότητα του λόγου $OPT/M_{\max}$

- Ένα διαφορετικό είδος ανελαστικότητας (tightness): αφορά στο λόγο της αντικειμενικής τιμής της βέλτιστης λύσης OPT προς το κάτω φράγμα $M_{\max}$ που χρησιμοποιούμε.
- Για το **Vertex Cover**, εξετάζοντας πλήρεις γράφους (K_n) προκύπτει ότι το μέγεθος του maximal matching ως κάτω φράγμα για το OPT δεν μπορεί να δώσει καλύτερο λόγο προσέγγισης από 2.
- Για παράδειγμα, δεν μπορεί να υπάρχει αλγόριθμος που να βρίσκει, σε κάθε γράφο, vertex cover μεγέθους $\leq \frac{3}{2}|M_{\max}|$.
- *Φαινομενικά παράδοξο:* ο 2-προσεγγιστικός αλγόριθμος επιτυγχάνει (σχεδόν) βέλτιστη λύση για κάθε γράφο K_n. *Εξήγηση:* Η ανελαστικότητα αυτή μας δίνει μια αξιολόγηση του κάτω φράγματος και *όχι κάποιου αλγορίθμου*.

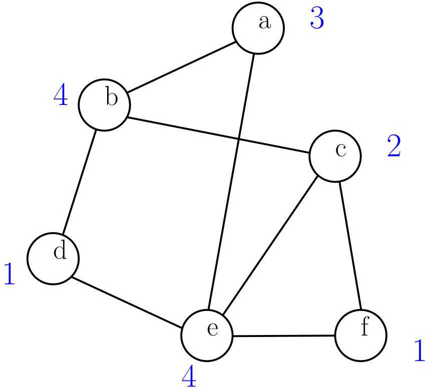
Το πρόβλημα **Weighted Vertex Cover (VC)**

Weighted Vertex Cover

Δίνεται: γράφος $G(V, E)$, συνάρτηση βάρους $w : V \to \mathbb{Q}^+$
Ζητείται: Κάλυμμα κόμβων ελάχιστου βάρους, δηλαδή σύνολο κόμβων V^* έτσι ώστε κάθε ακμή να έχει τουλάχιστον έναν από τους κόμβους της στο V' και $w(V^*) = \Sigma_{v \in V^*} w(v)$ είναι το ελάχιστο δυνατό:

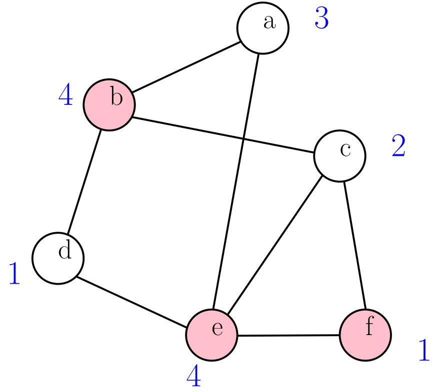
$$V^* = \arg\min_{V' \subseteq V} \Sigma_{v \in V'} w(v)$$

Παράδειγμα (Weighted Vertex Cover)



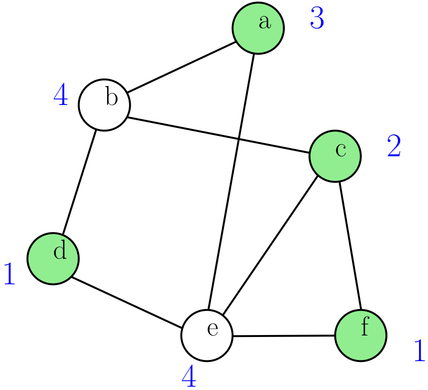
Σχήμα: Στιγμιότυπο του προβλήματος **Weighted Vertex Cover**

Παράδειγμα (**Weighted Vertex Cover**)



Σχήμα: Μια μη βέλτιστη λύση (κόστος 9)

Παράδειγμα (Weighted Vertex Cover)



Σχήμα: Μια βέλτιστη λύση (κόστος 7)

Προσεγγίζοντας το **Weighted Vertex Cover (WVC)**

Ορισμός

Degree-weighted συνάρτηση $w : V \to \mathbf{Q}$ *(σε γράφο* $G(V,E)$*):*
$\exists c > 0, \forall v \in V, w(v) = c \cdot deg(v)$*, όπου* $deg(v)$ *είναι ο βαθμός του κόμβου* v*.*

Λήμμα

Αν η συνάρτηση βαρών w σε γράφο $G(V,E)$ είναι degree-weighted τότε $w(V) \leq 2 \cdot OPT_{WVC}$

Απόδειξη.

- Αν U είναι vertex cover τότε $deg(U) \geq |E|$ (συμβολισμός: $deg(U) = \sum_{u \in U} deg(u)$)
- Όμως $deg(V) = 2|E| \leq 2deg(U)$
- Επομένως, αν w είναι degree-weighted: $w(V) \leq 2w(U)$
- Αυτό ισχύει και για vertex cover U_{OPT} ελαχίστου βάρους. Αρα:

$$w(V) \leq 2w(U_{OPT}) = 2OPT_{WVC}$$

□

Ερώτηση: τι συμπεραίνουμε από το παραπάνω λήμμα;

Προσεγγίζοντας το **Weighted Vertex Cover (WVC)**

Αλγόριθμος Degree-Weighted-WVC

Επανάλαβε για όσο υπάρχουν κόμβοι στο γράφο
- αφαίρεσε κόμβους μηδενικού βαθμού
- βρές μέγιστο c τ.ώ. $\forall v \in V,\ c \cdot deg(v) \leq w(v)$
  (όπου w η τρέχουσα συνάρτηση βάρους)
- $\forall v \in V$ θέσε $w(v) \leftarrow w(v) - c \cdot deg(v)$
- πρόσθεσε κόμβους βάρους 0 στην κάλυψη
  και αφαίρεσέ τους από το γράφο.

Ιδέα: διάσπαση της δοθείσης συνάρτησης βάρους σε degree-weighted συναρτήσεις.

Θεώρημα

Ο παραπάνω αλγόριθμος είναι 2-προσεγγιστικός για το πρόβλημα **WVC**.

Το πρόβλημα Set Cover

Set Cover

Δίνεται: σύνολο U με n στοιχεία και συλλογή υποσυνόλων του U,
$\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_k\}$, $S_i \subseteq U$
Ζητείται: ελάχιστης πληθικότητας συλλογή $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ τ.ώ. κάθε στοιχείο του U να ανήκει σε τουλάχιστον ένα σύνολο της $\mathcal{S}'$: $\bigcup_{S \in \mathcal{S}'} S = U$.

Weighted Set Cover: τα υποσύνολα έχουν βάρος (κόστος) και το ζητούμενο είναι η $\mathcal{S}'$ να είναι ελαχίστου βάρους.

Σημείωση: Συχνά ο όρος **Set Cover** χρησιμοποιείται για την weighted εκδοχή του προβλήματος. Τότε για το πρώτο πρόβλημα χρησιμοποιούνται οι όροι “Unweighted” ή “Cardinality”.

Ο άπληστος αλγόριθμος για το **Set Cover**

Αλγόριθμος SC-Greedy

$C \leftarrow \emptyset$

`Επανάλαβε όσο` $C \neq U$:

- `Βρές` $S_i \in \mathcal{S}$ `που μεγιστοποιεί` $|S_i \setminus C|$
- $C \leftarrow C \cup S_i$

Θεώρημα

Ο αλγόριθμος SC-Greedy είναι $\log n$*-προσεγγιστικός για το πρόβλημα* **Set Cover**.

Ιδέα απόδειξης: σε κάθε $k = OPT$ επαναλήψεις καλύπτονται τουλάχιστον τα μισά (ακάλυπτα) στοιχεία του U.
Αν όχι, $\exists S^* \in C_{opt}$ που καλύπτει τουλάχιστον $\frac{n}{2k}$ ακάλυπτα στοιχεία.
Άτοπο!

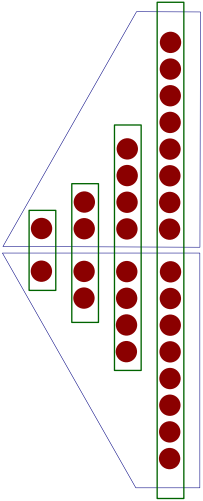
Tight example για τον Greedy αλγόριθμο για το πρόβλημα **Set Cover**

$U = \bigcup_{i=1}^{t}\{a_{2^{i-1}}, \ldots a_{2^i-1}\} \cup \bigcup_{i=1}^{t}\{a'_{2^{i-1}}, \ldots a'_{2^i-1}\}$

$S_i = \{a_{2^{i-1}}, \ldots a_{2^i-1}\} \cup \{a'_{2^{i-1}}, \ldots a'_{2^i-1}\}$, $i = 1, \ldots, t$

$S_{k+1} = \bigcup_{i=1}^{t}\{a_{2^{i-1}}, \ldots a_{2^i-1}\}$

$S_{k+2} = \bigcup_{i=1}^{t}\{a'_{2^{i-1}}, \ldots a'_{2^i-1}\}$



$SOL = t \approx \log n, \quad OPT = 2$

Λόγος προσέγγισης: $\Theta(\log n)$

Ο άπληστος αλγόριθμος για το πρόβλημα **Weighted Set Cover**

Αλγόριθμος Weighted SC-Greedy

$C \leftarrow \emptyset$
Επανάλαβε για όσο $C \neq U$:
- Βρές S_i με ελάχιστο $\alpha_i = cost(S_i)/|S_i \setminus C|$
- $\forall e \in S_i \setminus C$ θέσε $price(e) \leftarrow \alpha_i$
- $C \leftarrow C \cup S_i$

Σημείωση: $price(e_k)$ είναι η τιμή που "πληρώσαμε" για να καλυφθεί το στοιχείο e_k.

Συνολικό κόστος κάλυψης: $SOL = \sum_{k=1}^{n} price(e_k)$.

Ανάλυση του Weighted SC-Greedy

Θεώρημα

Ο αλγόριθμος Weighted SC-Greedy είναι H_n-προσεγγιστικός, όπου $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots \frac{1}{n} < \ln n + 1$.

Απόδειξη.

Υποθέτουμε ότι τα στοιχεία του U αριθμούνται με τη σειρά που καλύπτονται από τον αλγόριθμο. Παρατηρούμε ότι:

- Σε οποιαδήποτε επανάληψη του αλγορίθμου μπορούμε να καλύψουμε όλα τα ακάλυπτα στοιχεία με κόστος το πολύ OPT (γιατί;).
- Επομένως υπάρχει πάντα σύνολο με κόστος/νέο στοιχείο το πολύ $OPT/|U - C|$ (C: η τρέχουσα κάλυψη).
- Πριν καλυφθεί το στοιχείο e_k για πρώτη φορά ισχύει $|U - C| \geq n - k + 1$. Άρα $price(e_k) \leq \frac{OPT}{n-k+1}$.

Συνολικό κόστος: $SOL \leq \Sigma_{k=1}^{n} \frac{OPT}{n-k+1} = H_n \cdot OPT$ $\square$

Tight example

$U = \{a_1, \dots, a_n\}$

$\forall i \in \{1, \dots, n\},\ S_i = \{a_i\},\ cost(S_i) = \frac{1}{i}$

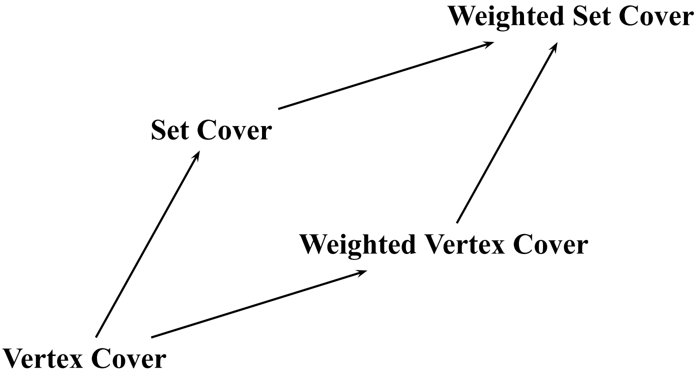
$S_{n+1} = U,\ cost(S_{n+1}) = 1 + \varepsilon$, για $\varepsilon > 0$

$SOL = H_n, \quad OPT = 1 + \varepsilon$

Επομένως $\rho(n) > H_n - \varepsilon'$ για οποιοδήποτε ε'.

Σημείωση: Αποδεικνύεται ότι ο αλγόριθμος έχει το ίδιο κάτω φράγμα λόγου προσέγγισης και για το **(Cardinality) Set Cover** και για το **Vertex Cover**!

Ιεράρχηση Προβλημάτων



Σημείωση: κάτω φράγματα στο λόγο προσέγγισης ‘διαδίδονται’ προς τα πάνω, άνω φράγματα προς τα κάτω

Μερικά γνωστά φράγματα

- **Weighted Set Cover**: H_n-προσεγγιστικός αλγόριθμος (ειδικότερα: $H_{|S_{\max}|}$).
- **Weighted Set Cover**: f-προσεγγιστικός αλγόριθμος.
- **(Weighted) Set Cover**: μη προσεγγίσιμο με λόγο $(1 - o(1)) \ln n$ εκτός εάν $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ [Dinur-Steurer 2013].
- **(Weighted) Vertex Cover**: μη προσεγγίσιμο με λόγο 1.3606 εκτός εάν $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ [Dinur-Safra 2005].
  Μη προσεγγίσιμο με λόγο $2 - \varepsilon$ αν ισχύει η εικασία Unique Games Conjecture [Khot-Regev 2008].
  Καλύτερο γνωστό άνω φράγμα: $2 - \Theta(\frac{1}{\sqrt{\log n}})$ [Karakostas 2004].

Πρόβλημα μεγιστοποίησης: Maximum Coverage

Δίνεται: σύνολο U με n στοιχεία, συλλογή $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_l\}$ υποσυνόλων του U, και ακέραιος k.
Ζητείται: Μία συλλογή $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ αποτελούμενη από k σύνολα τ.ώ. το πλήθος των στοιχείων που καλύπτει η $\mathcal{S}'$ να είναι μέγιστο.

Θεώρημα

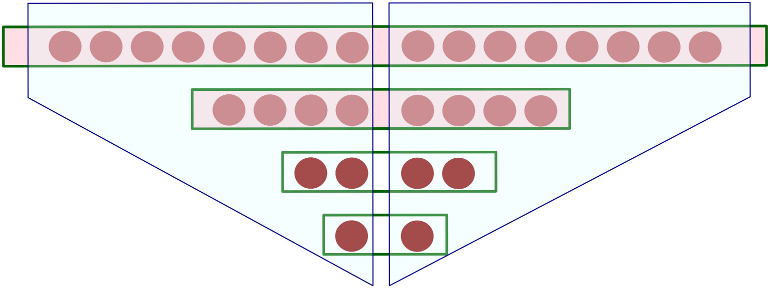
Ο άπληστος αλγόριθμος SC-Greedy που κάθε φορά επιλέγει το μεγαλύτερο, ως προς πλήθος νέων στοιχείων, σύνολο επιτυγχάνει (με k επαναλήψεις) λόγο προσέγγισης

$$1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k > 1 - \frac{1}{e}$$

για το πρόβλημα **Maximum Coverage**.

Σημείωση: Το πρόβλημα ανήκει στην κλάση **APX**, παρ'ότι το **Set Cover** δεν ανήκει!

Παράδειγμα



Εκτέλεση SC-Greedy για **Maximum Coverage** με $k = 2$:

$$n_{opt} = 30, \quad n_{sol} = 24$$

Γενική περίπτωση, $|U| = 2 \cdot (2^t - 1)$:

$$n_{opt} = |U|, \quad n_{sol} = 3 \cdot 2^{t-1} > \frac{3}{4} n_{opt}$$

Απόδειξη λόγου προσέγγισης $1 - \frac{1}{e}$ για το **Maximum Coverage** (i)

- Έστω $\mathcal{S}_{opt}$ μια βέλτιστη λύση που καλύπτει πλήθος στοιχείων n_{opt}. Αφού το πλήθος των συνόλων της $\mathcal{S}_{opt}$ είναι k θα πρέπει να υπάρχει σύνολο στην $\mathcal{S}$ με πληθικότητα $\geq \frac{n_{opt}}{k}$. Επομένως, ο άπληστος αλγόριθμος στο 1ο βήμα θα βρεί και θα επιλέξει σύνολο τουλάχιστον τόσων στοιχείων.
- Με άλλα λόγια, στο 1ο βήμα, καλύπτεται πλήθος στοιχείων που αντιπροσωπεύουν τουλάχιστον το $\frac{1}{k}$ του n_{opt} ή, ισοδύναμα, μένει ακάλυπτο το πολύ ένα μέρος $1 - \frac{1}{k}$ των στοιχείων της βέλτιστης λύσης $\mathcal{S}_{opt}$.

Σημείωση: Κάθε φορά που ο άπληστος αλγόριθμος καλύπτει στοιχεία που δεν ανήκουν στη βέλτιστη λύση μπορούμε, για τις ανάγκες της απόδειξης και μόνο, να "σβήνουμε" ισάριθμο πλήθος στοιχείων από τη βέλτιστη λύση, θεωρώντας ότι το αντίστοιχο μέρος έχει καλυφθεί.

Απόδειξη λόγου προσέγγισης $(1 - \frac{1}{e})$− για το **Maximum Coverage** (ii)

- Με ανάλογα επιχειρήματα, μπορούμε να δείξουμε ότι στο i-οστό βήμα το ακάλυπτο μέρος της βέλτιστης λύσης μειώνεται τουλάχιστον κατά $\frac{1}{k}$ (αφού τα k σύνολα της $\mathcal{S}_{opt}$ αρκούν για να το καλύψουν πλήρως) και επομένως απομένει ακάλυπτο το πολύ ένα μέρος $(1 - \frac{1}{k})^i$ της βέλτιστης λύσης.
- Τελικά, σε k βήματα έχει καλυφθεί τουλάχιστον το $1 - (1 - \frac{1}{k})^k$ της βέλτιστης λύσης. Επομένως:

$$SOL \geq (1 - (1 - \frac{1}{k})^k) n_{opt} > (1 - \frac{1}{e}) n_{opt}$$

(Χρήσιμη ιδιότητα: $\forall x \in \mathbb{R}, 1 + x \leq e^x$)

Γενικεύσεις

- Το αποτέλεσμα ισχύει και στην περίπτωση που τα στοιχεία έχουν βάρος και ζητείται λύση που καλύπτει μέγιστο βάρος στοιχείων.
- Το αποτέλεσμα ισχύει ακόμη και σε περιπτώσεις όπου δεν δίνονται τα σύνολα της $\mathcal{S}$ αναλυτικά (μπορεί να είναι και εκθετικά πολλά), αλλά μπορούμε να βρίσκουμε το "καλύτερο" σύνολο σε πολυωνυμικό χρόνο.
- Εάν μπορούμε να βρίσκουμε το "καλύτερο" σύνολο σε πολυωνυμικό χρόνο με προσέγγιση ρ (≤ 1) τότε ο άπληστος αλγόριθμος επιτυγχάνει λόγο προσέγγισης

  $$1 - (1 - \frac{\rho}{k})^k > 1 - \frac{1}{e^\rho}$$

  για το πρόβλημα **Maximum Coverage**.
- Ενδιαφέρουσα γενίκευση: monotone submodular functions.

Το Πρόβλημα του Πλανόδιου Πωλητή
Traveling Salesman problem (TSP)

Ορισμός του προβλήματος TSP

Δίνεται: *πλήρης γράφος* $G(V, E)$ *με μη αρνητικά κόστη (βάρη) στις ακμές του.*

Ζητείται: *κύκλος ελαχίστου κόστους που να επισκέπτεται κάθε κόμβο ακριβώς μία φορά (Hamilton Cycle).*

Θεώρημα

Το πρόβλημα TSP δεν μπορεί να προσεγγιστεί με παράγοντα $\alpha(n)$*, όπου* $n = |V|$*, για οποιαδήποτε πολυωνυμικά υπολογιστή συνάρτηση* $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$*, εκτός εάν* **P** = **NP**.

Απόδειξη.

Αναγωγή από το **Hamilton Cycle**: συμπληρώνουμε τον αρχικό γράφο G με ακμές ώστε να κατασκευάσουμε πλήρη γράφο G'. Στις αρχικές ακμές δίνουμε βάρος 1, στις υπόλοιπες δίνουμε βάρος $\alpha(n) \cdot n$. Ισχύει ότι:

- Αν ο G είναι Hamilton τότε υπάρχει κύκλος TSP κόστους n στον G', ενώ
- Αν ο G δεν είναι Hamilton τότε ο βέλτιστος κύκλος TSP στον G' έχει κόστος $> \alpha(n) \cdot n$.

□

Αναγωγές Εισαγωγής Χάσματος (i) (Gap Introducing Reductions)

Μια αναγωγή h από το πρόβλημα απόφασης Π στο πρόβλημα ελαχιστοποίησης Π' (που απεικονίζει κάθε στιγμιότυπο I του Π σε κάποιο στιγμιότυπο $I' = h(I)$ του Π') λέγεται *αναγωγή εισαγωγής χάσματος* όταν υπάρχουν συναρτήσεις f, α ώστε:

- Αν το I είναι 'yes'-instance του Π τότε $OPT_{\Pi'}(I') \leq f(I')$, ενώ
- Αν το I είναι 'no'-instance του Π τότε $OPT_{\Pi'}(I') > \alpha(|I'|) \cdot f(I')$.

Θεώρημα

Αν το πρόβλημα Π είναι **NP***-complete και υπάρχει αναγωγή εισαγωγής χάσματος με παραμέτρους f, α από το Π στο πρόβλημα Π' τότε το Π' δεν προσεγγίζεται με παράγοντα $\alpha(n)$, εφ'όσον* $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ *(όπου n το μήκος της αναπαράστασης της εισόδου του Π').*

Αναγωγές Εισαγωγής Χάσματος (ii) (Gap Introducing Reductions)

Μια αναγωγή h από το πρόβλημα απόφασης Π στο πρόβλημα μεγιστοποίησης Π' (που απεικονίζει κάθε στιγμιότυπο I του Π σε κάποιο στιγμιότυπο $I' = h(I)$ του Π') λέγεται *αναγωγή εισαγωγής χάσματος* όταν υπάρχουν συναρτήσεις f, α ώστε:

- Αν το I είναι 'yes'-instance του Π τότε $OPT_{\Pi'}(I') \geq f(I')$, ενώ
- Αν το I είναι 'no'-instance του Π τότε $OPT_{\Pi'}(I') < \alpha(|I'|) \cdot f(I')$.

Το πρόβλημα Metric TSP

Επιπλέον υπόθεση: βάρη ικανοποιούν τριγωνική ανισότητα.

Το πρόβλημα παραμένει **NP**-complete (γιατί;)

2-προσεγγιστικός αλγόριθμος για το Metric TSP

- Βρες ελάχιστο συνδετικό δέντρο T στον G.
- Διπλασίασε ακμές του T.
- Βρες κύκλο Euler C στο διπλασιασμένο T.
- Επίστρεψε κύκλο που επισκέπτεται κόμβους με σειρά εμφάνισής τους στον C (short-cutting).

Ο παραπάνω αλγόριθμος είναι 2-προσεγγιστικός:

$$cost(C) \leq cost(C_T) \leq 2cost(T) \leq 2OPT$$

Καλύτερη προσέγγιση για το **Metric TSP** (Christofides' algorithm)

$\frac{3}{2}$-προσεγγιστικός αλγόριθμος για το Metric TSP

```
/* Εύρεση ακόμη 'φτηνότερου' κύκλου Euler */
- Βρες Eulerian completion του δέντρου T, μέσω
minimum cost perfect matching M πάνω στους
κόμβους περιττού βαθμού του T.
- Συνέχισε όπως στον προηγούμενο αλγόριθμο.
```

Λήμμα: $cost(M) \leq \frac{1}{2}OPT$
Απόδειξη: με short-cutting στον βέλτιστο κύκλο, παίρνουμε κύκλο C_{odd} κόστους $\leq OPT$ στους κόμβους περιττού βαθμού του T. Κόστος M το πολύ το μισό του κόστους του C_{odd} (*γιατί;*).

$$cost(C) \leq cost(C_{T,M}) = cost(T) + cost(M) \leq \frac{3}{2}OPT$$

Το πρόβλημα **Metric TSP**$_{(s,t)-path}$

Ορισμός του προβλήματος Metric TSP$_{(s,t)-path}$

Δίνονται: γράφος με βάρη (όπως για το **Metric TSP**) και επιπλέον 2 κόμβοι s, t.
Ζητείται: Hamilton path ελαχίστου κόστους από s σε t.

Αλγόριθμος: συνδυασμός 2 ανεξάρτητων αλγορίθμων, καθένας δημιουργεί γράφο με μονοπάτι Euler με διαφορετικό τρόπο (βλ. επόμενη διαφάνεια).
Η επιλογή της καλύτερης από τις 2 λύσεις δίνει $\frac{5}{3}$-προσεγγιστικό αλγόριθμο:

$$\min\{SOL_1, SOL_2\} \leq \frac{5}{3} OPT_{s,t}$$

$\frac{5}{3}$-προσεγγιστικός αλγόριθμος για το **Metric TSP**$_{(s,t)-path}$

1. Βρες ελάχιστο συνδετικό δέντρο T στον γράφο G. Διπλασίασε τις ακμές του T. Αφαίρεσε (s,t)-path από το διπλασιασμένο δένδρο. Βρες (s,t)-Euler path $P_{s,t}$, εκτέλεσε short-cutting για να βρείς (s,t)-Hamilton path κόστους:

$$SOL_1 \leq 2OPT_{s,t} - c_{s,t}$$

2. Με μικρή παραλλαγή του αλγόριθμου του Χριστοφίδη (Eulerian completion ώστε να προκύπτει (s,t)-Euler path με short-cutting), βρες (s,t)-Hamilton path με κόστος

$$SOL_2 \leq (3OPT_{s,t} + c_{s,t})/2$$

3. Επίστρεψε $SOL = \min(SOL_1, SOL_2)$

Το Πρόβλημα **Steiner Tree**

Ορισμός του προβλήματος

Δίνεται: *γράφος* $G(V, E)$ *με μη αρνητικά βάρη στις ακμές του οι κόμβοι του οποίου χωρίζονται σε δύο σύνολα: απαραίτητοι και Steiner.*

Ζητείται: *δέντρο ελαχίστου κόστους που να περιέχει όλους τους απαραίτητους κόμβους.*

Το Πρόβλημα **Metric Steiner Tree**

Επιπλέον υπόθεση: ο γράφος είναι πλήρης και τα δοθέντα βάρη ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα.

Ισοδυναμία προσεγγισιμότητας **Steiner Tree** και **Metric Steiner Tree**

Θεώρημα

Δοθέντος ρ-προσεγγιστικού αλγορίθμου για το **Metric Steiner Tree** *μπορούμε να κατασκευάσουμε ρ-προσεγγιστικό αλγόριθμο για το* **Steiner Tree**.

Απόδειξη: με αναγωγή διατήρησης του παράγοντα προσέγγισης από το **Steiner Tree** στο **Metric Steiner Tree**.

Steiner Tree $\leq_{\text{apx.pres.}}$ Metric Steiner Tree

- Συμπλήρωση του αρχικού γράφου G σε πλήρη γράφο G'. Οι ακμές του G' έχουν το βάρος των συντομότερων μονοπατιών στον G (*metric closure*). Οι απαραίτητοι κόμβοι είναι ίδιοι.
- $OPT(I') \leq OPT(I)$ (γιατί;)
- Κάθε λύση του I' με κόστος $SOL(I')$ δίνει λύση του I με κόστος $SOL(I) \leq SOL(I')$ (πώς;). Επομένως:

$$SOL(I) \leq SOL(I') \leq \rho OPT(I') \leq \rho OPT(I)$$

Σημείωση: Ισχύει επιπλέον ότι $OPT(I) = OPT(I')$, αλλά δεν το χρειαζόμαστε.

Αναγωγές Διατήρησης Παράγοντα Προσέγγισης (Approximation Factor Preserving Reductions)

Μια *αναγωγή διατήρησης παράγοντα προσέγγισης* από το πρόβλημα ελαχιστοποίησης Π στο πρόβλημα ελαχιστοποίησης Π' είναι ένα ζεύγος συναρτήσεων πολυωνυμικού χρόνου h, g, όπου η h απεικονίζει κάθε στιγμιότυπο I του Π σε κάποιο στιγμιότυπο $I' = h(I)$ του Π' και η g απεικονίζει λύσεις του I' σε λύσεις του I, ώστε:

- $OPT(I') \leq OPT(I)$
- για κάθε λύση S' του I' με κόστος $SOL(I', S')$ η $S = g(S')$ είναι λύση του I με κόστος $SOL(I, S) \leq SOL(I', S')$.

Θεώρημα

Μια αναγωγή διατήρησης παράγοντα προσέγγισης από το πρόβλημα Π *στο πρόβλημα* Π' *μαζί με έναν* ρ*-προσεγγιστικό αλγόριθμο για το* Π' *δίνουν έναν* ρ*-προσεγγιστικό αλγόριθμο για το* Π.

2-προσεγγιστικός αλγόριθμος για το **Metric Steiner Tree** (και το **Steiner Tree**)

Αλγόριθμος

`Βρες και επίστρεψε ελάχιστο συνδετικό δένδρο στον παραγόμενο (node-induced) υπογράφο των απαιτούμενων κόμβων (`R`).`

Απόδειξη λόγου προσέγγισης: ένα τέτοιο δένδρο είναι εφικτή λύση για το **Metric Steiner Tree**, για προσεγγισιμότητα χρήση παρόμοιας τεχνικής με τον αλγόριθμο για το TSP:
Από οποιαδήποτε λύση για το **Metric Steiner Tree** μπορούμε να κατασκευάσουμε συνδετικό δέντρο στους κόμβους του R μόνο, διπλάσιου το πολύ κόστους (short-cutting στον αντίστοιχο κύκλο Euler). Επομένως και στη βέλτιστη λύση αντιστοιχεί ένα συνδετικό δέντρο T_R^*, με κόστος το πολύ $2 \cdot OPT$. Αρα:

$$cost(\mathrm{MST}_R) \leq cost(T_R^*) \leq 2 \cdot OPT$$

Multiway Cut / Minimum k-Cut

Είναι γενικεύσεις του προβλήματος min-cut (θυμηθείτε το θεώρημα max-flow / min-cut):

Στο πρόβλημα **Multiway Cut** δίνεται γράφος G και k κόμβοι (terminals). Ζητείται η ελάχιστη τομή τέτοια ώστε κάθε terminal να βρίσκεται σε διαφορετική συνεκτική συνιστώσα (connected component). **NP**-hard, ακόμη και για fixed $k \geq 3$. Για $k = 2$;

Στο πρόβλημα **Minimum k-Cut** δίνεται γράφος G και ζητείται η ελάχιστη τομή τέτοια ώστε ο γράφος να διασπάται σε k συνεκτικές συνιστώσες. Πολυωνυμικά επιλύσιμο για fixed k, **NP**-hard για k που είναι μέρος της εισόδου.

Αλγόριθμος για το **Multiway Cut**

```
Βρες isolating cut C_i για κάθε terminal s_i.
Δώσε σαν λύση την ένωση όλων αυτών των cuts,
εκτός από την βαρύτερη.
```

Ορθότητα και λόγος προσέγγισης.

Έστω A η βέλτιστη λύση, χωρίζοντας τον γράφο σε συνιστώσες $V_1, \dots, V_k$. Αν A_i είναι η τομή-υποσύνολο της A που χωρίζει το V_i από τις υπόλοιπες συνιστώσες, τότε είναι isolating cut για το s_i.

Άρα, $w(C_i) \le w(A_i)$.

Κάθε edge της A, περιλαμβάνεται σε δύο τομές A_i, A_j, οπότε

$$\sum_{i=1}^{k} w(A_i) = 2w(A) = 2OPT$$

Επομένως:

$$w(C) \le (1-1/k)\sum_{i=1}^{k} w(C_i) \le (1-1/k)\sum_{i=1}^{k} w(A_i) = 2(1-1/k)OPT$$

Αλγόριθμος για το **Minimum *k*-Cut**

Αλγόριθμος GH-*k*-cut

```
1. Compute Gomory-Hu tree T.
2. Output the union of cuts corresponding to
lightest k−1 edges of T.
```

Με απόδειξη παρόμοια (κάπως πιο δύσκολη) αυτής για το multiway cut αποδεικνύεται ότι η λύση είναι $\leq 2(1-1/k)OPT$.

Δένδρο Gomory-Hu

Σημαντικές ιδιότητες: κάθε ακμή του αντιστοιχεί σε μια ελάχιστη τομή στον γράφο, και για κάθε ζεύγος (u, v) υπάρχει μια ακμή του δένδρου που αντιστοιχεί στην ελάχιστη (u, v)-cut

Κατασκευή δένδρου Gomory-Hu

1. construct tree T with unique node the set $S_0 = V$
2. while there is S_i s.t. $|S_i| \geq 2$ do
    - choose two vertices in S_i, say x, y
    - compute minimum $x - y$ cut in G'
        - /* $G' = G$ with subtrees of S_i in T collapsed */
    - split S_i accordingly to S_i^x, S_i^y, with an edge between them
        - with weight equal to that of the cut
    - stick each subtree of S_i in T to S_i^x or S_i^y according to the cut