Κρυπτογραφία

Ψευδοτυχαιότητα - Κρυπτοσυστήματα ροής

Άρης Παγουρτζής - Πέτρος Ποτίκας

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

- Τυχαίοι αριθμοί αποτελούν σημαντικό στοιχείο της επιστήμης των υπολογιστών αλλά και της κρυπτογραφίας

Εισαγωγή

- Τυχαίοι αριθμοί αποτελούν σημαντικό στοιχείο της επιστήμης των υπολογιστών αλλά και της κρυπτογραφίας
- Αλγόριθμοι και πρωτόκολλα που τους χρησιμοποιούν:
  - Κατανομή κλειδιών, σχήματα ταυτοποίησης χρηστών
  - Ακεραιότητα μηνύματος (MAC)
  - Παραγωγή κλειδιών συνεδρίας (session keys)
  - Παραγωγή ροής από bit για συμμετρική κρυπτογράφηση (stream ciphers)

Pseudorandom Generators

- Επιτρέπουν ένα μικρό τυχαίο κλειδί (seed) να δώσει ένα μεγάλο "ψευδοτυχαίο", αρκετά τυχαίο για έναν πολυωνυμικά φραγμένο αντίπαλο.
- Το ψευδοτυχαίο κλειδί μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν κλειδί για το one-time pad (πράξη XOR).
- Παρεμφερής χρήση: σε κρυπτοσυστήματα ροής.
- Η ύπαρξη ψευδοτυχαίων γεννητριών σχετίζεται με την ύπαρξη μονόδρομων συναρτήσεων (one-way functions).
- RC4 (Rivest '87): μια σημαντική γεννήτρια / κρυπτοσύστημα ροής.

Pseudorandom Generators

- Ιδέα: κάτι που "μοιάζει" με τυχαίο, αλλά δεν είναι πραγματικά
- Δε ξεχωρίζει ένα τυχαίο string από ένα που δημιουργείται από τη γεννήτρια ψευδοτυχαιότητας
- Εφαρμογή ψευδοτυχαιότητας και αλλού όπως π.χ. παίγνια, δειγματοληψία
- Την χρησιμοποιούμε είτε για την παραγωγή κλειδιών σε σχήματα συμμετρικής/ασύμμετρης κρυπτογράφησης είτε σε κρυπτογράφηση ροής

Pseudorandom Generators

Ποιο είναι τυχαίο;
00101010100101010110
01010101010101010101

Pseudorandom Generators

Ποιο είναι τυχαίο;
00101010100101010110
01010101010101010101

- Κατανομή πάνω σε strings:
  $D\colon \{0,1\}^n \to [0,1]$, ώστε $\Sigma_x D(x) = 1$

Pseudorandom Generators

Ποιο είναι τυχαίο;
00101010100101010110
01010101010101010101

- Κατανομή πάνω σε strings:
  $D\colon \{0,1\}^n \to [0,1]$, ώστε $\Sigma_x D(x) = 1$
- Ορισμός ψευδοτυχαιότητας μέσω στατιστικών τεστ: Μια κατανομή D πάνω σε n-bit strings είναι ψευδοτυχαία αν ικανοποιεί κάποια τεστ (NIST SP 800-22)
  1. $\Pr_{x \leftarrow D}[1\text{ο bit του } x = 1] \simeq 1/2$
  2. $\Pr_{x \leftarrow D}[\text{parity του } x = 1] \simeq 1/2$
  3. $\Pr_{x \leftarrow D}[\#1 = \#0 \text{ in } x] \simeq 1/2$
  4. …

Pseudorandom Generators

Ποιο είναι τυχαίο;
00101010100101010110
01010101010101010101

- Κατανομή πάνω σε strings:
  $D\colon \{0,1\}^n \to [0,1]$, ώστε $\Sigma_x D(x) = 1$
- Ορισμός ψευδοτυχαιότητας μέσω στατιστικών τεστ: Μια κατανομή D πάνω σε n-bit strings είναι ψευδοτυχαία αν ικανοποιεί κάποια τεστ (NIST SP 800-22)
  1. $\Pr_{x \leftarrow D}[\text{1o bit του } x = 1] \simeq 1/2$
  2. $\Pr_{x \leftarrow D}[\text{parity του } x = 1] \simeq 1/2$
  3. $\Pr_{x \leftarrow D}[\#1 = \#0 \text{ in } x] \simeq 1/2$
  4. …
- Όμως με αντίπαλο, δε γνωρίζουμε τα τεστ που έχει

Pseudorandom Generators

Ποιο είναι τυχαίο;
00101010100101010110
01010101010101010101

- Κατανομή πάνω σε strings:
  $D\colon \{0,1\}^n \rightarrow [0,1]$, ώστε $\Sigma_x D(x) = 1$
- Ορισμός ψευδοτυχαιότητας μέσω στατιστικών τεστ: Μια κατανομή D πάνω σε n-bit strings είναι ψευδοτυχαία αν ικανοποιεί κάποια τεστ (NIST SP 800-22)
  1. $\Pr_{x \leftarrow D}[\text{1ο bit του } x = 1] \simeq 1/2$
  2. $\Pr_{x \leftarrow D}[\text{parity του } x = 1] \simeq 1/2$
  3. $\Pr_{x \leftarrow D}[\#1 = \#0 \text{ in } x] \simeq 1/2$
  4. …
- Όμως με αντίπαλο, δε γνωρίζουμε τα τεστ που έχει
- Κρυπτογραφικά, η κατανομή D είναι ψευδοτυχαία, αν περνάει όλα τα *αποδοτικά* στατιστικά τεστ

PRG

Ορισμός

Μια γεννήτρια ψευδοτυχαιότητας (PRG) είναι ένας αποδοτικός, ντετερμινιστικός αλγόριθμος που επεκτείνει ένα *μικρό, τυχαία επιλεγμένο σπόρο* σε μια μεγαλύτερη, ψευδοτυχαία έξοδο.

- Από λίγα πραγματικά τυχαία bits, παράγονται πολλά περισσότερα bits που "φαίνονται" τυχαία
- Παραγωγή πραγματικά τυχαίων bits είναι δύσκολη και χρονοβόρα
- Μέριμνα για τον σπόρο

Pseudorandom Generators (PRG)

Παρατήρηση: ασυμπτωτικά μιλάμε για $\mathrm{Dist} = \{\mathrm{Dist}_n\}$, όπου n η παράμετρος ασφαλείας.

Pseudorandom Generators (PRG)

Παρατήρηση: ασυμπτωτικά μιλάμε για $\mathrm{Dist} = \{\mathrm{Dist}_n\}$, όπου n η παράμετρος ασφαλείας.

Όπως η σημασιολογική (υπολογιστική) ασφάλεια είναι η υπολογιστική χαλάρωση της τέλειας μυστικότητας έτσι και η ψευδοτυχαιότητα είναι η υπολογιστική χαλάρωση της πραγματικής τυχαιότητας.

Τυπικός ορισμός ψευδοτυχαίας κατανομής

Έστω συνάρτηση $G : \{0,1\}^n \mapsto \{0,1\}^l$.

Τυπικός ορισμός ψευδοτυχαίας κατανομής

Έστω συνάρτηση $G : \{0,1\}^n \mapsto \{0,1\}^l$.
Ορίζουμε Dist να είναι κατανομή σε l-bit strings που προκύπτει επιλέγοντας ομοιόμορφα τυχαία ένα $s \in \{0,1\}^n$ και δίνοντας έξοδο $G(s)$.

Τυπικός ορισμός ψευδοτυχαίας κατανομής

Έστω συνάρτηση $G : \{0,1\}^n \mapsto \{0,1\}^l$.
Ορίζουμε Dist να είναι κατανομή σε l-bit strings που προκύπτει επιλέγοντας ομοιόμορφα τυχαία ένα $s \in \{0,1\}^n$ και δίνοντας έξοδο $G(s)$.
Η G είναι ψευδοτυχαία ανν η Dist είναι ψευδοτυχαία.

Pseudorandom Generators

Ορισμός

Έστω l πολυώνυμο, G ένας ντετερμινιστικός αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου, τ.ώ. για κάθε n και είσοδο $s \in \{0,1\}^n$ το αποτέλεσμα $G(s)$ είναι μήκους $l(n)$. Ο G είναι *ψευδοτυχαίος γεννήτορας (PRG)* αν:

1. Για κάθε n, $l(n) > n$
2. Για κάθε πιθανοτικό πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμο (PPT) D, υπάρχει μια αμελητέα[1] συνάρτηση $negl$, ώστε

$$|Pr[D(G(s)) = 1] - Pr[D(r) = 1]| \leq negl(n)$$

όπου η πρώτη πιθανότητα είναι από την ομοιόμορφη επιλογή του $s \in \{0,1\}^n$ και την τυχαιότητα του D, ενώ η δεύτερη από την ομοιόμορφη επιλογή του $r \in \{0,1\}^{l(n)}$ και την τυχαιότητα του D.

[1] αμελητέα συνάρτηση f: για κάθε πολυώνυμο p, υπάρχει μια σταθερά N, τ.ώ. για κάθε $n > N$ ισχύει $f(n) < 1/p(n)$

Pseudorandom Generators

Παράδειγμα

Δίνεται ο $G(s) = s || \bigoplus_{i=1}^{n} s_i$
Είναι PRG?

Pseudorandom Generators

Παρατηρήσεις:

- Ο αλγόριθμος είναι ντετερμινιστικός και αποδοτικός (πολυωνυμικός)

Pseudorandom Generators

Παρατηρήσεις:

- Ο αλγόριθμος είναι ντετερμινιστικός και αποδοτικός (πολυωνυμικός)
- Είναι τυχαία η κατανομή; Όχι τελείως!

Pseudorandom Generators

Παρατηρήσεις:

- Ο αλγόριθμος είναι ντετερμινιστικός και αποδοτικός (πολυωνυμικός)
- Είναι τυχαία η κατανομή; Όχι τελείως!
- αν $l(n) = n + 1$, τότε στην ομοιόμορφη κατανομή στο $\{0, 1\}^{n+1}$κάθε συμβολοσειρά έχει ακριβώς $1/2^{n+1}$ πιθανότητα να επιλεγεί

Pseudorandom Generators

Παρατηρήσεις:

- Ο αλγόριθμος είναι ντετερμινιστικός και αποδοτικός (πολυωνυμικός)
- Είναι τυχαία η κατανομή; Όχι τελείως!
- αν $l(n) = n + 1$, τότε στην ομοιόμορφη κατανομή στο $\{0,1\}^{n+1}$κάθε συμβολοσειρά έχει ακριβώς $1/2^{n+1}$ πιθανότητα να επιλεγεί
- $|dom(G)| = 2^n$, $|range(G)| = 2^{n+1}$, άρα η πιθανότητα μια συμβολοσειρά μήκους $n+1$ να εμφανιστεί στην έξοδο της G είναι $1/2^n$ για τις μισές και 0 για τις υπόλοιπες

Pseudorandom Generators

Παρατηρήσεις:

- Ο αλγόριθμος είναι ντετερμινιστικός και αποδοτικός (πολυωνυμικός)
- Είναι τυχαία η κατανομή; Όχι τελείως!
- αν $l(n) = n + 1$, τότε στην ομοιόμορφη κατανομή στο $\{0, 1\}^{n+1}$κάθε συμβολοσειρά έχει ακριβώς $1/2^{n+1}$ πιθανότητα να επιλεγεί
- $|dom(G)| = 2^n$, $|range(G)| = 2^{n+1}$, άρα η πιθανότητα μια συμβολοσειρά μήκους $n + 1$ να εμφανιστεί στην έξοδο της G είναι $1/2^n$ για τις μισές και 0 για τις υπόλοιπες
- Αν ο διαχωριστής είναι εκθετικού χρόνου, τότε με εξαντλητική αναζήτηση μπορεί να ξεχωρίσει την κατανομή D από την ομοιόμορφη

Pseudorandom Generators

Παρατηρήσεις:

- Ο αλγόριθμος είναι ντετερμινιστικός και αποδοτικός (πολυωνυμικός)
- Είναι τυχαία η κατανομή; Όχι τελείως!
- αν $l(n) = n + 1$, τότε στην ομοιόμορφη κατανομή στο $\{0,1\}^{n+1}$κάθε συμβολοσειρά έχει ακριβώς $1/2^{n+1}$ πιθανότητα να επιλεγεί
- $|dom(G)| = 2^n$, $|range(G)| = 2^{n+1}$, άρα η πιθανότητα μια συμβολοσειρά μήκους $n+1$ να εμφανιστεί στην έξοδο της G είναι $1/2^n$ για τις μισές και 0 για τις υπόλοιπες
- Αν ο διαχωριστής είναι εκθετικού χρόνου, τότε με εξαντλητική αναζήτηση μπορεί να ξεχωρίσει την κατανομή D από την ομοιόμορφη
- Ο σπόρος πρέπει να μείνει μυστικός και αρκετά μεγάλος, ώστε να μη γίνεται επίθεση με εξαντλητική αναζήτηση

PRG

- Υπάρχουν γεννήτριες ψευδοτυχαιότητας;

PRG

- Υπάρχουν γεννήτριες ψευδοτυχαιότητας; Άγνωστο, χωρίς κάποια υπόθεση.

PRG

- Υπάρχουν γεννήτριες ψευδοτυχαιότητας; Άγνωστο, χωρίς κάποια υπόθεση.
- Μπορούν να κατασκευαστούν με την υπόθεση ότι υπάρχουν μονόδρομες συναρτήσεις (one-way functions).

PRG

- Υπάρχουν γεννήτριες ψευδοτυχαιότητας; Άγνωστο, χωρίς κάποια υπόθεση.
- Μπορούν να κατασκευαστούν με την υπόθεση ότι υπάρχουν μονόδρομες συναρτήσεις (one-way functions).
- Υπάρχουν, με την υπόθεση ότι το πρόβλημα της παραγοντοποίησης μεγάλων αριθμών είναι δύσκολο.

PRG

- Υπάρχουν γεννήτριες ψευδοτυχαιότητας; Άγνωστο, χωρίς κάποια υπόθεση.
- Μπορούν να κατασκευαστούν με την υπόθεση ότι υπάρχουν μονόδρομες συναρτήσεις (one-way functions).
- Υπάρχουν, με την υπόθεση ότι το πρόβλημα της παραγοντοποίησης μεγάλων αριθμών είναι δύσκολο.
- Υποψήφιες: stream ciphers, block ciphers (OFB, CFB, CTR mode)

PRG

- Υπάρχουν γεννήτριες ψευδοτυχαιότητας; Άγνωστο, χωρίς κάποια υπόθεση.
- Μπορούν να κατασκευαστούν με την υπόθεση ότι υπάρχουν μονόδρομες συναρτήσεις (one-way functions).
- Υπάρχουν, με την υπόθεση ότι το πρόβλημα της παραγοντοποίησης μεγάλων αριθμών είναι δύσκολο.
- Υποψήφιες: stream ciphers, block ciphers (OFB, CFB, CTR mode)
- Ισχύει: G γεννήτρια ψευδοτυχαιότητας ανν G μη προβλέψιμη

Ορισμός

(Προβλέψιμη) Υπάρχει πολυωνυμικός αλγόριθμος A τέτοιος ώστε:

$$Pr[A(G(K)_{1..i}) = G(K)_{i+1}] > \frac{1}{2} + \epsilon$$

για μη αμελητέο ϵ

PRG

- Υπάρχουν γεννήτριες ψευδοτυχαιότητας; Άγνωστο, χωρίς κάποια υπόθεση.
- Μπορούν να κατασκευαστούν με την υπόθεση ότι υπάρχουν μονόδρομες συναρτήσεις (one-way functions).
- Υπάρχουν, με την υπόθεση ότι το πρόβλημα της παραγοντοποίησης μεγάλων αριθμών είναι δύσκολο.
- Υποψήφιες: stream ciphers, block ciphers (OFB, CFB, CTR mode)
- Ισχύει: G γεννήτρια ψευδοτυχαιότητας ανν G μη προβλέψιμη

Ορισμός

(Προβλέψιμη) Υπάρχει πολυωνυμικός αλγόριθμος A τέτοιος ώστε:

$$Pr[A(G(K)_{1..i}) = G(K)_{i+1}] > \frac{1}{2} + \epsilon$$

για μη αμελητέο ϵ

Επιπλέον, θα πρέπει να έχουμε και προς τα πίσω μη προβλεψιμότητα: οι τιμές που έχουν εμφανιστεί δεν αποκαλύπτουν το σπόρο.

Pseudorandom Functions - PRF

- Συνάρτηση που φαίνεται ίδια με μια τυχαία συνάρτηση

Pseudorandom Functions - PRF

- Συνάρτηση που φαίνεται ίδια με μια τυχαία συνάρτηση
- Τυχαία συνάρτηση: $Func_n$ = όλες οι συναρτήσεις από το $\{0,1\}^n$ στο $\{0,1\}^n$

Pseudorandom Functions - PRF

- Συνάρτηση που φαίνεται ίδια με μια τυχαία συνάρτηση
- Τυχαία συνάρτηση: $Func_n$ = όλες οι συναρτήσεις από το $\{0,1\}^n$ στο $\{0,1\}^n$
- Πόσες;

Pseudorandom Functions - PRF

- Συνάρτηση που φαίνεται ίδια με μια τυχαία συνάρτηση
- Τυχαία συνάρτηση: $Func_n$ = όλες οι συναρτήσεις από το $\{0,1\}^n$ στο $\{0,1\}^n$
- Πόσες; Μπορούμε να αναπαραστήσουμε μια συνάρτηση στο $Func_n$ με $n2^n$ bits

Pseudorandom Functions - PRF

- Συνάρτηση που φαίνεται ίδια με μια τυχαία συνάρτηση
- Τυχαία συνάρτηση: $Func_n$ = όλες οι συναρτήσεις από το $\{0,1\}^n$ στο $\{0,1\}^n$
- Πόσες; Μπορούμε να αναπαραστήσουμε μια συνάρτηση στο $Func_n$ με $n2^n$ bits
- Άρα, $|Func_n| = 2^{n2^n}$
- Τυχαία συνάρτηση: διάλεξε ομοιόμορφα μια $f \in Func_n$

Pseudorandom Functions - PRF

- Συνάρτηση που φαίνεται ίδια με μια τυχαία συνάρτηση
- Τυχαία συνάρτηση: $Func_n$ = όλες οι συναρτήσεις από το $\{0,1\}^n$ στο $\{0,1\}^n$
- Πόσες; Μπορούμε να αναπαραστήσουμε μια συνάρτηση στο $Func_n$ με $n2^n$ bits
- Άρα, $|Func_n| = 2^{n2^n}$
- Τυχαία συνάρτηση: διάλεξε ομοιόμορφα μια $f \in Func_n$
- Ισοδύναμα: σε κάθε θέση του πίνακα τιμών διάλεξε ομοιόμορφα ένα string από το $\{0,1\}^n$

Pseudorandom Functions - PRF

- Δεν έχει νόημα να μιλάμε για σταθερή συνάρτηση, αλλά θέλουμε κάποια κατανομή

Pseudorandom Functions - PRF

- Δεν έχει νόημα να μιλάμε για σταθερή συνάρτηση, αλλά θέλουμε κάποια κατανομή
- Αν έχουμε μια $F\colon \{0,1\}^* \times \{0,1\}^* \mapsto \{0,1\}^*$, τότε αν κρατήσουμε σταθερή την πρώτη παράμετρο έχουμε συναρτήσεις $F_k(x) = F(k,x)$, όπου k κλειδί (επιλέγεται ομοιόμορφα)

Pseudorandom Functions - PRF

- Δεν έχει νόημα να μιλάμε για σταθερή συνάρτηση, αλλά θέλουμε κάποια κατανομή
- Αν έχουμε μια $F\colon \{0,1\}^* \times \{0,1\}^* \mapsto \{0,1\}^*$, τότε αν κρατήσουμε σταθερή την πρώτη παράμετρο έχουμε συναρτήσεις $F_k(x) = F(k,x)$, όπου k κλειδί (επιλέγεται ομοιόμορφα)
- Επιλέγοντας το κλειδί $k \leftarrow \{0,1\}^n$ επιλέγεται μια $F_k\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$
- Άρα η F ορίζει μια κατανομή στις συναρτήσεις της $Func_n$

Τυπικός ορισμός PRF

- Η αναπαράσταση με $n2^n$ bits είναι αδύνατο να ελεγχθεί από έναν πολυωνυμικό διαχωριστή

Τυπικός ορισμός PRF

- Η αναπαράσταση με $n2^n$ bits είναι αδύνατο να ελεγχθεί από έναν πολυωνυμικό διαχωριστή

Τυπικός ορισμός PRF

- Η αναπαράσταση με $n2^n$ bits είναι αδύνατο να ελεχθεί από έναν πολυωνυμικό διαχωριστή
- Έχουμε ένα μαντείο O που είτε είναι ίσο με F_k (για ομοιόμορφο k) ή με f (για ομοιόμορφη f)
- Μπορούμε να ρωτήσουμε για όποιο x θέλουμε, αλλά ίδια απάντηση για το ίδιο x.
- Μόνο πολυωνυμικά πολλές ερωτήσεις γίνονται στο μαντείο. Οι ερωτήσεις προσαρμόζονται.

Τυπικός ορισμός PRF

- Η αναπαράσταση με $n2^n$ bits είναι αδύνατο να ελεχθεί από έναν πολυωνυμικό διαχωριστή
- Έχουμε ένα μαντείο O που είτε είναι ίσο με F_k (για ομοιόμορφο k) ή με f (για ομοιόμορφη f)
- Μπορούμε να ρωτήσουμε για όποιο x θέλουμε, αλλά ίδια απάντηση για το ίδιο x.
- Μόνο πολυωνυμικά πολλές ερωτήσεις γίνονται στο μαντείο. Οι ερωτήσεις προσαρμόζονται.

Ορισμός

Έστω συνάρτηση $F : \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \mapsto \{0,1\}^n$ αποδοτικά υπολογίσιμη. Η F είναι *ψευδοτυχαία συνάρτηση* αν για κάθε πολυωνυμικού χρόνου διαχωριστή D υπάρχει αμελητέα συνάρτηση $negl$ ώστε:

$$|Pr_{k \leftarrow \{0,1\}^n}[D^{F_k()} = 1] - Pr_{f \leftarrow Func_n}[D^{f()} = 1]| \leq negl(n)$$

PRF vs PRG

PRF πιο γενική από PRG

PRF vs PRG

PRF πιο γενική από PRG

Μπορούμε από μια ψευδοτυχαία συνάρτηση να πάρουμε μια ψευδοτυχαία γεννήτρια: $G(k) = F_k(0) || F_k(1)$

PRF vs PRG

PRF πιο γενική από PRG

Μπορούμε από μια ψευδοτυχαία συνάρτηση να πάρουμε μια ψευδοτυχαία γεννήτρια: $G(k) = F_k(0)||F_k(1)$

Υπάρχει και η έννοια ψευδοτυχαία μετάθεση: συνάρτηση 1-1 και επί (έχει αντίστροφη)

Δημιουργία πραγματικής τυχαιότητας

- υλικό, φυσικά φαινόμενα π.χ. θερμικός ή ηλεκτρικός θόρυβος
- λογισμικό π.χ. πάτημα πλήκτρων πληκτρολογίου, κίνηση του ποντικιού

Γεννήτριες τυχαίων αριθμών γενικού σκοπού είναι μη κατάλληλες για την κρυπτογραφία π.χ. rand() της C.

Intel, random.org ...

‘Αποδεδειγμένα’ ασφαλείς γεννήτριες ψευδοτυχαίων

- RSA-based (Micali-Schnorr), BBS.
- Βασίζονται σε (γενικά παραδεκτές) αριθμοθεωρητικές μονόδρομες συναρτήσεις: ύψωση σε δύναμη modulo n, τετραγωνισμός modulo n.
- Λειτουργία: διαδοχικές εφαρμογές της συνάρτησης, έξοδος κάθε φορά το λιγότερο σημαντικό bit του αριθμού (ή κάποια από τα λιγότερο σημαντικά bit).
- Είναι ασφαλείς κάτω από την υπόθεση δυσκολίας αντιστροφής της αντίστοιχης συνάρτησης.
- Απαιτούν μεγαλύτερη υπολογιστική προσπάθεια.

Blum-Blum-Shub (1986)

Αλγόριθμος

- Πάρε δύο μεγάλους πρώτους p, q, με $p \equiv q \equiv 3 \pmod 4$, και θέσε $n = pq$.
- Επίλεξε τυχαία ένα s_0 σχετικά πρώτο με το n.
- Πάρε

$$z_0 = s_0^2 \bmod n$$

Για $1 \leq i \leq \infty$

$$z_i = (z_{i-1}^2 \bmod n) \bmod 2$$

Παρατήρηση: σχετικά αργό, αλλά ασφαλές με την υπόθεση ότι ο έλεγχος τετραγωνικών υπολοίπων mod$n$ είναι δύσκολος αν δεν είναι γνωστή η παραγοντοποίηση του n.

Παράδειγμα BBS

Έστω $n = 192649 = 383 * 503$ και $z_0 = 101355^2 \mod n = 20749$.

Τα πρώτα 5 bits που παράγονται από τον BBS είναι

$$11001$$

και προκύπτουν:

i	s_i	z_i
0	20749	
1	143135	1
2	177671	1
3	97048	0
4	89992	0
5	174051	1

Κρυπτοσυστήματα ροής (stream ciphers)

Παραγωγή ακολουθίας κλειδιών με βάση κάποιο αρχικό κλειδί, και (πιθανά) το plaintext.

Ορισμός

- Plaintext: $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$
- Ciphertext: $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$
- Αρχικό κλειδί: k
- Βοηθητικές συναρτήσεις: $f_i, 0 \leq i < m$
- Key stream: $z_i = f_{i \bmod m}(k, x_0, \ldots, x_{i-1}, z_0, \ldots, z_{i-1})$
- Κρυπτογράφηση: $y_i = enc_{z_i}(x_i)$
- Αποκρυπτογράφηση: $x_i = dec_{z_i}(y_i)$

Π.χ. για δυαδικές ακολουθίες:

$$enc_z(x) = x \oplus z = x + z \bmod 2$$
$$dec_z(y) = y \oplus z = y + z \bmod 2$$

Κρυπτοσυστήματα ροής - Τρόποι λειτουργίας

Διακρίνονται σε synchronous (το κλειδί δεν εξαρτάται από το plaintext), και asynchronous (λέγονται και self-synchronizing).

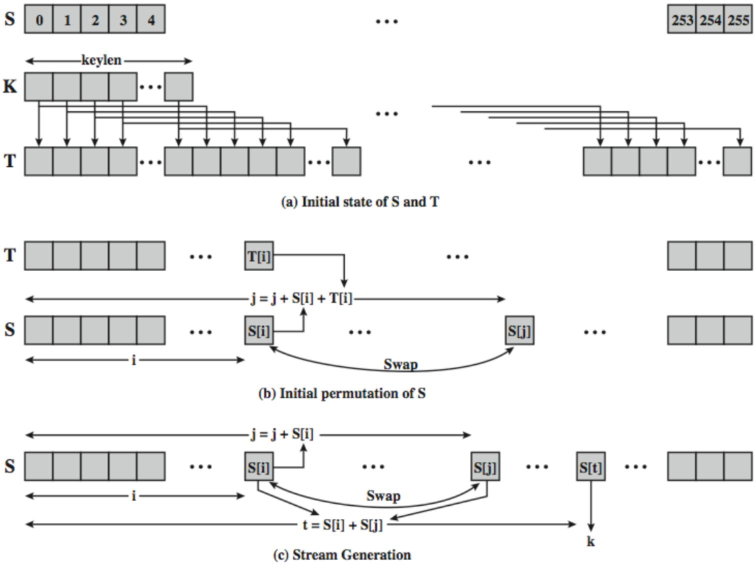
Επίσης σε periodic ($\forall i : z_{i+d} = z_i$, όπου d η περίοδος) και aperiodic.

Παράδειγμα: το Vigenère είναι synchronous και periodic.

Η γεννήτρια ψευδοτυχαίων RC4

- Rivest (1987)
- Ιδιωτικό της εταιρίας RSA Data Security, Inc (κλειστό)
- Διέρρευσε το 1994
- Χρήση σε πολύ διαδεδομένα πρωτόκολλα: WEP/WPA, SSL/TLS

RC4 σχηματικά



Η γεννήτρια ψευδοτυχαίων RC4

- Συστατικά: 2 arrays of bytes:
  - Μετάθεση $P[0..255]$. Αρχικοποίηση:
    for all $i \in \{0..255\}$ **do** $: P[i] = i$
  - Κλειδί $K[0..keylen - 1]$, $keylen \leq 256$ – συνήθως $keylen \in [5..8]$.
    Επιλέγεται από χρήστη.
- Δημιουργία σειράς κλειδιών (key-scheduling algorithm – KSA). Η αρχική (ταυτοτική) μετάθεση P μετατρέπεται μέσω μιας σειράς ανταλλαγών (swap) σε μια (φαινομενικά τυχαία) μετάθεση.

  Το "ανακάτεμα" επηρεάζεται από το αρχικό κλειδί K.
- Παραγωγή ψευδοτυχαίων bytes (pseudorandom generation algorithm – PRGA)

  Επαναληπτικός βρόχος. Σε κάθε επανάληψη επιλέγεται κάποιο byte της P ως κλειδί εξόδου με τρόπο που καθορίζεται από τα τρέχοντα περιεχόμενα της P.

  Οι επαναλήψεις συνεχίζονται για όσο χρειάζεται (δηλ. μέχρι να τελειώσει το stream). Σε κάθε επανάληψη γίνεται και ένα νέο swap.

Η γεννήτρια ψευδοτυχαίων RC4

Περιγραφή KSA, PRGA

- Δημιουργία σειράς κλειδιών (KSA)

  $j = 0$

  for $i = 0$ **to** 255 **do** :

  $\quad j = (j + P[i] + K[i \bmod \mathit{keylen}]) \bmod 256$

  $\quad \mathrm{swap}(P[i], P[j])$

- Παραγωγή ψευδοτυχαίων bytes (PRGA)

  $i = 0; j = 0$

  while next key needed :

  $\quad i = (i+1) \bmod 256\ ; j = (j + P[i]) \bmod 256$

  $\quad \mathrm{swap}(P[i], P[j])$

  $\quad K_o = P[(P[i] + P[j]) \bmod 256]$

  $\quad$ `output` K_o

Κάθε κλειδί εξόδου K_o χρησιμοποιείται για την κρυπτογράφηση ενός byte αρχικού κειμένου.

Η γεννήτρια ψευδοτυχαίων RC4

Παρατηρήσεις

- Με ίδιο αρχικό κλειδί K προκύπτει η ίδια σειρά κλειδιών εξόδου.
- Απλή και γρήγορη στην υλοποίηση με software (σε αντίθεση με άλλα stream cipher, π.χ. αυτά που βασίζονται σε LFSRs).
- Η ασφάλεια της γεννήτριας RC4 έχει αμφισβητηθεί έντονα. Κάποιοι τρόποι χρήσης ιδιαίτερα ανασφαλείς (π.χ. WEP) – επίθεση Fluhrer, Mantin, Shamir (2001).

Η γεννήτρια ψευδοτυχαίων RC4

Παρατηρήσεις

- Με ίδιο αρχικό κλειδί K προκύπτει η ίδια σειρά κλειδιών εξόδου.
- Απλή και γρήγορη στην υλοποίηση με software (σε αντίθεση με άλλα stream cipher, π.χ. αυτά που βασίζονται σε LFSRs).
- Η ασφάλεια της γεννήτριας RC4 έχει αμφισβητηθεί έντονα. Κάποιοι τρόποι χρήσης ιδιαίτερα ανασφαλείς (π.χ. WEP) – επίθεση Fluhrer, Mantin, Shamir (2001).
  Απόδειξη στον πίνακα

Η γεννήτρια ψευδοτυχαίων RC4

Παρατηρήσεις

- Με ίδιο αρχικό κλειδί K προκύπτει η ίδια σειρά κλειδιών εξόδου.
- Απλή και γρήγορη στην υλοποίηση με software (σε αντίθεση με άλλα stream cipher, π.χ. αυτά που βασίζονται σε LFSRs).
- Η ασφάλεια της γεννήτριας RC4 έχει αμφισβητηθεί έντονα. Κάποιοι τρόποι χρήσης ιδιαίτερα ανασφαλείς (π.χ. WEP) – επίθεση Fluhrer, Mantin, Shamir (2001).
  Απόδειξη στον πίνακα
- Ουσιαστικό πρόβλημα η παραλλαγή του RC4 με χρήση IV, όπου μπορεί να αποκαλυφθεί το πραγματικό κλειδί (WEP)

Η γεννήτρια ψευδοτυχαίων RC4

Παρατηρήσεις

- Με ίδιο αρχικό κλειδί K προκύπτει η ίδια σειρά κλειδιών εξόδου.
- Απλή και γρήγορη στην υλοποίηση με software (σε αντίθεση με άλλα stream cipher, π.χ. αυτά που βασίζονται σε LFSRs).
- Η ασφάλεια της γεννήτριας RC4 έχει αμφισβητηθεί έντονα. Κάποιοι τρόποι χρήσης ιδιαίτερα ανασφαλείς (π.χ. WEP) – επίθεση Fluhrer, Mantin, Shamir (2001).
  Απόδειξη στον πίνακα
- Ουσιαστικό πρόβλημα η παραλλαγή του RC4 με χρήση IV, όπου μπορεί να αποκαλυφθεί το πραγματικό κλειδί (WEP)
- Άμυνα: απόρριψη αρχικού τμήματος κλειδοροής (RC4-drop[n]), ενδεικτικά: $n = 768$ bytes, συστήνεται ακόμη και $n = 3072$.

Η γεννήτρια ψευδοτυχαίων RC4

Παρατηρήσεις

- Με ίδιο αρχικό κλειδί K προκύπτει η ίδια σειρά κλειδιών εξόδου.
- Απλή και γρήγορη στην υλοποίηση με software (σε αντίθεση με άλλα stream cipher, π.χ. αυτά που βασίζονται σε LFSRs).
- Η ασφάλεια της γεννήτριας RC4 έχει αμφισβητηθεί έντονα. Κάποιοι τρόποι χρήσης ιδιαίτερα ανασφαλείς (π.χ. WEP) – επίθεση Fluhrer, Mantin, Shamir (2001).
  Απόδειξη στον πίνακα
- Ουσιαστικό πρόβλημα η παραλλαγή του RC4 με χρήση IV, όπου μπορεί να αποκαλυφθεί το πραγματικό κλειδί (WEP)
- Άμυνα: απόρριψη αρχικού τμήματος κλειδοροής (RC4-drop[n]), ενδεικτικά: $n = 768$ bytes, συστήνεται ακόμη και $n = 3072$.
- Μη ασφαλές!

Κρυπτοσυστήματα ροής: Linear Recurrence Keystream

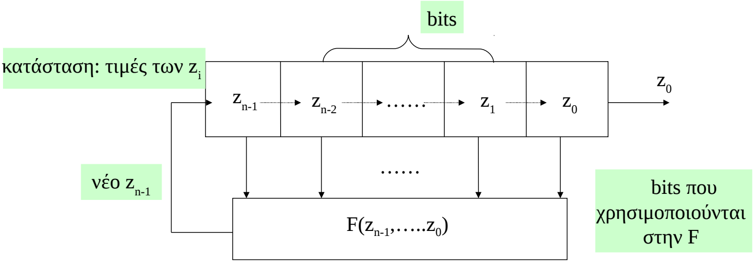
Αρχικό διάνυσμα κλειδιών: $(z_0, z_1, \ldots, z_{m-1})$.
Τα υπόλοιπα κλειδιά υπολογίζονται ως εξής:

$$z_{i+m} = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \cdot z_{i+j} \pmod 2, \quad \forall j, c_j \in \{0,1\}$$

Εάν το πολυώνυμο $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_{m-1} x^{m-1} + x^m$ είναι primitive, τότε το κρυπτοσύστημα έχει περίοδο $d = 2^m - 1$.
Π.χ. $c_0 = c_1 = 1, c_2 = c_3 = 0$ ορίζουν το πολυώνυμο $x^4 + x + 1$, και με δεδομένο αρχικό κλειδί $z_0, \ldots, z_3$ έχουμε $z_{4+i} = z_i + z_{i+1} \mod 2$.

Το κρυπτοσύστημα αυτό έχει περίοδο 15.

Υλοποίηση με Linear Feedback Shift Register (LFSR).


bits
κατάσταση: τιμές των z_i
z_{n-1}
z_{n-2}
……
z_1
z_0
z_0
νέο z_{n-1}
……
$F(z_{n-1},\ldots z_0)$
bits που χρησιμοποιούνται στην F

Σχήμα : FSR

Καταχωρητές Ολίσθησης Γραμμικής Ανάδρασης - LFSRs

- Δημιουργούν περιοδικές ακολουθίες, με περίοδο το πολύ $2^L - 1$, όπου L το πλήθος των ψηφίων.
- Αν το αντίστοιχο πολυώνυμο είναι primitive έχουμε maximum-length LFSR. Πολλά γνωστά primitive πολυώνυμα.

Καταχωρητές Ολίσθησης Γραμμικής Ανάδρασης - LFSRs

- Δημιουργούν περιοδικές ακολουθίες, με περίοδο το πολύ $2^L - 1$, όπου L το πλήθος των ψηφίων.
- Αν το αντίστοιχο πολυώνυμο είναι primitive έχουμε maximum-length LFSR. Πολλά γνωστά primitive πολυώνυμα.
- Σημαντικό μέγεθος για ακολουθίες: γραμμική πολυπλοκότητα (linear complexity). Είναι το ελάχιστο μέγεθος LFSR που παράγει την ίδια ακολουθία.
- Αλγόριθμος Berlekamp-Massey: υπολογίζει τη γραμμική πολυπλοκότητα και τον αντίστοιχο LFSR.

Καταχωρητές Ολίσθησης Γραμμικής Ανάδρασης - LFSRs

- Δημιουργούν περιοδικές ακολουθίες, με περίοδο το πολύ $2^L - 1$, όπου L το πλήθος των ψηφίων.
- Αν το αντίστοιχο πολυώνυμο είναι primitive έχουμε maximum-length LFSR. Πολλά γνωστά primitive πολυώνυμα.
- Σημαντικό μέγεθος για ακολουθίες: γραμμική πολυπλοκότητα (linear complexity). Είναι το ελάχιστο μέγεθος LFSR που παράγει την ίδια ακολουθία.
- Αλγόριθμος Berlekamp-Massey: υπολογίζει τη γραμμική πολυπλοκότητα και τον αντίστοιχο LFSR.
- Αύξηση γραμμικής πολυπλοκότητας: χρήση περισσότερων LFSRs, συνδυασμός εξόδων με μη γραμμικό τρόπο.
  Π.χ. Geffe generator συνδυάζει 3 maximum-length LFSRs με μήκος L_1, L_2, L_3 και εξόδους x_1, x_2, x_3:
  $$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \oplus (1 \oplus x_2) x_3$$
  έχει περίοδο $(2^{L_1} - 1) \cdot (2^{L_2} - 1) \cdot (2^{L_3} - 1)$ και γραμμική πολυπλοκότητα $L = L_1 L_2 + L_2 L_3 + L_3$

Κρυπτοσυστήματα ροής με LFSRs

- LFSR: εύκολη υλοποίηση σε hardware, καλές στατιστικές ιδιότητες, αλλά μη ασφαλή γιατί τα bits εξόδου έχουν γραμμική σχέση
- Λύσεις
  - μη γραμμική ανάδραση
  - μη γραμμικός συνδυασμός των registers δίνει την έξοδο
  - συνδυασμός των εξόδων περισσότερων LFSRs, αλλά χωρίς εξάρτηση της τελικής εξόδου από κάποια από τις επιμέρους

Κρυπτοσυστήματα ροής με LFSRs

- LFSR: εύκολη υλοποίηση σε hardware, καλές στατιστικές ιδιότητες, αλλά μη ασφαλή γιατί τα bits εξόδου έχουν γραμμική σχέση
- Λύσεις
  - μη γραμμική ανάδραση
  - μη γραμμικός συνδυασμός των registers δίνει την έξοδο
  - συνδυασμός των εξόδων περισσότερων LFSRs, αλλά χωρίς εξάρτηση της τελικής εξόδου από κάποια από τις επιμέρους
- Χρήση σε:
  1. DVD (CSS): 2 LFSRs, (ανάκτηση σπόρου σε 2^{17})
  2. GSM (A5/1): 3 LFSRs ($2^{39.91}$, με προεργασία 2^{38}), (A5/2): 4 LFSRs
  3. Bluetooth (E0): 4 LFSRs (ανάκτηση σπόρου σε 2^{38})

eStream

- eStream project: 2004-2008
- Κατηγορίες:
  - Μήκος κλειδιού 128 bits και ένα IV (initialization vector) μήκους 64 και/ή 128 bits (SW)
  - Μήκος κλειδιού 80 bits και ένα IV (initialization vector) μήκους 32 και/ή 64 bits (HW)
- Ξεχωριστές προτάσεις για SW και για HW
- Αξιολόγηση:
  - Ασφάλεια
  - Δωρεάν αδειοδότηση
  - Επιδόσεις και φάσμα εφαρμογών
- Η επιτροπή απλά μάζεψε τις συμμετοχές, η αξιολόγηση έγινε από την κοινότητα

eStream

- Κριτήρια ασφάλειας
  - οποιαδήποτε επίθεση ανάκτησης κλειδιού πρέπει να είναι τόσο δύσκολη όσο η εξαντλητική αναζήτηση
  - Απλότητα σχεδίασης
- Κριτήρια υλοποίησης
  - SW και HW αποδοτικότητα
  - Εκτέλεση και μνήμη
  - Επίδοση
  - Ευελιξία χρήσης

SW	HW
HC-128	Grain v1
Rabbit	MICKEY 2.0
Salsa20	Trivium
Sosemanuk	

Λεπτομέρειες στο www.ecrypt.eu.org/stream