

Εισαγωγικές Έννοιες

Δημήτρης Φωτάκης

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



Υπολογιστικό Πρόβλημα

- **Επιθυμητός μετασχηματισμός** δεδομένων εισόδου σε δεδομένα εξόδου.
 - Μορφή δεδομένων εισόδου (**έγκυρο στιγμιότυπο**).
 - Μορφή και **ιδιότητες** δεδομένων εξόδου (**απάντηση ή λύση**).
 - Τυπικά: **διμελής σχέση** στις συμβ/ρές εισόδου, εξόδου.
 - Διαισθητικά: **ερώτηση** που αφορά στιγμιότυπα.
- **Στιγμιότυπο**: μαθηματικό αντικείμενο που ορίζεται από δεδομένα εισόδου.
 - Διατυπώνουμε **ερώτηση** και περιμένουμε **απάντηση**.
 - Άπειρο σύνολο στιγμιότυπων.
- Κατηγορίες Προβλημάτων:
 - **Βελτιστοποίησης**: λύση με βέλτιστη αντικειμενική τιμή.
 - **Απόφασης**: απάντηση **ΝΑΙ** ή **ΌΧΙ**.

Προβλήματα Βελτιστοποίησης

□ Πρόβλημα βελτιστοποίησης Π :

- Σύνολο στιγμιότυπων Σ_{Π}

- Σύνολο αποδεκτών λύσεων: $\forall \sigma \in \Sigma_{\Pi}, \Lambda_{\Pi}(\sigma)$

- **Αντικειμενική** συνάρτηση: $\forall \sigma \in \Sigma_{\Pi}, f_{\sigma} : \Lambda_{\Pi}(\sigma) \mapsto \mathbb{R}$

□ Δεδομένου στιγμιότυπου σ , ζητείται $\lambda_{\sigma}^* \in \Lambda_{\Pi}(\sigma)$:

$\forall \lambda \in \Lambda_{\Pi}(\sigma), f_{\sigma}(\lambda_{\sigma}^*) \geq f_{\sigma}(\lambda)$ πρόβλημα **μεγιστοποίησης**

$\forall \lambda \in \Lambda_{\Pi}(\sigma), f_{\sigma}(\lambda_{\sigma}^*) \leq f_{\sigma}(\lambda)$ πρόβλημα **ελαχιστοποίησης**

λ_{σ}^* βέλτιστη λύση και $f_{\sigma}(\lambda_{\sigma}^*)$ βέλτιστη αντικειμενική τιμή

□ Συνδυαστικής βελτιστοποίησης: πεπερασμένο σύνολο αποδεκτών λύσεων που περιλαμβάνει βέλτιστη.

- Προφανής αλγόριθμος: εξαντλητική αναζήτηση.

Προβλήματα Απόφασης

- Πρόβλημα απόφασης Π :
 - Σύνολο στιγμιότυπων Σ_{Π}
 - Σύνολο (αποδεκτών) λύσεων: $\forall \sigma \in \Sigma_{\Pi}, \Lambda_{\Pi}(\sigma)$
 - Δεδομένου $\sigma \in \Sigma_{\Pi}, \Lambda_{\Pi}(\sigma) \neq \emptyset$;
- Επιδέχεται μόνο δύο απαντήσεις: **ΝΑΙ ή ΌΧΙ.**

Παραδείγματα Προβλημάτων

□ Πρόβλημα Προσπελασιμότητας:

- **Στιγμιότυπο:** Κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$, κορυφές $s, t \in V$.
- **Ερώτηση:** Υπάρχει $s - t$ μονοπάτι;

□ Πρόβλημα Συντομότερου Μονοπατιού:

- **Στιγμιότυπο:** Κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$, μήκη στις ακμές $w: E \rightarrow \mathbb{R}$, κορυφές $s, t \in V$.
- **Ερώτηση:** Ποιο είναι το συντομότερο $s - t$ μονοπάτι;

Παραδείγματα Προβλημάτων

□ Πρόβλημα κύκλου Hamilton:

- **Στιγμιότυπο:** Γράφημα $G(V, E)$.
- **Ερώτηση:** Υπάρχει κύκλος Hamilton στο G ;

□ Πρόβλημα Πλανόδιου Πωλητή (TSP):

- **Στιγμιότυπο:** Σύνολο $N = \{1, \dots, n\}$ σημείων, αποστάσεις $d : N \times N \rightarrow \mathbb{R}_+$.
- **Ερώτηση:** Ποια περιοδεία ελαχιστοποιεί συνολικό μήκος ή ισοδύναμα, **ποια μετάθεση π** του N ελαχιστοποιεί το:

$$\sum_{i=1}^{n-1} d(\pi(i), \pi(i+1)) + d(\pi(n), \pi(1))$$

Αλγόριθμος

- **Σαφώς** ορισμένη διαδικασία για την **επίλυση** προβλήματος σε **πεπερασμένο** χρόνο από υπολογιστική **μηχανή**.
 - «Συνταγή» για την επίλυση υπολογιστικού προβλήματος.
 - **Σαφήνεια**: κάθε ενέργεια ορίζεται επακριβώς.
 - Είναι **μηχανιστικά αποτελεσματικός**.
 - Δέχεται ως **είσοδο στιγμιότυπο** προβλήματος και παράγει ως **έξοδο πάντα** την σωστή λύση.
 - Η λύση υπολογίζεται έπειτα από **πεπερασμένο #ενεργειών**.
- **Ορθότητα αλγόριθμου**: απαντάει πάντα σωστά.
 - **Λάθος**: αντιπαράδειγμα. **Ορθότητα**: μαθηματική απόδειξη.
- Προβλήματα λύνονται από **πολλούς σωστούς** αλγόριθμους:
 - Ποιος είναι **ο καλύτερος** (για συγκεκριμένη εφαρμογή);

Υπολογιστική Πολυπλοκότητα

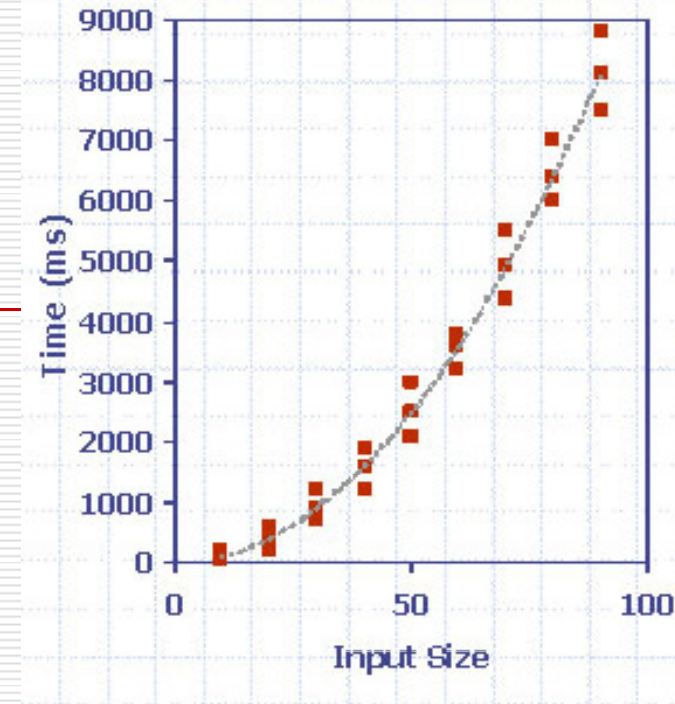
- Υπολογιστική πολυπλοκότητα **αλγόριθμου A**:
 - Ποσότητα υπολογιστικών πόρων που απαιτεί A ως αύξουσα συνάρτηση μεγέθους στιγμιότυπου εισόδου.
 - Χρόνος, μνήμη, επεξεργαστές, επικοινωνία, τυχαιότητα.
 - **Χειρότερης, μέσης, καλύτερης** περίπτωσης.
- Μέγεθος στιγμιότυπου εισόδου **n** :
 - #bits για αναπαράσταση δεδομένων εισόδου στη μνήμη.
 - Πλήθος βασικών συνιστωσών που αποτελούν μέτρο μεγέθους και δυσκολίας στιγμιότυπου (π.χ. κορυφές & ακμές).
- Υπολογιστική πολυπλοκότητα **προβλήματος Π**:
 - Πολυπλοκότητα (χειρότερης περίπτωσης) **καλύτερου αλγόριθμου** που λύνει πρόβλημα Π.

Ανάλυση Αλγορίθμου

- Απόδειξη ορθότητας
 - Μερικές φορές για ένα καλώς ορισμένο **υποσύνολο** των στιγμιοτύπων εισόδου.
- Εκτίμηση υπολογιστικής πολυπλοκότητας.
 - **Χειρότερης, μέσης, και καλύτερης** περίπτωσης.
- Καταλληλότερη λύση ανάλογα με **απαιτήσεις εφαρμογής**.

Πειραματική Μελέτη

- Υλοποίηση αλγόριθμου σε πρόγραμμα.
 - Δημιουργία στιγμιτύπων διαφορετικού μεγέθους και σύνθεσης.
 - Επιβεβαίωση ορθότητας και καταγραφή πόρων για κάθε εκτέλεση.
 - Απεικόνιση αποτελεσμάτων σε γραφική παράσταση και εξαγωγή συμπερασμάτων.
- Περιορισμοί – Δυσκολίες:
 - Υλοποίηση χρονοβόρα και ενδεχομένως δύσκολη.
 - Αποτελέσματα όχι κατ' ανάγκη αντιπροσωπευτικά.
 - Συμπεράσματα δεν γενικεύονται κατ' ανάγκη.



Θεωρητική Ανάλυση

- Δεν απαιτεί υλοποίηση αλλά σαφή **περιγραφή** αλγόριθμου.
- Καταλήγει σε **γενικά συμπεράσματα**:
 - Λαμβάνει υπόψη **όλα** τα στιγμιότυπα.
 - Προσδιορίζει υπολογιστική πολυπλοκότητα ως συνάρτηση μεγέθους εισόδου, ...
 - ... αλλά **ανεξάρτητα** από υπολογιστικό **περιβάλλον**.
 - Εστιάζει στις **εγγενείς ιδιότητες** του αλγόριθμου.
- Συμπεράσματα **επιβεβαιώνονται** εύκολα.
- Μαθηματικό υπόβαθρο: Διακριτά Μαθηματικά.
 - Γραφήματα, μαθηματική λογική, επαγωγή, αναδρομικές σχέσεις, συνδυαστική, πιθανότητες, ...

Υπολογιστικό Μοντέλο

- Μηχανή Άμεσης Προσπέλασης Μνήμης (Random Access Machine, RAM).
 - **Ιδεατό μονο-επεξεργαστικό** σύστημα που ακολουθεί **αρχιτεκτονική von Neumann**.
 - Ένας επεξεργαστής, ακολουθιακή εκτέλεση εντολών
 - Απεριόριστες θέσεις μνήμης προσπελάσιμες με **διεύθυνση**.
 - Στοιχειώδη υπολογιστικά **βήματα** εκτελούνται σε **μοναδιαίο χρόνο**:
 - Ανάγνωση από / εγγραφή σε θέση μνήμης, αριθμητικές και λογικές πράξεις, συγκρίσεις, εντολές ελέγχου ροής, ...

Ασυμπτωτική Εκτίμηση

- Χρόνος εκτέλεσης αλγόριθμου A :
 - Αύξουσα συνάρτηση του $T(n)$ που εκφράζει σε πόσο χρόνο ολοκληρώνεται ο A όταν εφαρμόζεται σε στιγμ. μεγέθους n .
- Ενδιαφέρει η τάξη μεγέθους $T(n)$ και όχι ακριβής εκτίμηση $T(n)$.
 - Ακριβής εκτίμηση είναι συχνά δύσκολη και εξαρτάται από υπολογιστικό περιβάλλον, υλοποίηση, ...
 - Τάξη μεγέθους είναι **εγγενής ιδιότητα** του αλγόριθμου.
 - Δυαδική αναζήτηση έχει λογαριθμικό χρόνο.
 - Γραμμική αναζήτηση έχει γραμμικό χρόνο.
- **Ασυμπτωτική εκτίμηση** αγνοεί σταθερές και εστιάζει σε τάξη μεγέθους χρόνου εκτέλεσης.