

Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο

Δημήτρης Φωτάκης

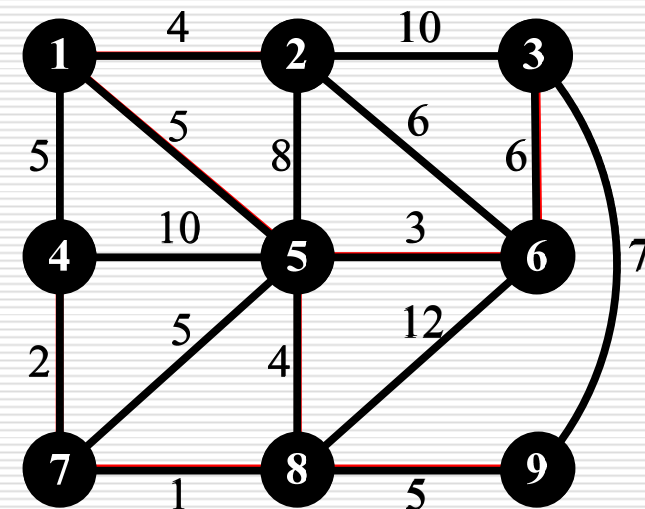
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο (MST)

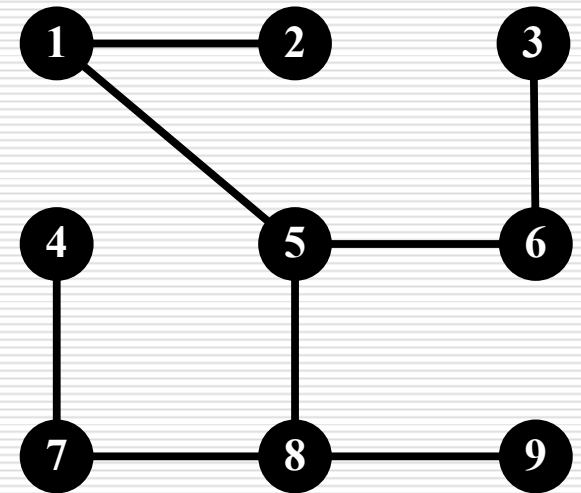
- Συνεκτικό μη-κατευθ. $G(V, E, w)$ με βάρη $w : E \mapsto \mathbb{R}_{>0}$
 - Βάρος υπογραφήματος $T(V, E_T): w(T) = \sum_{e \in E_T} w(e)$
- Ζητούμενο: ελάχιστου βάρους **συνεκτικό** υπογράφημα που **καλύπτει** όλες τις κορυφές.
 - Συνεκτικό (εξ' ορισμού) + ακυκλικό (ελάχιστο) \Rightarrow **Δέντρο**.
 - **Minimum Spanning Tree** (MST, ΕΣΔ).
- Πρόβλημα συνδυαστ. βελτιστοποίησης με **πολλές** και **σημαντικές εφαρμογές**.
 - Σχεδιασμός συνδετικού δικτύου (οδικού, τηλεπ/κου, ηλεκτρικού) με ελάχιστο κόστος.



Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο 2

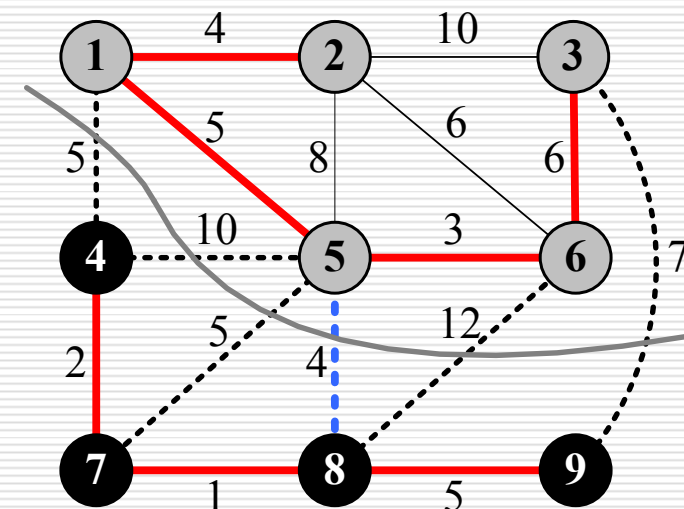
Δέντρα: Βασικές Ιδιότητες

- Δέντρο: **συνεκτικό** και **ακυκλικό** γράφημα.
- Για κάθε απλό μη-κατευθ. γράφημα $T(V, E)$, τα παρακάτω είναι **ισοδύναμα**:
 - T δέντρο.
 - Κάθε ζευγάρι κορυφών ενώνεται με **μοναδικό μονοπάτι**.
 - T συνεκτικό και $|E| = |V| - 1$.
 - T ακυκλικό και $|E| = |V| - 1$.
 - T ελαχιστικά συνεκτικό.
 - T μεγιστικά ακυκλικό.



Τομές, Σύνολα Τομής, και ΕΣΔ

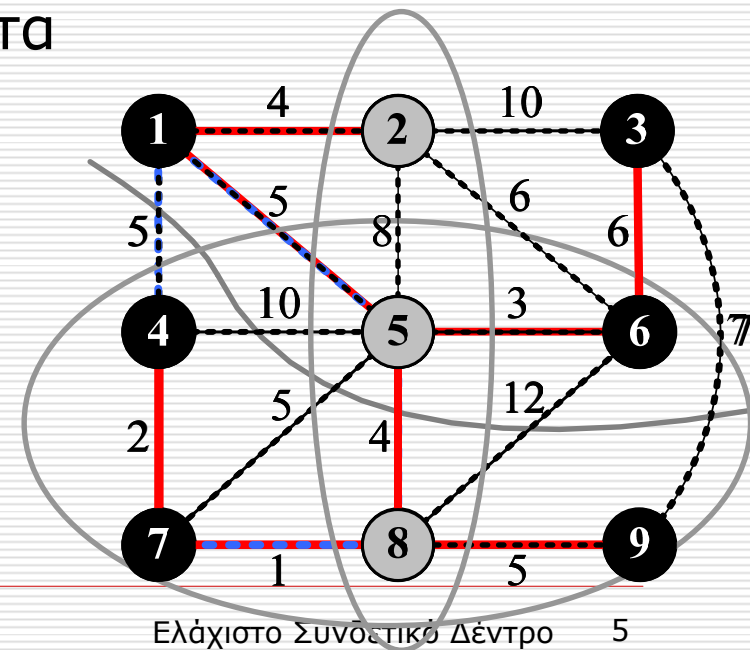
- Τομή $(S, V \setminus S)$: διαμέριση κορυφών σε 2 σύνολα $S, V \setminus S$.
- Σύνολο τομής $\delta(S, V \setminus S)$: ακμές ένα άκρο στο S και άλλο άκρο στο $V \setminus S$.
 - $\delta(S, V \setminus S)$: όλες οι ακμές που **διασχίζουν** τομή $(S, V \setminus S)$.
- Σύνολο ακμών E' **διασχίζει** τομή $(S, V \setminus S)$ αν $E' \cap \delta(S, V \setminus S) \neq \emptyset$.
- (Ε)ΣΔ ορίζεται από σύνολο ακμών (ελάχιστου) βάρους που **διασχίζει όλες τις τομές**.
 - Άπληστη στρατηγική: ενόσω «αγεφύρωτη» τομή, **διέσχισέ την με ακμή ελάχιστου βάρους**.



Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο 4

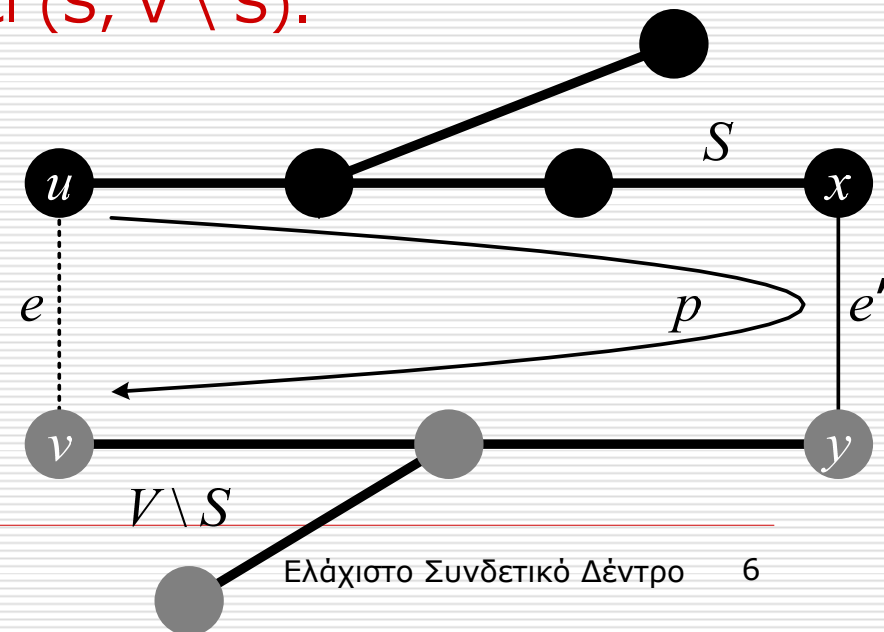
Άπληστος Αλγόριθμος για ΕΣΔ

- Έστω Δ δάσος (σύνολο ακμών χωρίς κύκλους).
- Ακμή $e \notin \Delta$ είναι **ακμή επαύξησης** για Δ αν:
 - e διασχίζει μια τομή $(S, V \setminus S)$ που δεν διασχίζει το Δ , και
 - e είναι ελάχιστου βάρους μεταξύ ακμών $\delta(S, V \setminus S)$.
- Ακμή επαύξησης για δάσος Δ συνιστά **άπληστη επιλογή** που σε $|V|-1$ βήματα οδηγεί σε ΕΣΔ:
 - Αν Δ δάσος και e ακμή επαύξησης Δ , $\Delta \cup \{e\}$ δάσος.
 - e δεν δημιουργεί κύκλο.
 - Αν $\Delta \subset \text{ΕΣΔ}$ και e ακμή επαύξησης Δ , $\Delta \cup \{e\} \subseteq \text{ΕΣΔ}$.



Άπληστη Επιλογή: Ορθότητα

- Έστω δάσος $\Delta \subset \text{ΕΣΔ}$ και $e = \{u, v\}$ **ακμή επαύξησης** Δ . Τότε $\Delta \cup \{e\} \subseteq \text{ΕΣΔ}$.
 - $(S, V \setminus S)$ τομή που δεν διασχίζει Δ και διασχίζει η ακμή e .
 - e ελάχιστου βάρους μεταξύ ακμών του $\delta(S, V \setminus S)$.
 - Έστω $T \in \text{ΕΣΔ}$ τ.ω. $\Delta \subseteq T$. Υποθέτουμε ότι $\Delta \cup \{e\} \not\subseteq T$
 - Έστω p μονοπάτι $u - v$ στο T , και $e' = \{x, y\}$ ακμή T που διασχίζει $(S, V \setminus S)$.
 - Αφού $w(e) \leq w(e')$, και το $T' = (T \cup \{e\}) \setminus \{e'\}$ είναι **ΕΣΔ**:
 $w(T') = w(T) + w(e) - w(e') \leq w(T)$
 - Έχουμε ότι $\Delta \subseteq T$ και $e' \notin \Delta$. Άρα $\Delta \subseteq T \setminus \{e'\} = T' \setminus \{e\}$
 - ... και $\Delta \cup \{e\} \subseteq T'$



Άπληστος Αλγόριθμος για ΕΣΔ

$\text{MST}(G(V, E, w))$

$\Delta \leftarrow \emptyset;$

while $|\Delta| < |V| - 1$ **do**

Υπολόγισε μια **ακμή επαύξησης** e για Δ ;

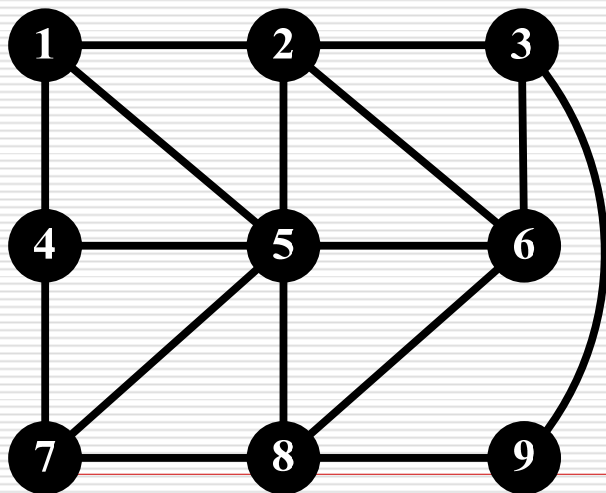
$\Delta \leftarrow \Delta \cup \{e\};$

return(Δ);

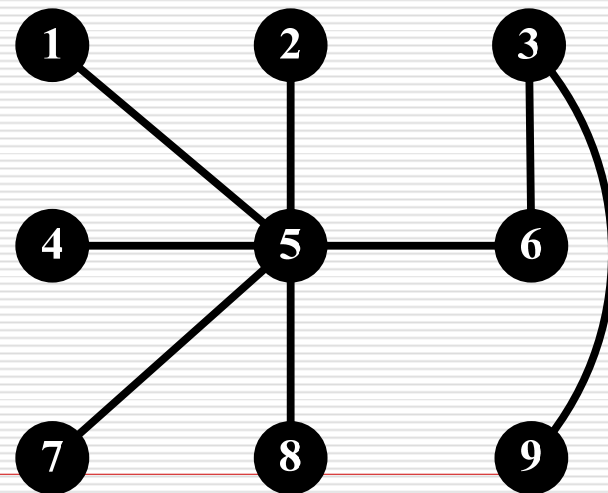
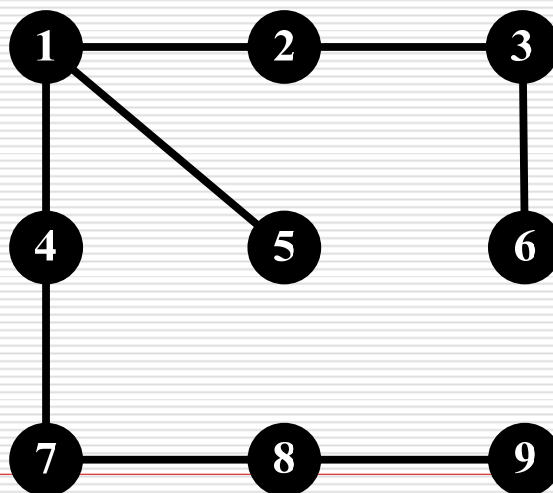
- Αρχικά $\Delta = \emptyset$ **δάσος** και **υποσύνολο** κάθε ΕΣΔ.
- **Επαγωγικά**, e ακμή επαύξησης για Δ :
 - $\Delta \cup \{e\}$ **δάσος** και **υποσύνολο** κάποιου ΕΣΔ.
- Όταν $|\Delta| = |V| - 1$, Δ δέντρο, άρα και **ΕΣΔ**.

Συνδετικά Δέντρα: Ανταλλαξιμότητα Ακμών

- Έστω T και T' συνδετικά δέντρα G . Για κάθε ακμή $e \in T \setminus T'$, υπάρχει ακμή $e' \in T' \setminus T$, τ.ω. $(T'+e) - e'$ είναι συνδετικό δέντρο.
 - Για κάθε e εκτός του T' , το $T'+e$ περιέχει μοναδικό κύκλο C .
 - Αφαιρούμε οποιαδήποτε ακμή e' του C που δεν ανήκει στο T .
 - Υπάρχει τέτοια ακμή e' γιατί κύκλος C δεν σχηματίζεται στο T .
 - Η e' είναι διαφορετική της e γιατί $e \in T$.
 - $(T'+e) - e'$ συνδετικό δέντρο: συνεκτικό, ακυκλικό όλες τις κορυφές.



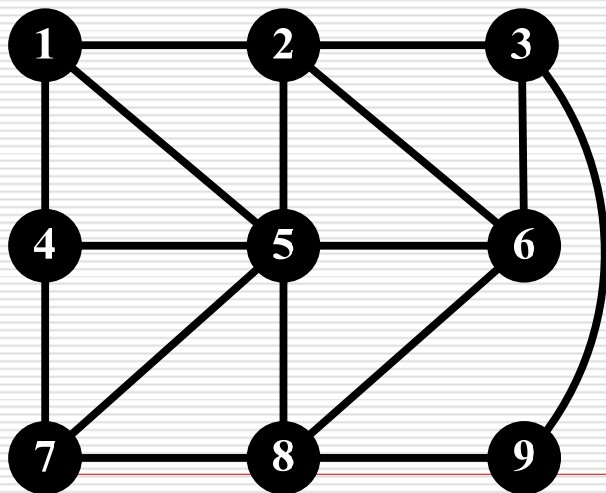
Αλγόριθμοι & Πολυπλοκότητα (Χειμώνας 2020)



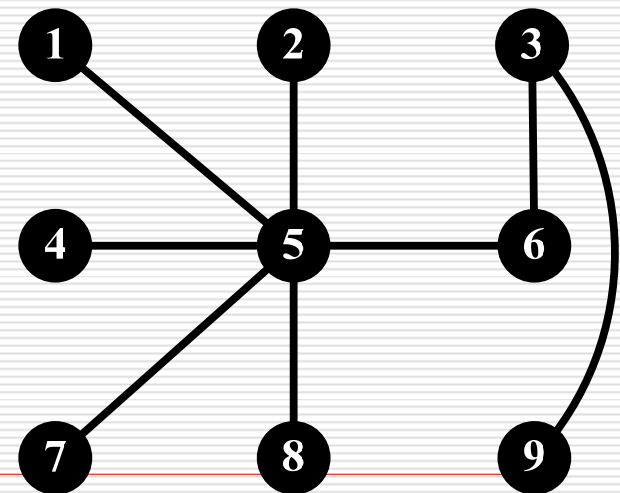
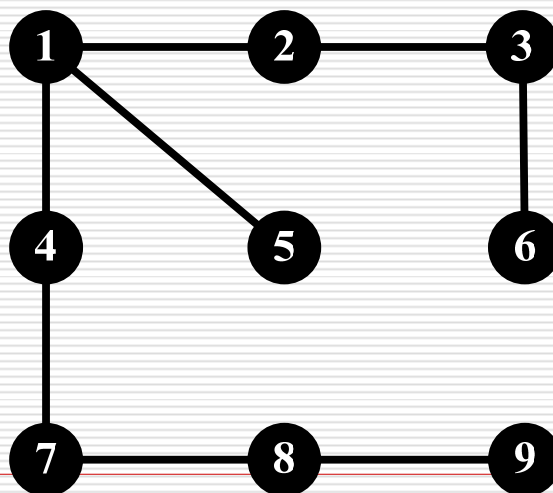
Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο 8

Συνδετικά Δέντρα: Ανταλλαξιμότητα Ακμών

- Έστω T και T' συνδετικά δέντρα G . Για κάθε ακμή $e \in T \setminus T'$, υπάρχει ακμή $e' \in T' \setminus T$, τ.ω. $(T - e) + e'$ είναι συνδετικό δέντρο.
- Από οποιοδήποτε συνδετικό δέντρο T μπορούμε να «μεταβούμε» σε οποιοδήποτε άλλο T' με διαδοχικές «ανταλλαγές» ακμών.
 - Χρειάζονται ακριβώς $|T \setminus T'|$ «ανταλλαγές» ακμών. Από κάθε ανταλλαγή προκύπτει συνδετικό δέντρο.
 - (Διακριτό) σύνολο $\Sigma\Delta$ έχει παρόμοια δομή με (συνεχή) κυρτά σύνολα!



Αλγόριθμοι & Πολυπλοκότητα (Χειμώνας 2020)



Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο 9

Αλγόριθμος Kruskal

MST-Kruskal($G(V, E, w)$)

Ταξινόμηση ακμές σε αύξουσα σειρά βάρους, $w(e_1) \leq \dots \leq w(e_m)$.

$\Delta \leftarrow \emptyset; i \leftarrow 1;$

while $|\Delta| < |V| - 1$ **and** $i \leq m$ **do**

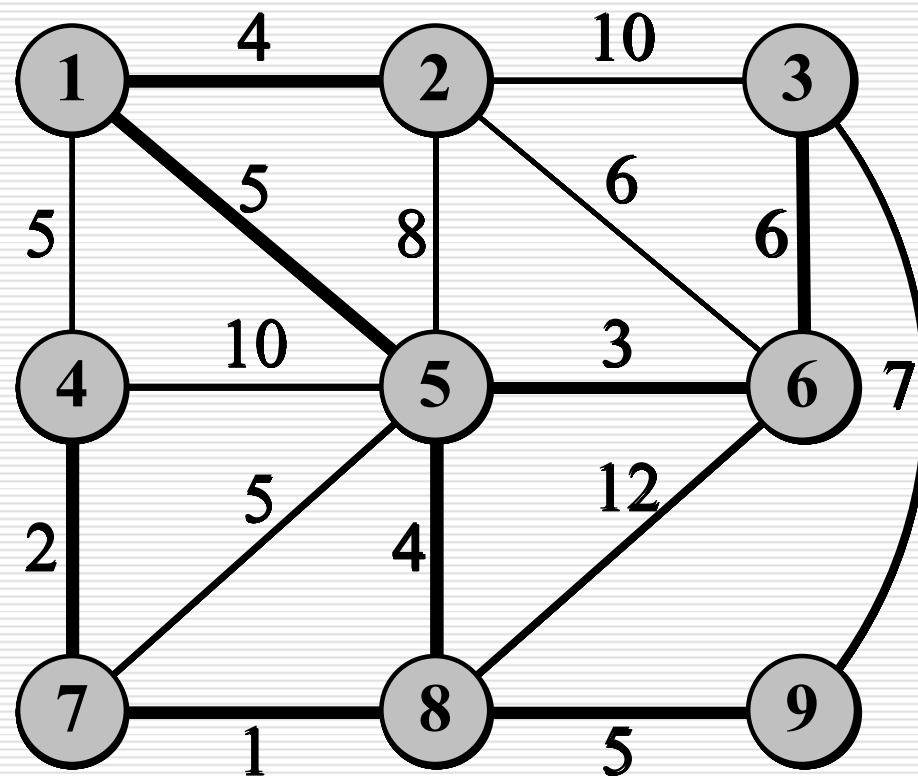
if $\Delta \cup \{e_i\}$ δεν έχει κύκλο **then**

$\Delta \leftarrow \Delta \cup \{e_i\};$

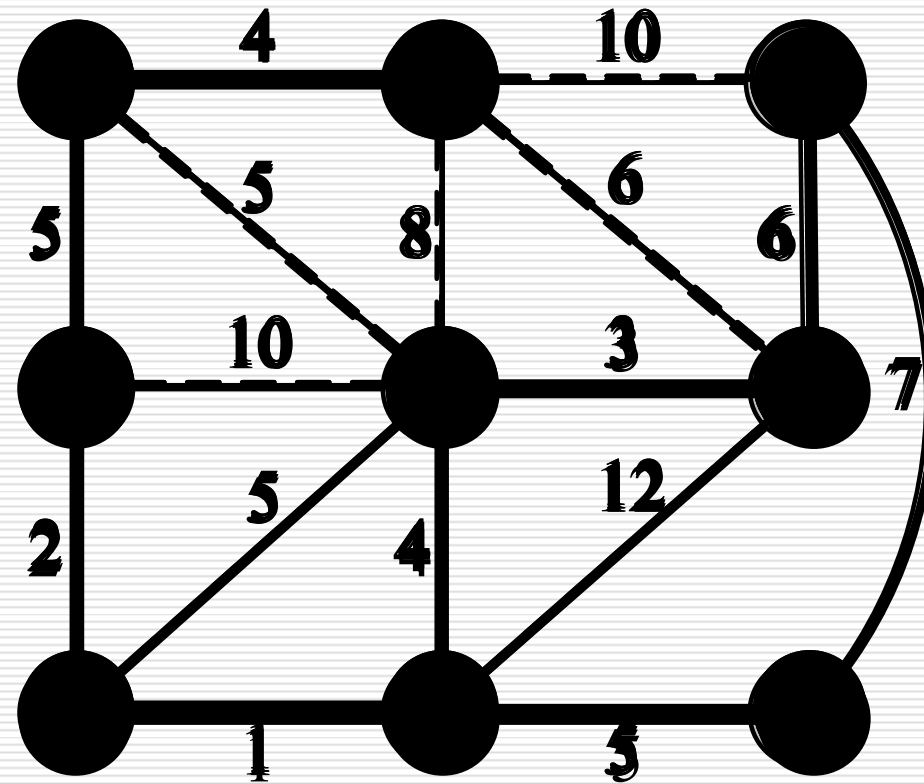
$i \leftarrow i + 1;$

- Υλοποίηση: κύκλος στο $\Delta \cup \{e_i\}$ ελέγχεται με Union-Find.
 - Χρόνος εκτέλεσης: $\Theta(m \log m)$.
- **Ορθότητα:** αν e_i προστεθεί τότε ακμή επαύξησης για Δ :
 - Όχι κύκλος, άρα e_i διασχίζει μια τομή που δεν διασχίζει το Δ .
 - Αύξουσα σειρά βάρους: e_i ελάχιστου βάρους (πρώτη που ελέγχεται) από όσες ακμές διασχίζουν συγκεκριμένη τομή.

Αλγόριθμος Kruskal: Παράδειγμα



Αλγόριθμος Prim: Παράδειγμα



Αλγόριθμος Prim

□ Υλοποίηση:

- Ελάχιστο $c[v]$:
ουρά προτεραιότητας.
- Binary heap:
 $\Theta(m \log n)$
- Fibonacci heap:
 $\Theta(m + n \log n)$

□ Ορθότητα:

- $\{v, p[v]\}$ αποτελεί
ακμή επαύξησης:
 - Διασχίζει τομή $(S, V \setminus S)$.
 - Ελάχιστου βάρους μεταξύ
ακμών του $\delta(S, V \setminus S)$.

MST-Prim($G(V, E, w), s$)

for all $u \in V$ **do**

$c[u] \leftarrow \infty$; $p[u] \leftarrow \text{NULL}$;

$c[s] \leftarrow 0$; $S \leftarrow \emptyset$; $\Delta \leftarrow \emptyset$;

while $|S| < |V|$ **do**

$u \notin S : c[u] = \min_{v \notin S} \{c[v]\}$;

$S \leftarrow S \cup \{u\}$;

for all $v \in \text{AdjList}[u]$ **do**

if $v \notin S$ **and** $w(u, v) < c[v]$ **then**

$c[v] \leftarrow w(u, v)$;

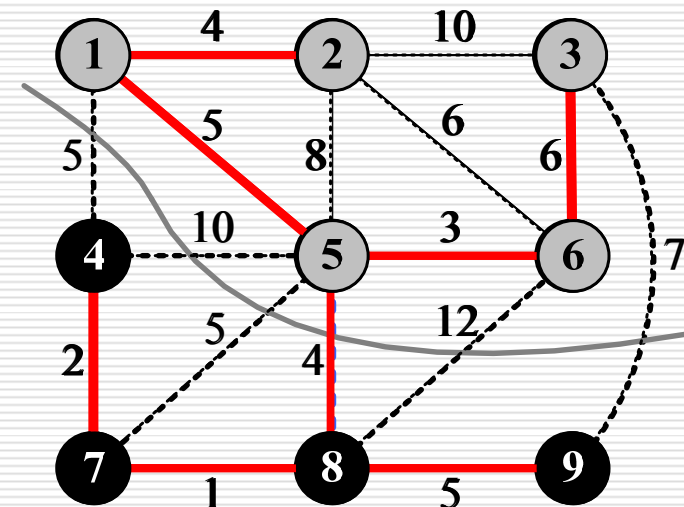
$p[v] \leftarrow u$;

if $p[u] \neq \text{NULL}$ **then**

$\Delta \leftarrow \Delta \cup \{u, p[u]\}$;

Άπληστος Υπολογισμός ΕΣΔ: Ένα Σχόλιο

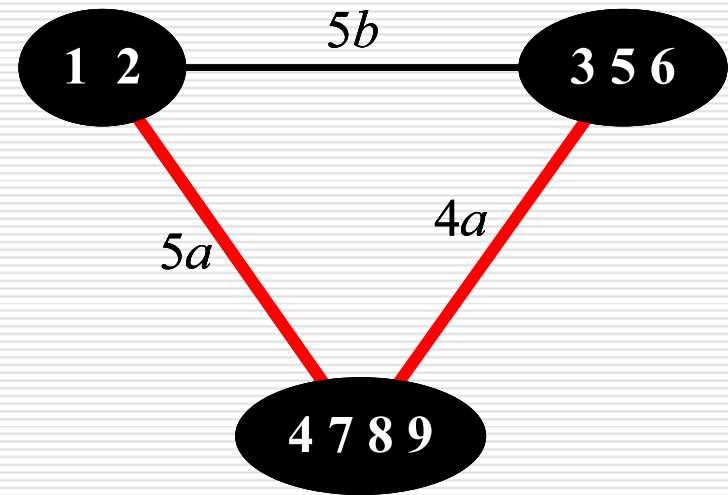
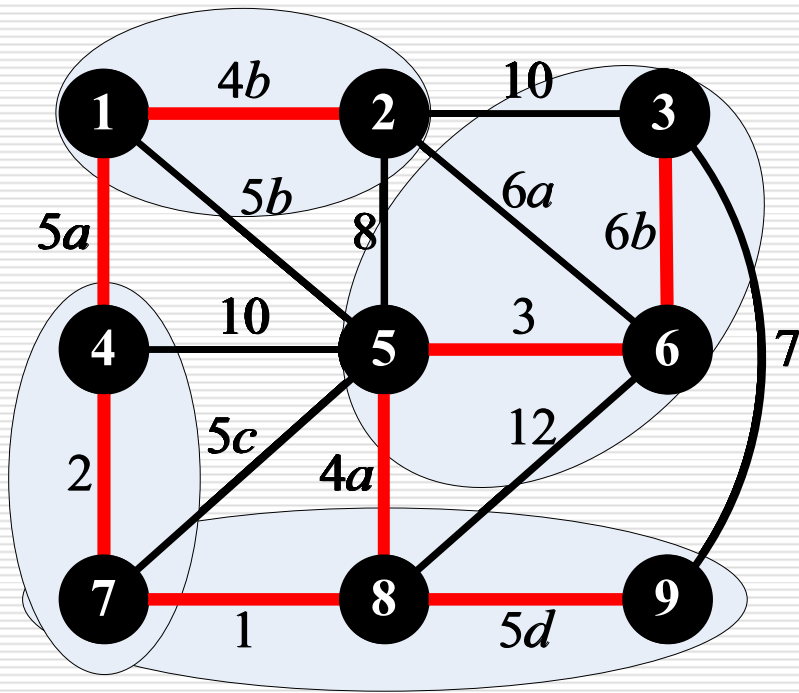
- Έστω $T(V, E_T)$ ΕΣΔ για $G(V, E, w)$.
- Αφαιρώντας ακμή e από E_T προκύπτουν δύο συνεκτικές συνιστώσες, έστω S και $V \setminus S$ αντίστοιχα σύνολα κορυφών.
 - G_S και $G_{V \setminus S}$ αντίστοιχα επαγόμενα υπογραφήματα, και T_S και $T_{V \setminus S}$ αντίστοιχα υποδέντρα.
- Αρχή **βελτιστότητας**:
 - T_S αποτελεί ΕΣΔ για G_S και $T_{V \setminus S}$ αποτελεί ΕΣΔ για $G_{V \setminus S}$.
- Ιδιότητα **άπληστης επιλογής**:
 - e είναι μια ελάχιστου βάρους ακμή που διασχίζει τομή $(S, V \setminus S)$.



Αλγόριθμος Boruvka

- «Παράλληλη» εκδοχή γενικού άπληστου αλγόριθμου.
 - Αρχικά κάθε κορυφή αποτελεί μία συνεκτική συνιστώσα.
 - Φάση: ενόσω #συνεκτικών συνιστωσών > 1 :
 - Κάθε συνεκτική συνιστώσα σ επιλέγει στο ΕΣΔ την **ελαφρύτερη** ακμή με ένα άκρο στο σ (ακμή επαύξησης).
 - Μια ακμή μπορεί να επιλεγεί και από τα δύο άκρα της.
 - Απαραίτητη ολική διάταξη των ακμών (χωρίς ισοπαλίες), διαφορετικά μπορεί να σχηματιστούν κύκλοι.
 - Συνεκτικές συνιστώσες ενημερώνονται με βάση ακμές που επιλέχθηκαν στην τρέχουσα φάση.
- Ολική διάταξη ακμών (χωρίς ισοπαλίες): υπολογίζει ΕΣΔ.
 - Κάθε ακμή που επιλέγεται, αποτελεί ακμή επαύξησης: ελάχιστου βάρους ακμή που διασχίζει μία τομή.
 - Όχι κύκλοι: **μοναδική** ελαφρύτερη ακμή διασχίζει κάθε τομή.

Αλγόριθμος Βορυνκα: Παράδειγμα



Αλγόριθμος Boruvka

- (Ακολουθιακή) υλοποίηση σε $O(m \log n)$.
 - Κάθε φάση σε χρόνο $O(m)$ με δύο περάσματα των ακμών.
 - 1^ο πέρασμα βρίσκει ελαφρύτερη ακμή κάθε συνιστώσας.
 - 2^ο πέρασμα εντάσσει ελαφρύτερες ακμές στο ΕΣΔ και ενημερώνει / συμπύσσει συνιστώσες (π.χ., με BFS/DFS).
 - Σε κάθε φάση, #συνιστωσών μειώνεται στο μισό.
 - #φάσεων = $O(\log n)$.
- Πολλοί σύγχρονοι αλγόριθμοι (σχεδόν) γραμμικού χρόνου βασίζονται σε ιδέα Boruvka.

Κανόνες Σχηματισμού ΕΣΔ

- Ακμή e που για κάποια τομή $(S, V \setminus S)$, αποτελεί **ελάχιστου βάρους ακμή που διασχίζει τομή $(S, V \setminus S)$** :
 - e **ανήκει** σε κάποιο ΕΣΔ.
 - Γρήγορη επιλογή τέτοιων ακμών χωρίς κύκλους, και **ένταξη** σε ΕΣΔ.
- Ακμή e που για κάποιον κύκλο C αποτελεί **μέγιστου βάρους ακμή κύκλου C** :
 - Αν βάρος e **μεγαλύτερο** από βάρος άλλων ακμών του C , e **δεν ανήκει** σε κανένα ΕΣΔ.
 - Αν όλες οι ακμές του C έχουν ίδιο βάρος, e **δεν ανήκει** σε κάποιο ΕΣΔ.
 - Ενόσω υπάρχει κύκλος C , **αποκλεισμός** (μιας) βαρύτερης ακμής C .

Συζήτηση

Deterministic comparison based algorithms.

- $O(m \log n)$ [Jarník, Prim, Dijkstra, Kruskal, Boruvka]
- $O(m \log \log n)$. [Cheriton-Tarjan 1976, Yao 1975]
- $O(m \beta(m, n))$. [Fredman-Tarjan 1987]
- $O(m \log \beta(m, n))$. [Gabow-Galil-Spencer-Tarjan 1986]
- $O(m \alpha(m, n))$. [Chazelle 2000]

Holy grail. $O(m)$.

Notable.

- $O(m)$ randomized. [Karger-Klein-Tarjan 1995]
- $O(m)$ verification. [Dixon-Rauch-Tarjan 1992]

Συζήτηση – Ασκήσεις

- Έστω γράφημα G με διαφορετικά βάρη στις ακμές.
 - Νδο κάθε ΕΣΔ του G περιέχει την ακμή ελάχιστου βάρους.
 - Νδο G έχει μοναδικό ΕΣΔ.
 - Αληθεύει ότι η ακμή μέγιστου βάρους δεν ανήκει στο ΕΣΔ;
- Έστω γράφημα G με κύκλο C .
 - Νδο η ακμή μέγιστου βάρους του C (αν είναι μοναδική) δεν ανήκει σε κανένα ΕΣΔ του G .
- Έστω T ΕΣΔ για γράφημα $G(V, E, w)$.
 - Να δείξετε ότι T παραμένει ΕΣΔ για $G(V, E, w/2)$.
 - Αληθεύει ότι το T παραμένει ΕΣΔ για $G(V, E, w+k)$;

Συζήτηση – Ασκήσεις

- (Ντετερμινιστικός) αλγόριθμος ΕΣΔ με χρόνο εκτέλεσης $O(m \log \log n)$;
- Υπολογισμός ΕΣΔ T υπό περιορισμούς ότι κάποιες ακμές πρέπει να (μην) ανήκουν στο T ;
- Υπολογισμός ΣΔ T με δεύτερο μικρότερο βάρος;
- Bottleneck κόστος ΣΔ T : $b(T) = \max_{e \in T} \{w(e)\}$
 - Υπολογισμός ΣΔ με ελάχιστο bottleneck κόστος;