Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Προηγμένα Θέματα Αλγορίθμων

Αλγόριθμοι Δικτύων και Πολυπλοκότητα

Εαρινό εξάμηνο 2019-20

(ΕΜΠ – ΑΛΜΑ)

Διδάσκοντες: Δ. Φωτάκης - Α. Παγουρτζής

1η σειρά ασκήσεων

Προθεσμία παράδοσης: 7/4/2020

Άσκηση 1

Έστω το Γραμμικό Πρόγραμμα (Π1):

$$\begin{array}{lrcl}
\min & 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & & \\
\text{s.t.} & 3x_1 - x_2 - 7x_3 + x_4 & = & -3 \\
 & 3x_1 - 4x_3 + x_4 & = & -1 \\
 & x_3 & \leq & 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

1. Να σχεδιάσετε το σύνολο των εφικτών λύσεων του (Π1) και να βρείτε τις κορυφές του (θα χρειαστεί να το τροποποιήσετε κατάλληλα). Να σχεδιάσετε την κατεύθυνση βελτιστοποίησης, και να βρείτε μια βέλτιστη λύση.
2. Να διατυπώσετε το δυϊκό πρόγραμμα (ΔΠ1) του (Π1). Να διατυπώσετε τις complementary slackness συνθήκες για τα (Π1) και (ΔΠ1), και να τις χρησιμοποιήσετε για τον υπολογισμό της βέλτιστης λύσης του (ΔΠ1).

Άσκηση 2

Έστω το Γραμμικό Πρόγραμμα (Π2):

$$\begin{array}{lrcl}
\min & -10x_1 + 57x_2 + 9x_3 + 24x_4 & & \\
\text{s.t.} & 0.5x_1 - 5.5x_2 - 2.5x_3 + 9x_4 + x_5 & = & 0 \\
 & 0.5x_1 - 1.5x_2 - 0.5x_3 + x_4 + x_6 & = & 0 \\
 & x_1 + x_7 & = & 1 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 & \geq & 0
\end{array}$$

Να λύσετε (δύο φορές) το (Π2) με τον αλγόριθμο Simplex. Να ξεκινήσετε με βασικές μεταβλητές τις x_5, x_6, x_7. Να ακολουθήσετε τους παρακάτω κανόνες για την εναλλαγή στηλών (pivoting) στη βάση (την πρώτη φορά τον ένα, την δεύτερη τον άλλο):

1. (i) ως νέα βασική μεταβλητή επιλέγεται εκείνη με το ελάχιστο ανηγμένο κόστος, και (ii) αν υπάρχουν δύο ή περισσότερες βασικές μεταβλητές υποψήφιες για έξοδο από τη βάση, επιλέγεται εκείνη με τον ελάχιστο δείκτη.
2. (i) ως νέα βασική μεταβλητή επιλέγεται εκείνη (από τις μεταβλητές με αρνητικό ανηγμένο κόστος) με τον ελάχιστο δείκτη, και (ii) αν υπάρχουν δύο ή περισσότερες βασικές μεταβλητές υποψήφιες για έξοδο από τη βάση, επιλέγεται εκείνη με τον ελάχιστο δείκτη.

Άσκηση 3

Δίνεται το (μη γραμμικό) πρόγραμμα:

$$R = \min \left\{ \frac{c_1^T x + d_1}{c_2^T x + d_2} : Ax \leq b, c_2^T x + d_2 > 0 \right\}$$

Υποθέτουμε ότι η περιοχή των εφικτών λύσεων είναι φραγμένη και ότι η αντικειμενική τιμή της βέλτιστης λύσης ανήκει στο διάστημα $[L, U]$ (θεωρείστε ότι τα L και U είναι γνωστά).

1. Υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε ένα $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε εφικτή λύση x, $c_2^T x + d_2 \geq \delta$. Να δείξετε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, μπορούμε να υπολογίσουμε μια $(1+\varepsilon)$-προσέγγιση της βέλτιστης λύσης του R (χρησιμοποιήστε ως υπορουτίνα έναν αλγόριθμο Γραμμικού Προγραμματισμού). Ποια είναι η υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας;

2. Να λύσετε το R όπως στο (1), αλλά χωρίς την υπόθεση σχετικά με την ύπαρξη του δ. Τώρα γνωρίζουμε μόνο ότι $c_2^T x + d_2 > 0$.

Άσκηση 4

Έστω A ένας πίνακας $m \times n$, $\boldsymbol{x}$ ένα n-διάνυσμα μεταβλητών, και $\boldsymbol{b}$ ένα m-διάνυσμα. Το γραμμικό σύστημα $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ καλείται *μη-συμβιβαστό* αν υπάρχει m-διάνυσμα $\boldsymbol{y}$ τέτοιο ώστε $A^T\boldsymbol{y} = 0, \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} < 0$, και $y \geq 0$. Να αποδείξετε ότι το σύστημα $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ είναι *μη-επιλύσιμο* αν και μόνο αν είναι *μη-συμβιβαστό*.

Άσκηση 5

Θεωρούμε τον παρακάτω αλγόριθμο προσέγγισης για το πρόβλημα Vertex Cover σε ένα γράφημα $G(V, E)$, όπου κάθε κορυφή $v \in V$ έχει βάρος $w(v) > 0$. Το ζητούμενο είναι να υπολογίσουμε ένα σύνολο κορυφών $C \subseteq V$, με ελάχιστο συνολικό βάρος, ώστε κάθε ακμή $e \in E$ να έχει τουλάχιστον ένα άκρο της στο C.

Να δείξετε ότι ο αλγόριθμος επιτυγχάνει λόγο προσέγγισης 2. Ειδικότερα, να δείξετε ότι για τα C και $c(e)$, $e \in E$, στο τέλος του αλγορίθμου, ισχύουν τα εξής:

1. Το C καλύπτει όλες τις ακμές.

2. Το συνολικό βάρος του C είναι μικρότερο ή ίσο του $2\sum_{e\in E} c(e)$.

3. Το συνολικό βάρος της βέλτιστης λύσης είναι μεγαλύτερο ή ίσο του $\sum_{e\in E} c(e)$.
   Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε LP duality.

Να βρείτε ακόμη ένα (κατά το δυνατόν απλούστερο) γράφημα όπου ο αλγόριθμος υπολογίζει ένα Vertex Cover με συνολικό βάρος διπλάσιο από αυτό της βέλτιστης λύσης.

WeightedVertexCover($G(V, E)$, w)
    $C \leftarrow \emptyset$;
    $\forall v \in V$, $t(v) \leftarrow w(v)$;
    $\forall e \in E$, $c(e) \leftarrow 0$;
    while C δεν είναι vertex cover **do**
        $e = \{u, v\}$ μια ακάλυπτη ακμή;
        $\delta \leftarrow \min\{t(u), t(v)\}$;
        $t(u) \leftarrow t(u) - \delta$;
        $t(v) \leftarrow t(v) - \delta$;
        $c(e) \leftarrow \delta$;
        $C \leftarrow C \cup \{z \in \{u, v\} \,|\, t(z) = 0\}$;
    return(C);

Άσκηση 6

(α) Σχεδιάστε αλγόριθμο που να λύνει βέλτιστα το πρόβλημα Vertex Cover όταν ο γράφος εισόδου είναι δένδρο.

(β) Αποδείξτε ότι ο παρακάτω αλγόριθμος είναι 2-προσεγγιστικός για το πρόβλημα Vertex Cover στη γενική περίπτωση (είσοδος οποιοσδήποτε γράφος G):

Βρες ένα δένδρο T με αναζήτηση κατά βάθος (DFS) στον δοσμένο γράφο G και δώσε σαν έξοδο το σύνολο των κόμβων S που δεν είναι φύλλα του T.

Άσκηση 7

Αποδείξτε ότι ο λόγος προσέγγισης που επιτυγχάνει ο Greedy αλγόριθμος για το Weighted Set Cover είναι στην πραγματικότητα $H_{|S_{\max}|}$, όπου $S_{\max}$ το σύνολο εισόδου με τη μεγαλύτερη πληθικότητα.

Υπόδειξη: αποδείξτε ότι τα στοιχεία οποιουδήποτε συνόλου $S \in \mathcal{S}$ καλύπτονται από τον Greedy με συνολικό κόστος το πολύ $H_{|S|} \cdot cost(S)$, δηλαδή $\sum_{e \in S} price(e) \leq H_{|S|} \cdot cost(S)$.

Άσκηση 8

(α) Σχεδιάστε f–προσεγγιστικό αλγόριθμο για το πρόβλημα Cardinality Set Cover, όπου f είναι το μέγιστο πλήθος συνόλων στα οποία μπορεί να ανήκει κάποιο στοιχείο. Αποδείξτε την ορθότητά του και τον λόγο προσέγγισης που επιτυγχάνει. Βρείτε tight example για τον λόγο προσέγγισης του αλγορίθμου.
Υπόδειξη: παρατηρήστε ποιο είναι το f στο πρόβλημα (Cardinality) Vertex Cover *και γενικεύστε κατάλληλα.*

(β) Σχεδιάστε f–προσεγγιστικό αλγόριθμο για το πρόβλημα Weighted Set Cover. Αποδείξτε την ορθότητά του και τον λόγο προσέγγισης που επιτυγχάνει. Βρείτε tight example για τον λόγο προσέγγισης του αλγορίθμου.
Υπόδειξη: γενικεύστε την ιδέα του degree-weighted αλγορίθμου για το Weighted Vertex Cover.

Άσκηση 9

(α) Συμπληρώστε την απόδειξη που θα βρείτε στις διαφάνειες για τον λόγο προσέγγισης $5/3$ για το πρόβλημα Metric TSP$_{(s,t)-path}$. Εξηγήστε τον ρόλο του όρου $c_{s,t}$ στην ανάλυση καθενός από τους δύο επιμέρους αλγορίθμους.

(β) Δώστε tight example για τους επιμέρους αλγορίθμους, καθώς και για τον συνολικό αλγόριθμο.