Αναζήτηση Κατά Βάθος

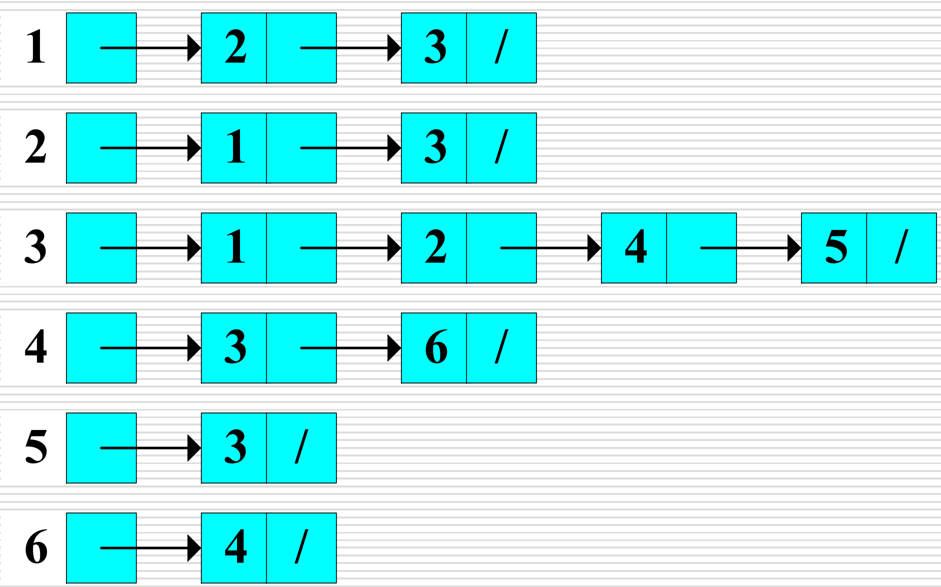
Δημήτρης Φωτάκης

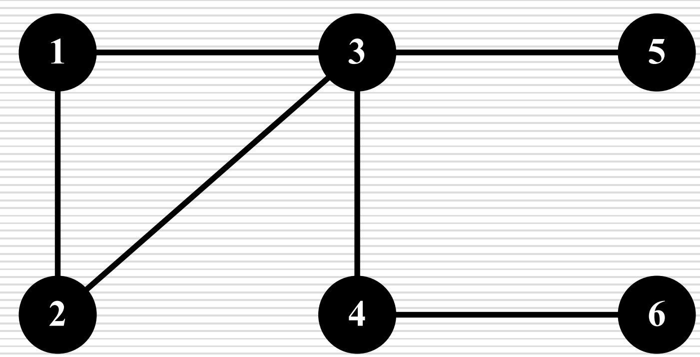
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Αναζήτηση Κατά Βάθος (DFS)

- Εξερεύνηση νέων κορυφών με απομάκρυνση από αρχική.
- Πρώτη επίσκεψη σε ανεξερεύνητη κορυφή u:
  - Εξερεύνηση (αναδρομικά) όλων των (ανεξερεύνητων) γειτόνων της u, πριν ολοκληρώσουμε με u.





Αναζήτηση Κατά Βάθος (DFS)

- Εξερεύνηση νέων κορυφών με απομάκρυνση από αρχική.
- Πρώτη επίσκεψη σε ανεξερεύνητη κορυφή u:
  - Εξερεύνηση (αναδρομικά) όλων των (ανεξερεύνητων) γειτόνων της u, πριν ολοκληρώσουμε με u.
- Φύσει αναδρομική διαδικασία:

DFS(κορυφή u)
  for κάθε κορυφή v γειτονική της u **do**
    if δεν έχω επισκεφθεί τη v προηγουμένως **then**
      σημείωσε ακμή (u, v); **DFS**(v);

- **Τρία είδη** κορυφών:
  - Ανεξερεύνητη: όχι επίσκεψη ακόμη.
  - Υπο-εξέταση: επίσκεψη και εξερευνούμε γείτονες.
  - Εξερευνημένη: ολοκλήρωση διαδικασίας.

Αναζήτηση Κατά Βάθος (DFS)

- Κορυφές περνούν από παραπάνω στάδια:
  - Αρχικά όλες οι κορυφές ανεξερεύνητες.
  - Πρώτη επίσκεψη ανεξερεύνητης κορ. → υπό-εξέταση.
  - Ολοκλήρωση DFS για (ανεξερ.) γείτονες κορ. → εξερευνημένη.
- Κορυφή u τίθεται υπό-εξέταση:
  - Όλες οι κορυφές που είναι προσπελάσιμες από u και είναι ανεξερεύνητες θα τεθούν εξερευνημένες πριν u τεθεί εξερευνημένη.
- Εξέλιξη διαδικασίας αποτυπώνεται σε **DFS-δάσος** και «**χρόνους**» πρώτης επίσκεψης και αναχώρησης.
  - DFS-δάσος: ακμές πρώτης επίσκεψης, ακυκλικό.

Υλοποίηση

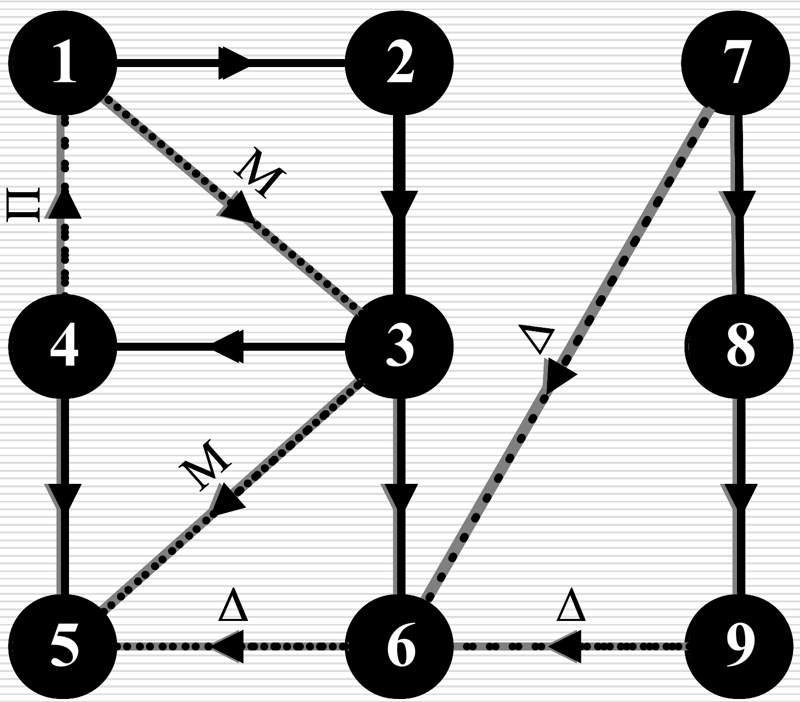
- Πίνακας κατάστασης: **m[v]** = { A, Y, E }.
- Πίνακας γονέων: **p[v]** = πατέρας v στο DFS-δάσος.
- «Χρόνοι» πρώτης επίσκεψης **d[v]** και αναχώρησης **f[v]**.
- Χρόνος εκτέλεσης **Θ(n + m)**.
- DFS σε (α) δέντρο, (β) πλήρες γράφημα, (γ) κύκλο.

DFS_Init($G(V, E)$)
  $t \leftarrow 0$;
  for all $v \in V$ **do**
    $m[v] \leftarrow$ A; $p[v] \leftarrow$ NULL;
  for all $v \in V$ **do**
    if $m[v] =$ A **then** DFS(v);

DFS(v)
  $m[v] \leftarrow$ Y; $d[v] \leftarrow$ ++t;
  for all $u \in L[v]$ **do**
    if $m[u] =$ A **then**
      $p[u] \leftarrow v$; DFS(u);
  $m[v] \leftarrow$ E; $f[v] \leftarrow$ ++t;

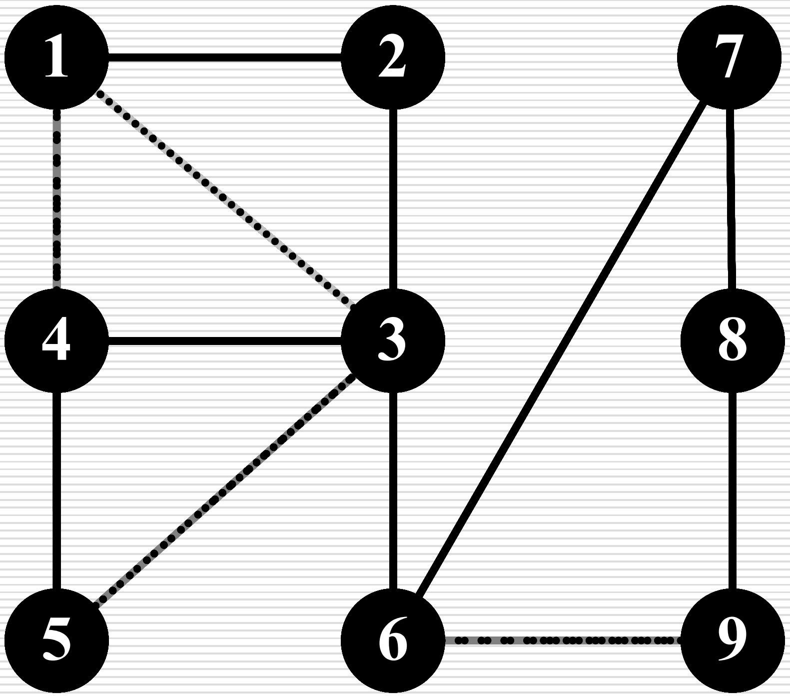
Παράδειγμα – Κατηγορίες Ακμών

- Ακμές δάσους / δέντρου:
  - Εξερεύνηση (u, v) όταν v ανεξερεύνητη.
- Πίσω ακμές:
  - Εξερεύνηση (u, v) όταν v υπό-εξέταση: κύκλος.
- Μπροστά ακμές:
  - Εξερεύνηση (u, v) όταν v εξερευνημένη και v απόγονος u στο δέντρο.
- Ακμές διασταύρωσης:
  - Εξερεύνηση (u, v) όταν v εξερευνημένη και v **όχι** απόγονος u στο δέντρο.



Παράδειγμα

- DFS σε μη-κατευθ. γράφημα παράγει μόνο ακμές δέντρου και πίσω ακμές.
  - Ακμή {v, u} με d[v] < d[u] (πρώτα πρώτη επίσκεψη σε v).
  - Πρώτα v ΥΕ, μετά u ΥΕ, μετά u Εξερ, τέλος v Εξερ.
  - Αν κατεύθυνση (v, u) εξερευνήθηκε πρώτη, τότε {v, u} ακμή δέντρου.
  - Αν κατεύθυνση (u, v) εξερευνήθηκε πρώτη, τότε {v, u} πίσω ακμή.



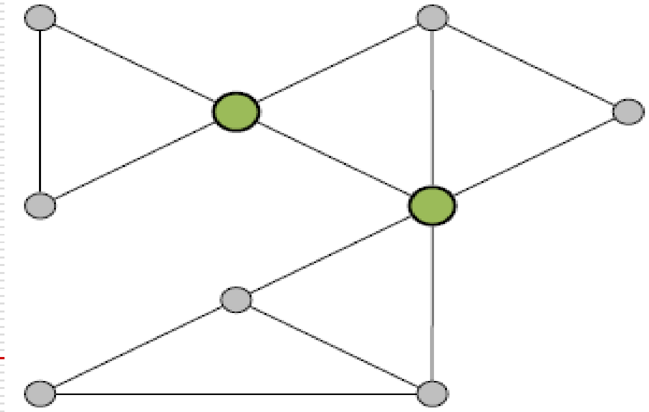
Μερικές Ιδιότητες

- Για μη-κατευθυνόμενα γραφήματα, DFS υπολογίζει συνεκτικές συνιστώσες (όπως και BFS).
- Αν v απόγονος u στο DFS-δάσος, $[d[v], f[v]] \subset [d[u], f[u]]$
  Αν v όχι απόγονος u στο DFS-δάσος, $[d[v], f[v]] \cap [d[u], f[u]] = \emptyset$
- Γράφημα ακυκλικό ανν DFS δεν παράγει πίσω ακμές.
  - Εξερεύνηση πίσω ακμής (u, v) όταν v ΥΕ $\Rightarrow$
    Μονοπάτι v $\rightarrow$ u και ακμή (u, v) $\Rightarrow$ κύκλος.
  - Έστω κύκλος C, v πρώτη κορυφή C που τίθεται ΥΕ,
    και (u, v) ακμή C που εισέρχεται στην v.
  - u απόγονος της v στο DFS-δάσος γιατί:
    - Υπάρχει v $\rightarrow$ u μονοπάτι.
    - Όλες οι άλλες κορυφές του C είναι Α όταν v γίνεται ΥΕ.
  - Άρα (u, v) πίσω ακμή.

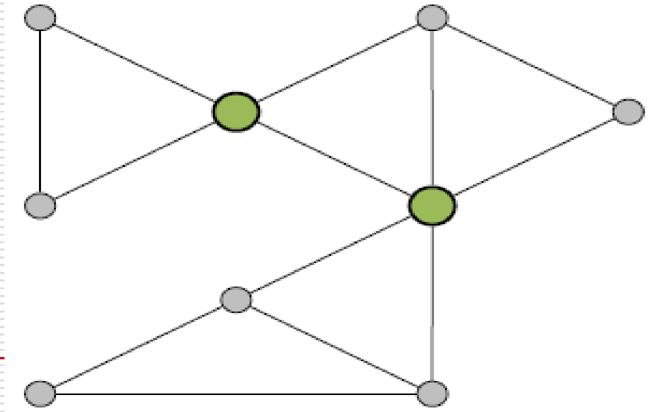
Εφαρμογές

- «Χρόνοι» πρώτης επίσκεψης και αναχώρησης δίνουν πληροφορίες για δομή γραφήματος:
  - Σημεία κοπής και γέφυρες σε μη-κατευθυνόμενα γραφήματα.
  - Τοπολογική διάταξη σε Directed Acyclic Graphs (DAGs).
  - Ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες σε κατευθυνόμενα γραφήματα.

Σημεία Κοπής



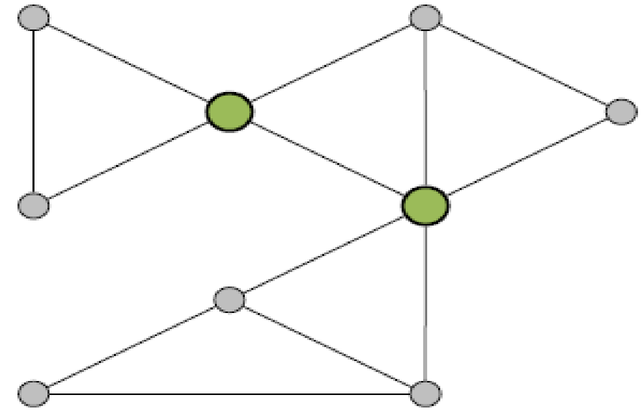
- Σημείο κοπής v (cut vertex, articulation point) μη κατευθυνόμενου γραφήματος G(V, E): αφαίρεση v αυξάνει πλήθος συνεκτικών συνιστωσών του G.
  - Ρίζα s DFS-δέντρου T είναι σημείο κοπής ανν s έχει 2 ή περισσότερα παιδιά στο T.
    - Δεν υπάρχουν ακμές διασταύρωσης: όλα τα μονοπάτια από ένα υποδέντρο στο άλλο διέρχονται μέσω s.
  - Κορυφή v (≠ s) είναι σημείο κοπής ανν υπάρχει απόγονος u της v στο T τ.ω. όλα u – s μονοπάτια στο G διέρχονται από v.
  - Κορυφή v (≠ s) **δεν** είναι σημείο κοπής ανν κάθε απόγονος u της v στο T μπορεί να «παρακάμψει» v (μέσω πίσω ακμής).
    - … ανν από κάθε υποδέντρο με ρίζα παιδί της v έχει πίσω ακμή που καταλήγει σε πρόγονο της v.



Σημεία Κοπής

- Κορυφή v (≠ s) είναι σημείο κοπής ανν έχει απόγονο u στο T τ.ω. όλα u – s μονοπάτια στο G διέρχονται από v.
  - … ανν v έχει παιδί u τ.ω. η u και οι απόγονοι u **δεν** έχουν πίσω ακμή προς πρόγονο της v.
- low(v): χαμηλότερο βάθος ενός γείτονα κάποιας κορυφής απόγονου της v στο DFS δέντρο T.
  - Αν v φύλλο στο T:
    low(v) = min{ depth(v), min{ depth(u): (v, u) πίσω ακμή }
  - Διαφορετικά:
    low(v) = min{ depth(v), min{ depth(u): (v, u) πίσω ακμή },
    min{ depth(u): w απόγονος v, (w, u) πίσω ακμή }}
    (το 3^o είναι το ελάχιστο low value παιδιών της v)
  - Υπολογισμός σε γραμμικό χρόνο (μικρή τροποποίηση DFS)

Σημεία Κοπής



Procedure FindArtPoints(v, d)

  Set $\mathrm{vis}(v) :=$ Ture, $\mathrm{depth}(v) := d$, and $\mathrm{low}(v) := d$.

  For Each $u \in N(v)$ with

    If $\mathrm{vis}(v) = \mathrm{False}$ **Then**

      FindArtPoints(u, $d + 1$)

    $\mathrm{low}(v) := \min\{\mathrm{low}(v), \mathrm{low}(u)\}$

    If $\mathrm{low}(u) \geq \mathrm{depth}(v)$ **Then**

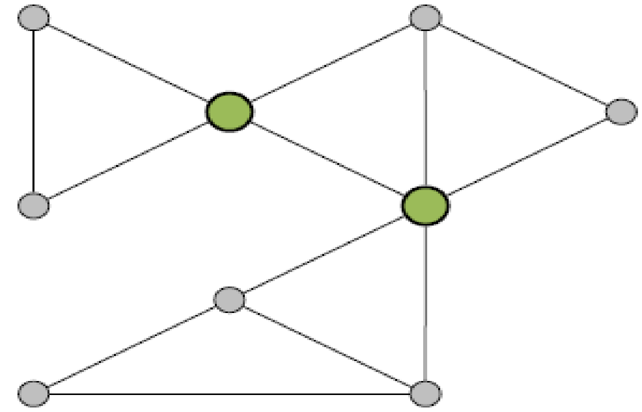
      v is articulation point.

Theorem

A vertex v is an articulation point if and only if v has a child u with $\mathrm{low}(u) \geq \mathrm{depth}(v)$.

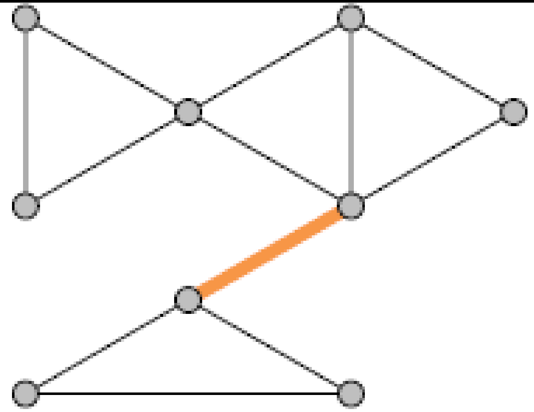
Theorem

The root r is an articulation point if and only if it has at least two children in the DFS-tree.



Σημεία Κοπής

- Σημεία κοπής μη κατευθυνόμενου γραφήματος G(V, E):
  - Ρίζα s στο DFS δέντρο ανν έχει ≥ 2 παιδιά.
  - Κάθε άλλη κορυφή v που έχει παιδί u με low(u) ≥ d(v)
- Υπολογισμός δισυνεκτικών συνιστωσών σε γραμμικό χρόνο.
  - Δισυνεκτική συνιστώσα: μεγιστικό (επαγόμενο) υπογράφημα που δεν περιέχει σημείο κοπής.
  - Αν v σημείο κοπής τ.ω. το υποδέντρο T_v (στο DFS δέντρο) δεν περιέχει άλλο σημείο κοπής, τότε οι κορυφές του T_v ορίζουν δισυνεκτική συνιστώσα.



Γέφυρες

- Ακμή e (μη κατευθυνόμενου γραφήματος) είναι γέφυρα αν αφαίρεση e αυξάνει πλήθος συνεκτικών συνιστωσών
  - Ακμή e είναι γέφυρα ανν e **δεν** ανήκει σε κύκλο.
  - Ακμή e είναι γέφυρα ανν e (και τα άκρα της) αποτελούν δισυνεκτική συνιστώσα.
  - Μόνο ακμές στο DFS δέντρο μπορούν να είναι γέφυρες (απαραίτητες για συνεκτικότητα).
  - Ακμή e = {v, u} (v πατέρας u στο DFS δέντρο) είναι γέφυρα ανν low(u) > d(v).

Τοπολογική Διάταξη

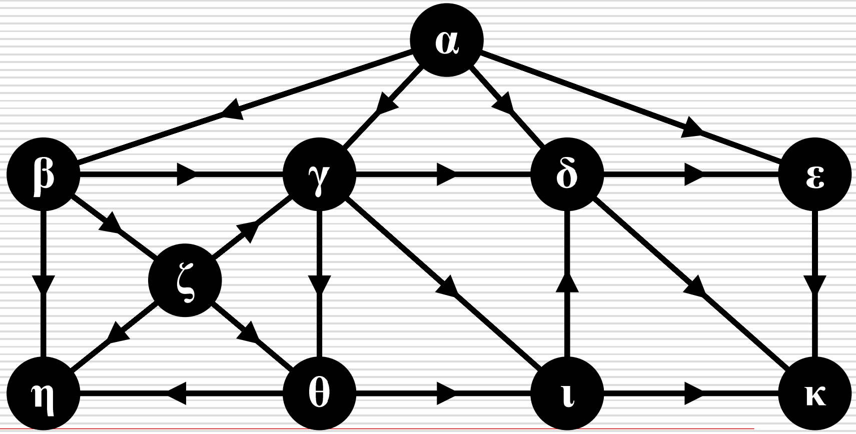
- DAG (Directed Acyclic Graph) αντιστοιχεί σε σχέση μερικής διάταξης:
  - Ακμή (u, v) ⇔ u ≤ v (δηλ. u «προηγείται» v).
  - Σειρά υπολογισμού αλγεβρικών παραστάσεων, π.χ.

$$(ac)x^2 + [(a+c)(b+d) - ac - bd]x + bd$$

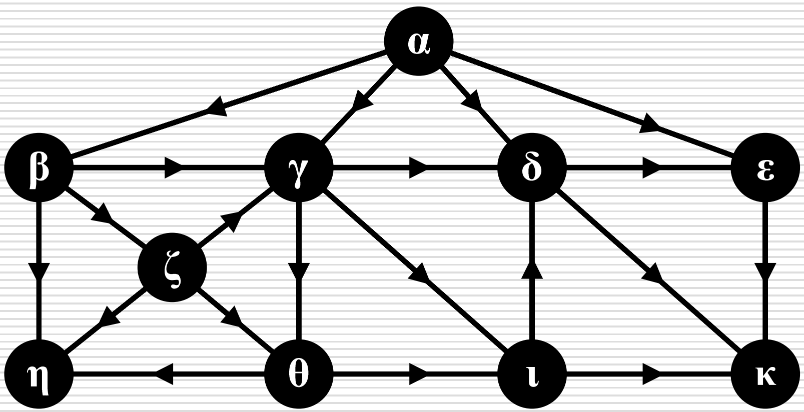
  - Προγραμματισμός εργασιών σε σύνθετα έργα.
- Ύπαρξη κύκλου δεν συνάδει με «διάταξη», έστω μερική.
- DFS ελέγχει για ύπαρξη κύκλων και υπολογίζει «σειρά» κορυφών **συμβατή** με μερική διάταξη του DAG.
  - Τοπολογική διάταξη.

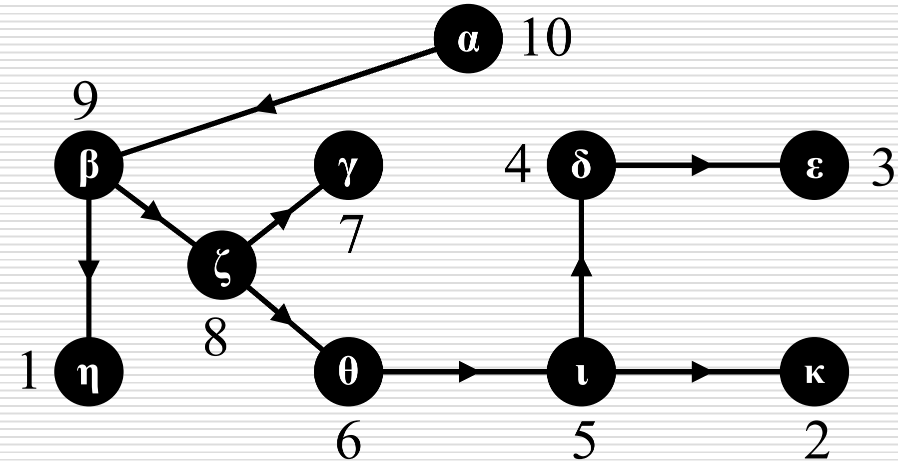
Τοπολογική Ταξινόμηση

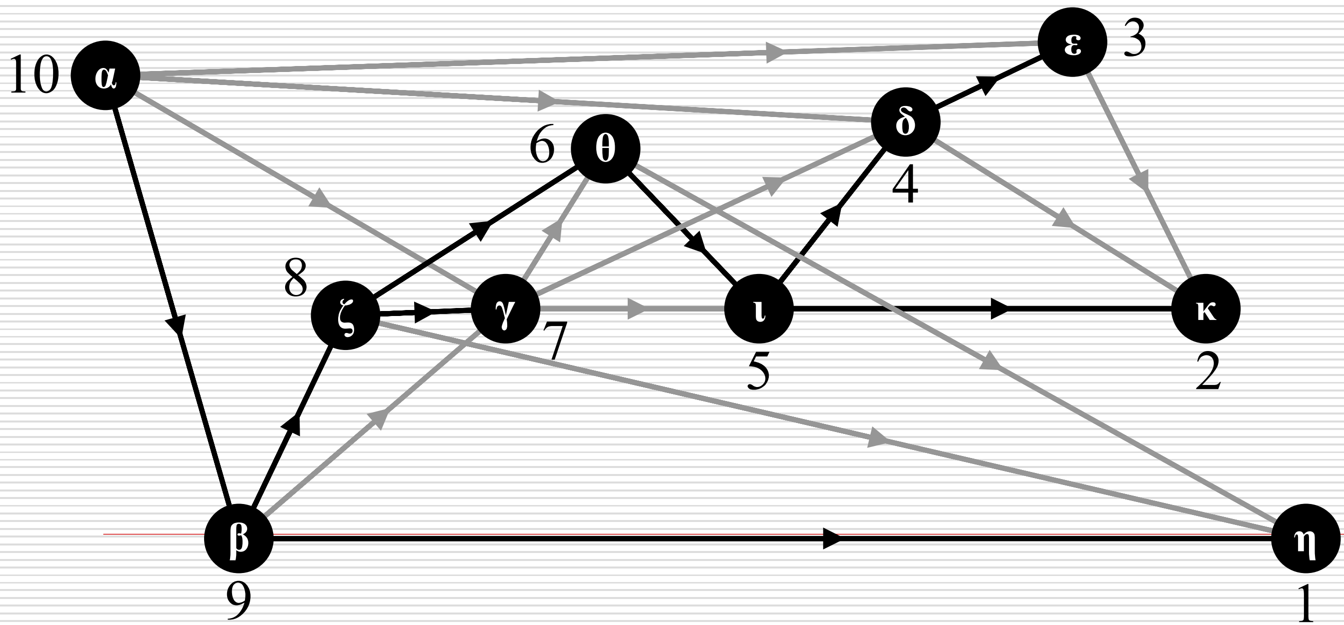
- ... μετάθεση π κορυφών κατευθυνόμενου G(V, E) ώστε
$$\forall (u, v) \in E\,,\; \pi(u) < \pi(v)$$
  - Δηλ. κορυφές σε ευθεία ώστε όλες οι ακμές να έχουν φορά από αριστερά προς τα δεξιά.
- Τοπολογική διάταξη ανν γράφημα ακυκλικό (DAG).
  - Κορυφές σε φθίνουσα σειρά χρόνων αναχώρησης του DFS, δηλ. $f[v_1] > f[v_2] > \cdots > f[v_n]$
  - Υλοποίηση με στοίβα: Εξερευνημένη κορυφή μπαίνει στην ουρά.
  - Σειρά στην ουρά αντιστοιχεί σε τοπολογική διάταξη.
  - Χρόνος Θ(n+m).



Παράδειγμα

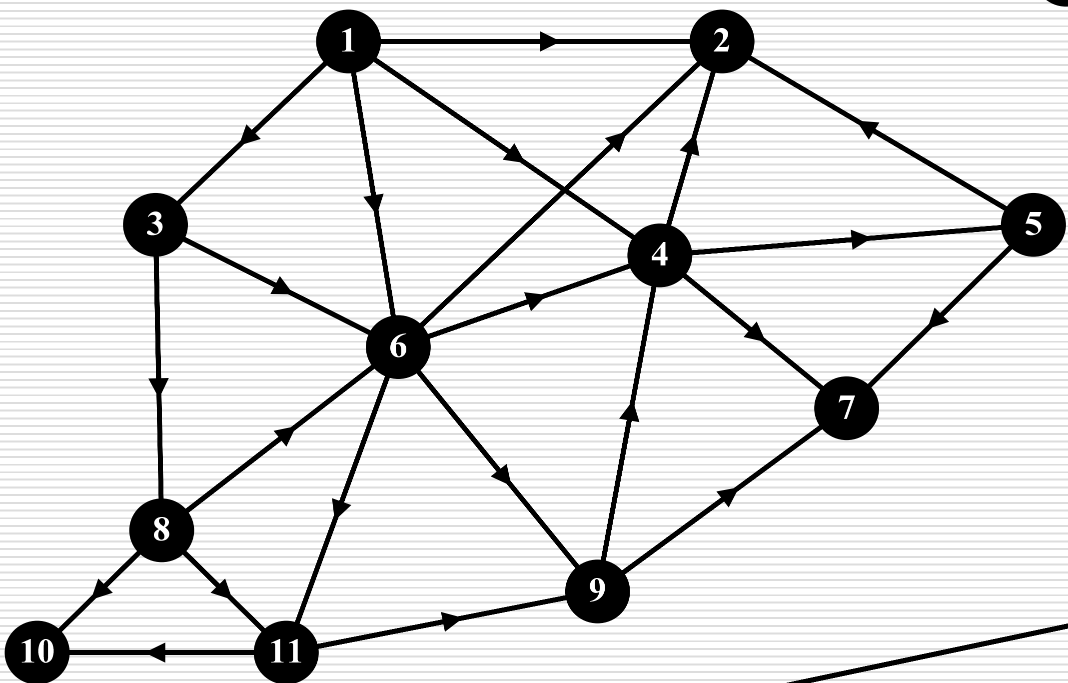


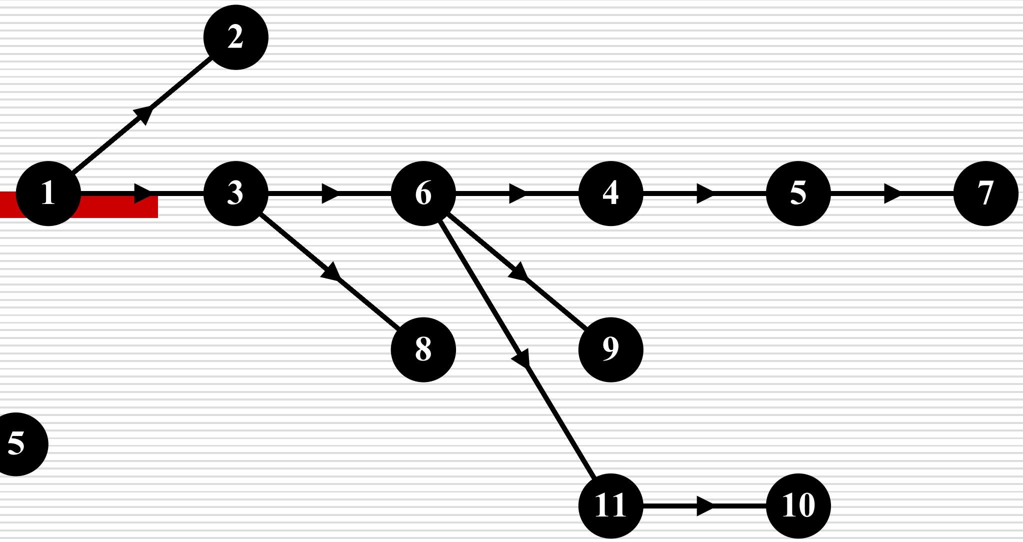


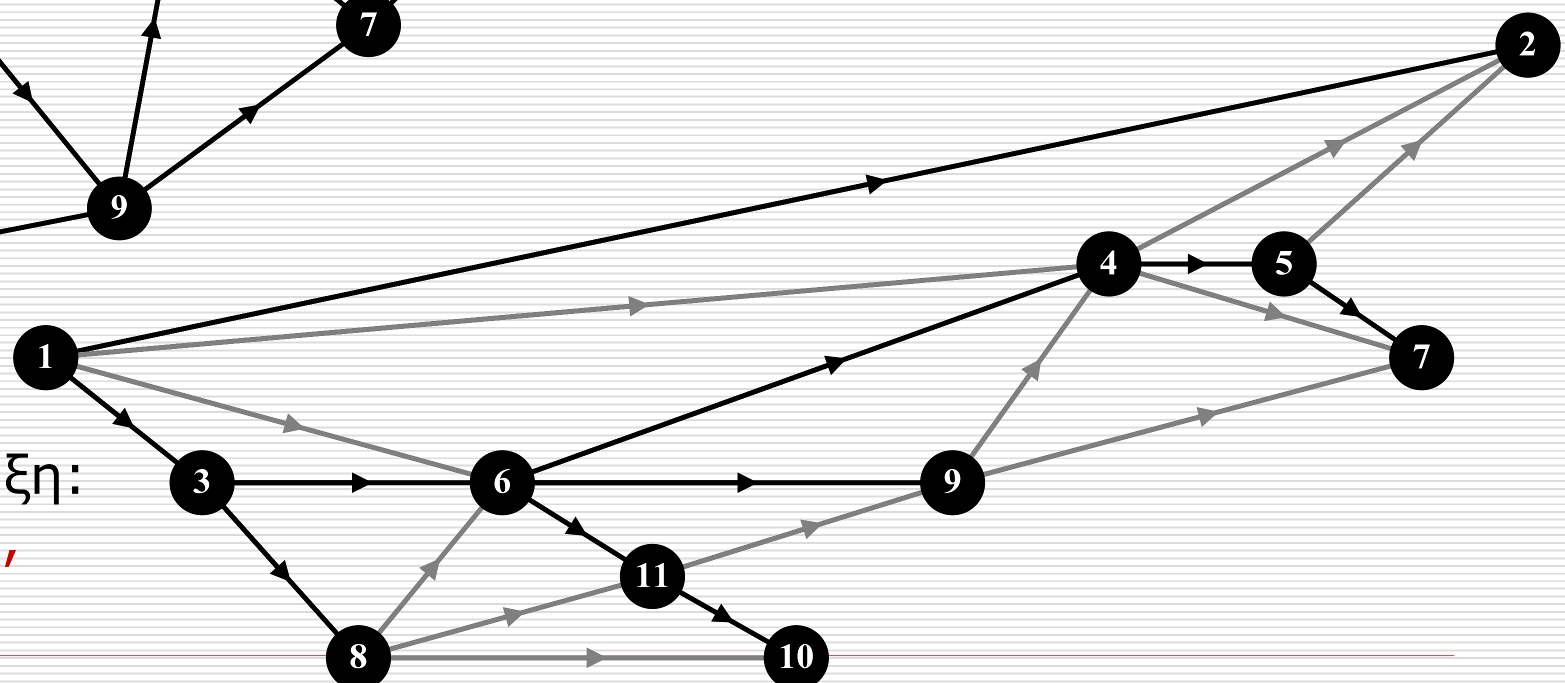


Τοπολογική διάταξη:
α, β, ζ, γ, θ, ι, δ, ε, κ, η

Παράδειγμα







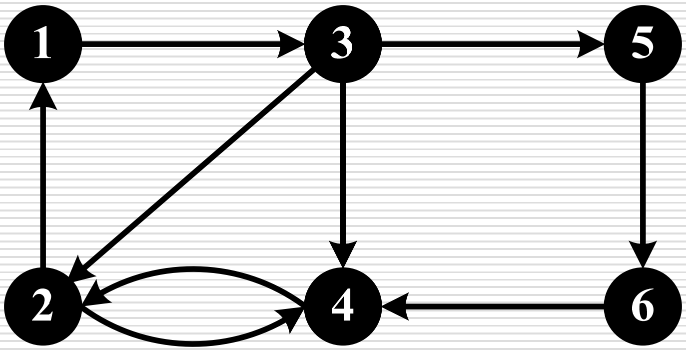
Τοπολογική διάταξη:
1, 3, 8, 6, 11, 10, 9, 4, 5, 7, 2

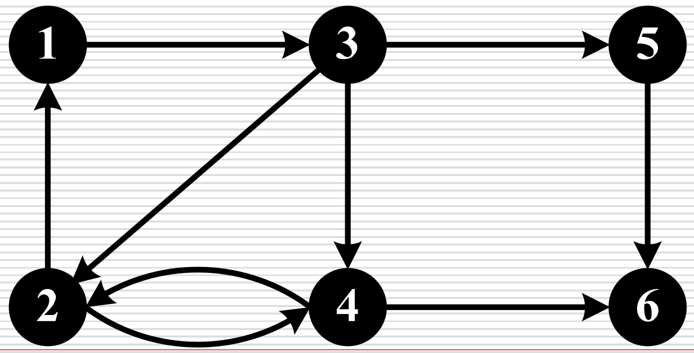
Τοπολογική Ταξινόμηση: Ορθότητα

- Έστω DAG G(V, E). Θδο $\forall (u, v) \in E$, f[u] > f[v].
  - Εξερεύνηση (u, v) συμβαίνει όταν u ΥΕ και v Ανεξ. ή Εξερ.
    - Αν v ΥΕ, τότε (u, v) πίσω ακμή $\Rightarrow$ κύκλος!
  - Αν v Εξερ., τότε εξερεύνηση της v ολοκληρώθηκε πριν ολοκληρωθεί εξερεύνηση u, άρα f[u] > f[v].
  - Αν v Ανεξ., τότε v απόγονος της u στο DFS-δάσος.
    - Άρα f[u] > f[v], γιατί πρώτα τίθεται f[v] και μετά f[u].
- Έστω σύστημα με n (πραγματικές) μεταβλητές $x_1, \ldots, x_n$ και m περιορισμούς της μορφής $x_i < x_j$.
  - Αλγόριθμος με χ.ε. O(n+m) που υπολογίζει μια λύση του συστήματος ή αποφαίνεται ότι το σύστημα δεν έχει λύση;

Ισχυρά Συνεκτικές Συνιστώσες

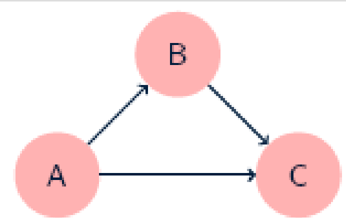
- Κατευθυνόμενο γράφημα G(V, E) **ισχυρά συνεκτικό** αν $\forall u, v \in V$, υπάρχουν u – v και v – u μονοπάτια.
  - Για κάθε ζευγάρι κορυφών ισχυρά συνεκτικού γραφήματος, υπάρχει κυκλική διαδρομή που τις περιλαμβάνει.
- Αν ένα κατευθυνόμενο γράφημα δεν είναι ισχυρά συνεκτικό, διαμερίζεται σε ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες:
  - Μεγιστικά ισχυρά συνεκτικά υπογραφήματα.
  - «Υπάρχουν μονοπάτια u – v και v – u»: σχέση ισοδυναμίας.

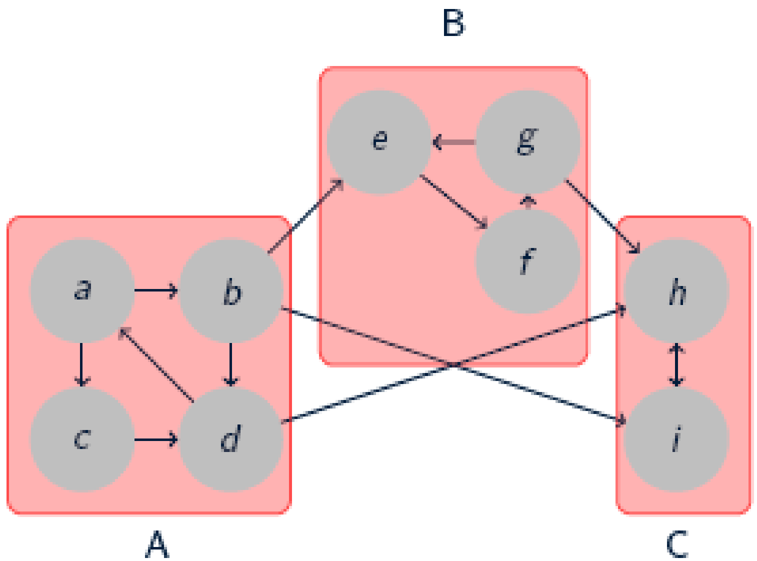




Ισχυρά Συνεκτικές Συνιστώσες

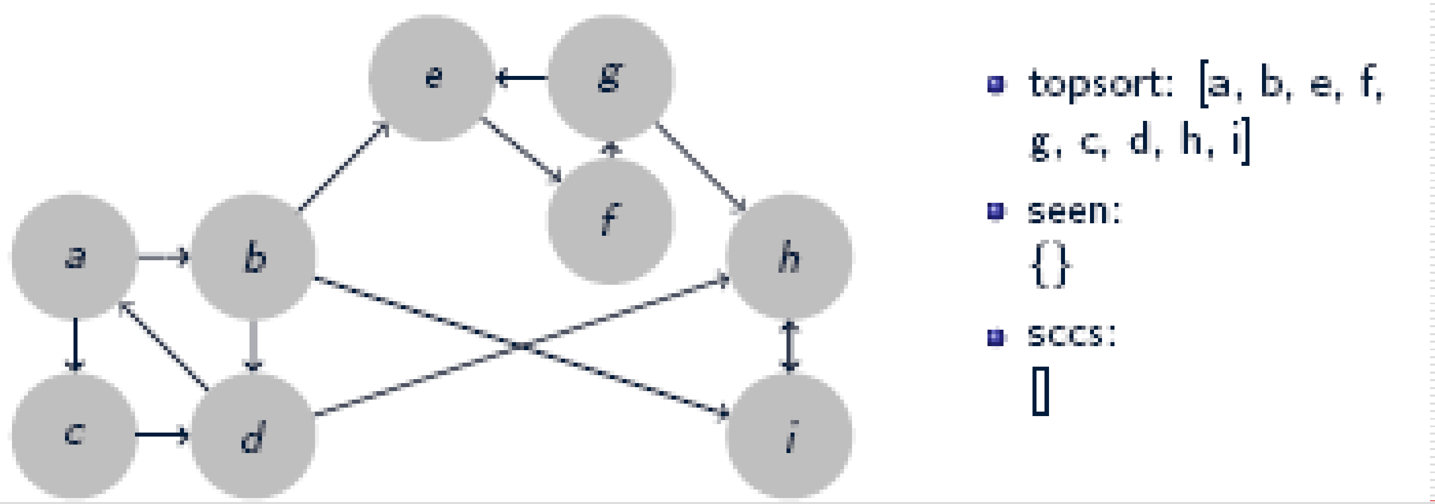
- (Κατευθυνόμενο) γράφημα ισχυρά συνεκτικών συνιστωσών έχει κορυφή για κάθε ΙΣΣ και ακμή (x, y) από ΙΣΣ x προς ΙΣΣ y ανν (αρχικά) υπάρχει ακμή (v, u) για $v \in x$ και $u \in y$.
  - Γράφημα ΙΣΣ είναι **ακυκλικό** (DAG) και μπορεί να ταξινομηθεί τοπολογικά.
  - Τι θα συμβεί αν ξεκινήσουμε DFS από καταβόθρα (τελευταία κορυφή στην τοπολογική διάταξη) του DAG των ΙΣΣ;





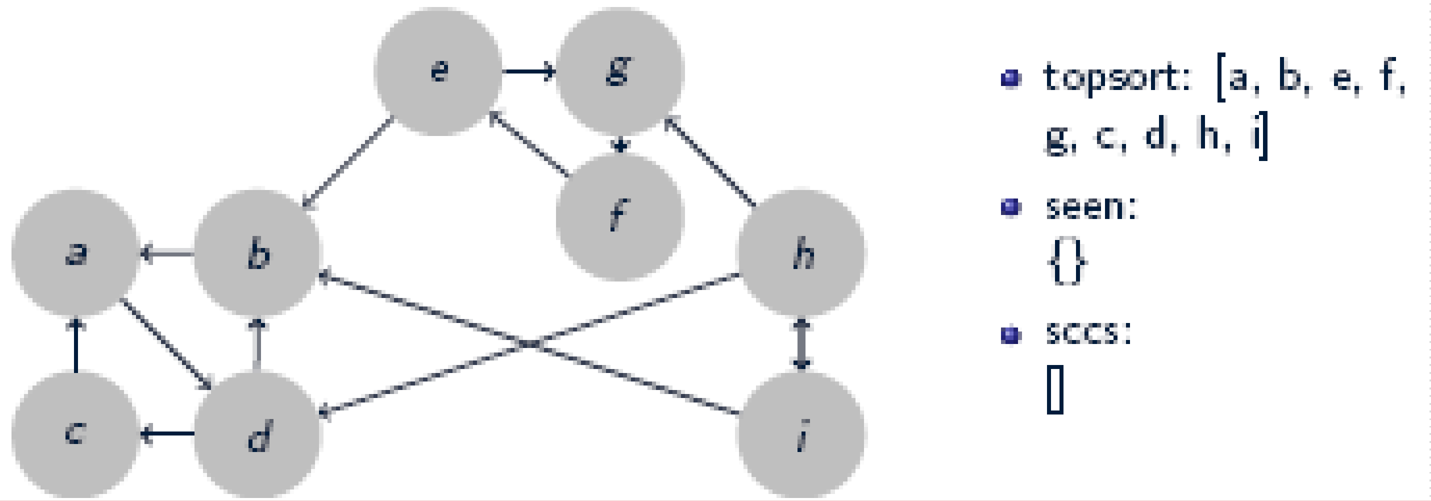
Υπολογισμός Ισχυρά Συνεκτικών Συνιστωσών

- Αλγόριθμος Kosaraju σε κατευθυνόμενο G(V, E):
  - **Υπολόγισε** τοπολογική διάταξη με DFS (αγνοώντας τις πίσω ακμές).
  - Υπολόγισε το ανάστροφο γράφημα G^T (αντιστροφή κατεύθυνσης ακμών, G και G^T έχουν ίδιες ΙΣΣ).



Υπολογισμός Ισχυρά Συνεκτικών Συνιστωσών

- Αλγόριθμος Kosaraju σε κατευθυνόμενο G(V, E):
  - Υπολόγισε τοπολογική διάταξη με DFS (αγνοώντας τις πίσω ακμές).
  - **Υπολόγισε** το ανάστροφο γράφημα G^T (αντιστροφή κατεύθυνσης ακμών, G και G^T έχουν ίδιες ΙΣΣ).
  - Εφάρμοσε DFS σε G^T με σειρά της τοπολογικής διάταξης.
    - Κάθε φορά που φτάνουμε σε αδιέξοδο: νέα ΙΣΣ.



Υπολογισμός Ισχυρά Συνεκτικών Συνιστωσών

- Υπολόγισε τοπολογική διάταξη με DFS (αγνοώντας τις πίσω ακμές).
- Υπολόγισε το ανάστροφο γράφημα G^T (αντιστροφή κατεύθυνσης ακμών, G και G^T έχουν ίδιες ΙΣΣ).
- **Εφάρμοσε** DFS σε G^T με σειρά της τοπολογικής διάταξης.
  - Κάθε φορά που φτάνουμε σε αδιέξοδο: νέα ΙΣΣ.