Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Διακριτά Μαθηματικά

Διδάσκοντες: Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου

2η Γραπτή Εργασία, Ημ/νια Παράδοσης: 24/5/2020

Θέμα 1 (Αρχή του Περιστερώνα, 1.8 μον.). (α) Επιλέγουμε αυθαίρετα n φυσικούς αριθμούς από το σύνολο $\{1, 2, 3, \dots, 2^n - 3, 2^n - 2\}$. Να δείξετε ότι μεταξύ των αριθμών που έχουμε επιλέξει υπάρχει πάντα ένα ζευγάρι όπου ο μεγαλύτερος από τους δύο αριθμούς είναι μικρότερος ή ίσος από το διπλάσιο του άλλου (π.χ., για $n = 3$, αν επιλέξουμε τους αριθμούς 1, 3, 6, έχουμε ότι $6 \leq 2 \cdot 3$.

(β) Θεωρούμε μια ακολουθία N θετικών ακεραίων η οποία περιέχει ακριβώς n διαφορετικούς αριθμούς. Να δείξετε ότι αν $N \geq 2^n$, υπάρχουν τουλάχιστον δύο ή περισσότερες διαδοχικές θέσεις της ακολουθίας τέτοιες ώστε το γινόμενο των αντίστοιχων αριθμών να είναι ένα τέλειο τετράγωνο. Π.χ., στην ακολουθία $7, 5, 3, 5, 7, 5, 3, 7$, όπου $n = 3$ και $N = 2^3$, το γινόμενο των έξι τελευταίων διαδοχικών θέσεων είναι τέλειο τετράγωνο.

Θέμα 2 (Γραφήματα και Μαθηματική Επαγωγή, 1.8 μον.). (α) Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή στο πλήθος των κορυφών, να δείξετε ότι σε κάθε tournament $T(V, E)$ με $|V| \geq 2$ κορυφές, υπάρχει κορυφή s^* που είναι προσπελάσιμη από κάθε άλλη κορυφή $v \in V \setminus \{s^*\}$ μέσω μονοπατιού (που σέβεται την κατεύθυνση των ακμών του T) μήκους το πολύ 2.

(β) Έστω φυσικός $r \geq 2$. Χρησιμοποιώντας (ισχυρή) μαθηματική επαγωγή στο πλήθος των κορυφών, να δείξετε ότι για κάθε $n \geq 1$, κάθε (απλό μη κατευθυνόμενο) γράφημα που έχει n κορυφές και δεν περιέχει το K_{r+1} ως υπογράφημα, έχει το πολύ $\frac{(r-1)n^2}{2r}$ ακμές. Να δείξετε ακόμη ότι για κάθε $r, k \geq 2$, υπάρχει γράφημα με kr κορυφές και $(r-1)rk^2/2$ ακμές που δεν περιέχει το K_{r+1} ως υπογράφημα. *Υπόδειξη:* Για τη βάση, αποδείξτε ότι το ζητούμενο ισχύει (τετριμμένα) για κάθε $n \leq r$. Για το επαγωγικό βήμα, μπορείτε να διαμερίσετε τις κορυφές σε δύο ομάδες, με r και $n - r$ κορυφές, και να εφαρμόσετε την επαγωγική υπόθεση στο υπογράφημα με $n - r$ κορυφές.

Θέμα 3 (Διμερή Γραφήματα, 0.8 μον.). Να δείξετε ότι για κάθε (απλό μη-κατευθυνόμενο) συνεκτικό διμερές γράφημα $G(V, E)$, υπάρχει μια μοναδική διαμέριση των κορυφών του V σε δύο ανεξάρτητα σύνολα. Πόσες διαφορετικές διαμερίσεις υπάρχουν αν το G έχει $k \geq 2$ συνεκτικές συνιστώσες;

Θέμα 4 (Ανεξάρτητα Σύνολα, 1.6 μον.). Έστω (απλό) γράφημα $G(V, E)$ με n κορυφές.

1. Να δείξετε ότι αν το G είναι d-κανονικό, τότε έχει ανεξάρτητο σύνολο με τουλάχιστον $n/(d + 1)$ κορυφές (και να δείξετε ότι ένα τέτοιο ανεξάρτητο σύνολο μπορεί να υπολογιστεί αποδοτικά).
2. Να δείξετε ότι το G έχει ανεξάρτητο σύνολο με τουλάχιστον $\sum_{v \in V} \frac{1}{\deg(v)+1}$ κορυφές, όπου $\deg(v)$ είναι ο βαθμός της κορυφής v. *Υπόδειξη:* Μπορείτε να εφαρμόσετε τον αλγόριθμο του (1) σε μια τυχαία μετάθεση των κορυφών και να υπολογίσετε την αναμενόμενη τιμή του μεγέθους του ανεξάρτητου συνόλου στο οποίο καταλήγουμε.

Θέμα 5 (Κύκλος Euler, Κύκλος Hamilton, 1.8 μον.). (α) Θεωρούμε δύο συνεκτικά *ομοιομορφικά* γραφήματα G και H. Να διερευνήσετε αν αληθεύουν οι παρακάτω προτάσεις (και να αιτιολογήσετε κατάλληλα τις απαντήσεις σας):

1. Το G έχει κύκλωμα Euler αν και μόνο αν το H έχει κύκλωμα Euler.
2. Το G έχει κύκλο Hamilton αν και μόνο αν το H έχει κύκλο Hamilton.

(β) Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή στο n, να δείξετε ότι κάθε απλό γράφημα με $n \geq 3$ κορυφές και τουλάχιστον $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2$ ακμές έχει κύκλο Hamilton. Να δείξετε ακόμη ότι για κάθε $n \geq 3$, υπάρχει απλό γράφημα με n κορυφές και $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$ ακμές που δεν έχει κύκλο Hamilton.

Θέμα 6 (Δέντρα, 1.8 μον.). (α) Έστω $n \geq 2$ θετικοί ακέραιοι $d_1, \ldots, d_n$. Να δείξετε ότι $d_1 + \cdots + d_n = 2(n-1)$ αν και μόνο αν υπάρχει δέντρο T με n κορυφές και βαθμούς κορυφών $d_1, \ldots, d_n$.

(β) Θεωρούμε ένα απλό μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα $G(V, E, w)$ με θετικά βάρη $w : E \to \mathbb{N}^*$ στις ακμές και ένα Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο (ΕΣΔ) T του G. Για κάθε ζευγάρι κορυφών u, v, συμβολίζουμε με p^*_{uv} το μοναδικό $u - v$ μονοπάτι στο T. Να δείξετε ότι για κάθε ζευγάρι κορυφών u, v και για κάθε $u - v$ μονοπάτι p_{uv} στο G, ισχύει ότι $\max_{e \in p^*_{uv}}\{w(e)\} \leq \max_{e \in p_{uv}}\{w(e)\}$ (δηλ. αν θεωρήσουμε ως "κόστος" ενός $u - v$ μονοπατιού p_{uv} το βάρος της βαρύτερης ακμής του, το μοναδικό $u - v$ μονοπάτι p^*_{uv} στο ΕΣΔ T ελαχιστοποιεί αυτό το κόστος για όλα τα ζευγάρια κορυφών u, v).

Θέμα 7 (Επιπεδότητα, 1.6 μον.). Έστω $k \geq 3$ φυσικός αριθμός. Θεωρούμε *απλό επίπεδο* γράφημα $G(V, E)$ με n κορυφές και m ακμές το οποίο δεν έχει κύκλους με μήκος μικρότερο ή ίσο του $k - 1$ (δηλ. αν το G έχει κύκλους, τότε το μήκος κάθε κύκλου στο G είναι μεγαλύτερο ή ίσο του k).

1. Να δείξετε ότι κάθε τέτοιο απλό επίπεδο γράφημα G έχει πλήθος ακμών $m \leq \frac{k}{k-2}(n-2)$.
2. Να δείξετε ότι κάθε απλό επίπεδο γράφημα G που δεν έχει κύκλους με μήκος μικρότερο ή ίσο του 5, (i) έχει τουλάχιστον μία κορυφή με βαθμό μικρότερο ή ίσο του 2, και (ii) έχει χρωματικό αριθμό μικρότερο ή ίσο του 3. Να βρείτε ένα τέτοιο γράφημα με χρωματικό αριθμό ίσο με 3.

Θέμα 8 (Χρωματικός Αριθμός, 0.8 μον.). Να δείξετε ότι για τον χρωματικό αριθμό του καρτεσιανού γινομένου κάθε γραφήματος G με το πλήρες γράφημα K_q ισχύει ότι $\chi(G \times K_q) = \max\{\chi(G), q\}$.

Παράδοση. Οι εργασίες πρέπει να αναρτηθούν στο `courses.corelab.ntua.gr/discrete` μέχρι τα μεσάνυχτα της Κυριακής 24/5.

Καλή Επιτυχία!