

# Μηχανές Turing και Υπολογισιμότητα

---

**Δημήτρης Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών  
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



# Θεωρία Υπολογισμού

---

- Γιατί κάποια προβλήματα **δεν λύνονται** από υπολογιστές;
- **Hilbert** (1900): **πληρότητα** και **αυτοματοποίηση** των μαθηματικών.
  - 10<sup>ο</sup> πρόβλημα: Αλγόριθμος για **Διοφαντικές εξισώσεις**.
- Αλγόριθμος: **διατύπωση** και απόδειξη ορθότητας.
- Δεν υπάρχει αλγόριθμος;
  - **Ορισμός** «αλγόριθμου» μέσω **υπολογιστικού μοντέλου**, και απόδειξη ότι **ύπαρξη αλγόριθμου οδηγεί σε αντίφαση**.
- **Gödel**: μαθηματικά **δεν είναι πλήρη!**
- **Turing**: μαθηματικά **δεν αυτοματοποιούνται!**
  - Υπάρχουν προβλήματα που δεν είναι υπολογίσιμα.
- **Matijasevic** (1970): Όχι αλγόριθμος για Διοφαντικές εξισώσεις.
  - Για κάθε αλγ.  $A$ , υπάρχει εξίσωση που ο  $A$  απαντά λάθος!

# Υπολογιστικό Πρόβλημα και Αλγόριθμος

---

- (Υπολογιστικό) πρόβλημα: ορίζει μετασχηματισμό δεδομένων εισόδου σε δεδομένα εξόδου.
  - Διαισθητικά: ορίζεται από **ερώτηση** για **στιγμιότυπα εισόδου**.
- **Στιγμιότυπο**: αντικείμενο που αντιστοιχεί σε δεδομένα εισόδου.
  - Διατυπώνουμε **ερώτηση** και περιμένουμε **απάντηση**.
  - Άπειρο σύνολο στιγμιότυπων.
- Αλγόριθμος (Μηχανή Turing): **σαφώς** ορισμένη διαδικασία για την **επίλυση** προβλήματος σε **πεπερασμένο** χρόνο από υπολογιστική **μηχανή**.
  - Υπολογίζει **μηχανιστικά** την **σωστή απάντηση** σε **πεπερασμένο χρόνο**.

# Προβλήματα Βελτιστοποίησης

---

- Πρόβλημα βελτιστοποίησης  $\Pi$ :
  - Σύνολο στιγμιότυπων  $\Sigma_{\Pi}$
  - Σύνολο αποδεκτών λύσεων:  $\forall \sigma \in \Sigma_{\Pi}, \Lambda_{\Pi}(\sigma)$
  - Αντικειμενική συνάρτηση:  $\forall \sigma \in \Sigma_{\Pi}, f_{\sigma} : \Lambda_{\Pi}(\sigma) \mapsto \mathbb{R}$
- Δεδομένου στιγμιότυπου  $\sigma$ , ζητείται  $\lambda_{\sigma}^* \in \Lambda_{\Pi}(\sigma)$ :
  - $\forall \lambda \in \Lambda_{\Pi}(\sigma), f_{\sigma}(\lambda_{\sigma}^*) \geq f_{\sigma}(\lambda)$  πρόβλημα **μεγιστοποίησης**
  - $\forall \lambda \in \Lambda_{\Pi}(\sigma), f_{\sigma}(\lambda_{\sigma}^*) \leq f_{\sigma}(\lambda)$  πρόβλημα **ελαχιστοποίησης**
  - $\lambda_{\sigma}^*$  βέλτιστη λύση και  $f_{\sigma}(\lambda_{\sigma}^*)$  βέλτιστη αντικειμενική τιμή**

# Προβλήματα Απόφασης

---

- Πρόβλημα απόφασης  $\Pi$ :
  - Σύνολο στιγμιότυπων  $\Sigma_{\Pi}$
  - Σύνολο (αποδεκτών) λύσεων:  $\forall \sigma \in \Sigma_{\Pi}, \Lambda_{\Pi}(\sigma)$
  - Δεδομένου  $\sigma \in \Sigma_{\Pi}, \Lambda_{\Pi}(\sigma) \neq \emptyset$ ;
- Επιδέχεται μόνο δύο απαντήσεις: **ΝΑΙ ή ΌΧΙ.**

# Παραδείγματα Προβλημάτων

---

## □ Πρόβλημα Προσπελασιμότητας:

- **Στιγμιότυπο:** Κατευθυνόμενο γράφημα  $G(V, E)$ , κορυφές  $s, t \in V$ .
- **Ερώτηση:** Υπάρχει  $s - t$  μονοπάτι;

## □ Πρόβλημα Συντομότερου Μονοπατιού:

- **Στιγμιότυπο:** Κατευθυνόμενο γράφημα  $G(V, E)$ , μήκη στις ακμές  $w: E \rightarrow \mathbb{R}$ , κορυφές  $s, t \in V$ .
- **Ερώτηση:** Ποιο είναι το συντομότερο  $s - t$  μονοπάτι;

# Παραδείγματα Προβλημάτων

---

## □ Πρόβλημα κύκλου Hamilton:

- **Στιγμιότυπο:** Γράφημα  $G(V, E)$ .
- **Ερώτηση:** Υπάρχει κύκλος Hamilton στο  $G$ ;

## □ Πρόβλημα Πλανόδιου Πωλητή:

- **Στιγμιότυπο:** Σύνολο  $N = \{1, \dots, n\}$  σημείων, αποστάσεις  $d : N \times N \rightarrow \mathbb{R}_+$ .
- **Ερώτηση:** Ποια περιοδεία ελαχιστοποιεί συνολικό μήκος ή ισοδύναμα, **ποια μετάθεση  $\pi$**  του  $N$  ελαχιστοποιεί το:

$$\sum_{i=1}^{n-1} d(\pi(i), \pi(i+1)) + d(\pi(n), \pi(1))$$

# Προβλήματα και Τυπικές Γλώσσες

---

- Πρόβλημα βελτιστοποίησης → πρόβλημα **απόφασης** με φράγμα  $B$ .
  - **Ελαχιστοποίηση**: Ξεφικτή λύση με **κόστος**  $\leq B$ ;
  - **Μεγιστοποίηση**: Ξεφικτή λύση με **κέρδος**  $\geq B$ ;
  - Πρόβλημα βελτιστοποίησης **λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο ανν** αντίστοιχο **πρόβλημα απόφασης** λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο.
- Πρόβλημα απόφασης → **τυπική γλώσσα** με κωδικοποίηση.
  - Στιγμιότυπο: **συμβολοσειρά** αλφαβήτου  $\Sigma$ .
  - Πρόβλημα: **γλώσσα**, υποσύνολο  $\Sigma^*$ .
  - **Εύλογη** κωδικοποίηση, π.χ. δυαδική, χωρίς «σπατάλη» συμβόλων.
- Πρόβλημα  $\Pi$  και κωδικοποίηση  $e$ : **γλώσσα**  $L(\Pi, e)$  με συμβ/ρές που αντιστοιχούν σε **ΝΑΙ-στιγμιότυπα** του  $\Pi$ .

$$L(\Pi, e) = \{e(x) \in \Sigma^* : x \in \Pi\}$$



# Ντετερμινιστικές Μηχανές Turing

- Ντετερμινιστική Μηχανή Turing (DTM)  $M \equiv (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ 
  - $Q$  σύνολο καταστάσεων.
  - $\Sigma$  αλφάβητο εισόδου και  $\Gamma = \Sigma \cup \{\sqcup\}$  αλφάβητο ταινίας.
  - $q_0 \in Q$  αρχική κατάσταση.
  - $F \subseteq Q$  τελική κατάσταση (συνήθως YES, NO, HALT).
  - $\delta : (Q \setminus F) \times \Gamma \mapsto Q \times \Gamma \times \{L, R, S\}$  συνάρτηση μετάβασης.  
(κατάσταση  $q$ , διαβάζει  $a$ )  $\rightarrow$   
(νέα κατάσταση  $q'$ , γράφει  $a'$ , κεφαλή μετακινείται L, R ή S).
- Απεριόριστη ταινία ανάγνωσης / εγγραφής και κεφαλή που μετακινείται στις θέσεις της ταινίας.
  - Διαβάζει είσοδο από ταινία.
  - Έξοδος: τελική κατάσταση και περιεχόμενο ταινίας.

# Ντετερμινιστικές Μηχανές Turing

- Υπολογισμός DTM μπορεί **να μην τερματίζει!**
    - ... σε αντίθεση π.χ. με DFA.
  - Συνολική κατάσταση ή **διαμόρφωση** (configuration):  $(q, \underline{\sigma} \alpha \sigma_r)$ 
    - (τρέχουσα κατάσταση  $q$ , συμβ/ρά αριστερά κεφαλής  $\sigma_l$ , σύμβολο σε θέση κεφαλής, συμβ/ρά δεξιά κεφαλής  $\sigma_r$ ).
    - Αρχική διαμόρφωση με είσοδο  $x = x_1 x_2 \dots x_n$ :  $(q_0, \underline{x_1 x_2 \dots x_n})$
    - Τελική διαμόρφωση με έξοδο  $y = y_1 y_2 \dots y_m$ :  $(\text{HALT}, \underline{y_1 y_2 \dots y_n})$
  - Υπολογισμός DTM  $M$  : **συνάρτηση**  $|-$  και σχέση  $|-\ast$ .
    - $|-$  : διαμόρφωση που προκύπτει από τρέχουσα σε ένα βήμα.
    - $|-\ast$  : διαμορφώσεις που προκύπτουν σε κάποιο #βημάτων.
- Για  $(q_0, \underline{x_1 x_2 \dots x_n}) \vdash^\ast (\text{YES}, \dots)$  γράφουμε  $M(x) = \text{YES}$   
Για  $(q_0, \underline{x_1 x_2 \dots x_n}) \vdash^\ast (\text{NO}, \dots)$  γράφουμε  $M(x) = \text{NO}$   
Για  $(q_0, \underline{x_1 x_2 \dots x_n}) \vdash^\ast (\text{HALT}, \underline{y_1 y_2 \dots y_n})$  γράφουμε  $M(x) = y$

# Παράδειγμα Μηχανής Turing

---

- Σε DTM με  $\Sigma = \{0, 1\}$  μπορούμε να αντιστοιχίσουμε μερική **συνάρτηση**  $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$  όπου είσοδος και έξοδος κωδικοποιούνται στο **δυναμικό σύστημα**.
- «Αλγόριθμος» DTM που με **είσοδο**  $x$  υπολογίζει  **$x+1$** :
  - **Κάνε τρέχον** το κύτταρο με **τελευταίο σύμβολο** της εισόδου  $x$ ;
  - **repeat**
    - Αν τρέχον κύτταρο έχει  $\sqcup$ , γράψε **1** και **σταμάτα**;
    - Αν τρέχον κύτταρο έχει **1**, γράψε **0**, **κάνε τρέχον** το αμέσως **αριστερότερο** κύτταρο, και **κρατούμενο**  $:= 1$ ;
    - Αν τρέχον κύτταρο έχει **0**, γράψε **1**, **κάνε τρέχον** το αμέσως **αριστερότερο** κύτταρο, και **κρατούμενο**  $:= 0$ ;
  - **until** **κρατούμενο** = 0;
  - **Κάνε τρέχον** το κύτταρο με **πρώτο σύμβολο** του  $x+1$  και **σταμάτα**;

# Παράδειγμα Μηχανής Turing

- Μηχανή Turing που με είσοδο  $x$  υπολογίζει  $x+1$ :

$$Q = \{q_0, q_1, q_2, \text{HALT}\}$$

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$q_0$

$$F = \{\text{HALT}\}$$

	0	1	$\sqcup$
$q_0$	$(q_0, 0, R)$	$(q_0, 1, R)$	$(q_1, \sqcup, L)$
$q_1$	$(q_2, 1, L)$	$(q_1, 0, L)$	$(\text{HALT}, 1, S)$
$q_2$	$(q_2, 0, L)$	$(q_2, 1, L)$	$(\text{HALT}, \sqcup, R)$

- Παράδειγμα λειτουργίας με είσοδο  $x = 1011$ :

$$\begin{aligned}
 & (q_0, \underline{1}011) \vdash (q_0, 1\underline{0}11) \vdash (q_0, 10\underline{1}1) \vdash (q_0, 101\underline{1}) \vdash \\
 & (q_0, 1011\underline{\sqcup}) \vdash (q_1, 101\underline{1}) \vdash (q_1, 10\underline{1}0) \vdash (q_1, 1\underline{0}00) \vdash \\
 & (q_2, \underline{1}100) \vdash (q_2, \underline{\sqcup}1100) \vdash (\text{HALT}, \underline{1}100)
 \end{aligned}$$

# Ντετερμινιστικές Μηχανές Turing

- **Ντετερμινισμός:** υπολογισμός  $M(x)$  εξελίσσεται με προδιαγεγραμμένο τρόπο (  $|$ - είναι συνάρτηση ).
  - $M(x)$  τερματίζει σε τελική κατάσταση ή δεν τερματίζει.
  - $M(x) = \text{YES}$  :  $M$  αποδέχεται  $x$ .  $L(M) = \{x \in \Sigma^* : M(x) = \text{YES}\}$
  - $M(x) = \text{NO}$  :  $M$  απορρίπτει  $x$ .
  - $M(x) = y$  :  $M$  υπολογίζει  $y = f(x)$ .
- **Καθολική Μηχανή Turing  $U$ :**  $U(M; x) = M(x)$ .
  - $U$  προσομοιώνει κάθε άλλη  $DTM$  για οποιαδήποτε είσοδο.
  - $U$  διαβάζει ως είσοδο περιγραφή  $DTM$   $M$  και είσοδο  $x$  για  $M$ .
  - $U$  προσομοιώνει υπολογισμό  $M(x)$  και καταλήγει σε ίδιο αποτέλεσμα.

# Υπολογισιμότητα

- Γλώσσα (πρόβλημα)  $L$  **αποκρίσιμη** (decidable),
  - ή **υπολογίσιμη** (computable),  
αναδρομική (recursive),  
επιλύσιμη (solvable):  
 $\exists \text{DTM } M: \begin{cases} \forall x \in L, M(x) = \text{YES} \\ \forall x \notin L, M(x) = \text{NO} \end{cases}$
- Γλώσσα (πρόβλημα)  $L$  **αποδεκτή** (acceptable),
  - ή **ημιαποκρίσιμη** (semidecidable),  
αναδρομικά απαριθμήσιμη  
(recursively enumerable),  
καταγράψιμη (listable):  
 $\exists \text{DTM } M: \begin{cases} \forall x \in L, M(x) = \text{YES} \\ \forall x \notin L, M(x) = \nearrow \end{cases}$
- (Μερική) συνάρτηση  $f$  **υπολογίσιμη**:  
 $\exists \text{DTM } M: \begin{cases} M(x) = y & \text{αν } f(x) = y \\ M(x) = \nearrow & \text{αν } f(x) \text{ δεν ορίζεται} \end{cases}$

# Υπολογισιμότητα

---

- Να δείξετε ότι:
  - Κάθε αποκρίσιμη γλώσσα είναι και ημιαποκρίσιμη.
  - Αν γλώσσα  $L$  αποκρίσιμη, τότε συμπληρωματική αποκρίσιμη.
  - Γλώσσα  $L$  αποκρίσιμη ανν  $L$  και συμπληρωματική της  $L$  ημιαποκρίσιμες.

# Θέση Church – Turing

---

- DTM πολύ **ισχυρό** υπολογιστικό μοντέλο!
- Προσπάθεια **ενίσχυσης** με επιπλέον δυνατότητες. Π.χ.
  - Πολλαπλές ταινίες.
  - Ταινία δύο (ή γενικότερα  $d$ ) διαστάσεων.
  - Πολλαπλές κεφαλές.
  - Μη ντετερμινισμός (σχέση μετάβασης).
- Μπορεί ευκολότερος σχεδιασμός και «μικρή» επιτάχυνση.
  - «Ενισχυμένες»  $(D, N)TM$  **προσομοιώνονται από τυπικές DTM.**
- **Δεν ενισχύεται** το υπολογιστικό **μοντέλο!**
  - **Ίδια κλάση** αποκρίσιμων και ημιαποκρίσιμων γλωσσών.



# Θέση Church – Turing

---

- Δεν υπάρχει υπολογιστικό μοντέλο **ισχυρότερο** των DTM.
  - Π.χ. αναδρομικές συναρτήσεις, RAM, Church, Post, Markov, ...
- **Θέση των Church – Turing:**  
Υπολογίσιμο αν DTM αποκρίσιμο!
  - Διαισθητικά: **αλγόριθμος** είναι DTM που τερματίζει πάντα (με σωστό αποτέλεσμα).
  - Θέση Church – Turing **δεν** μπορεί να αποδειχθεί.
    - Είναι θεωρητικά δυνατόν, αλλά **πρακτικά απίθανο** να διατυπωθεί στο μέλλον ισχυρότερο υπολογιστικό μοντέλο.

# Μη-Υπολογισιμότητα

---

- Υπάρχουν **μη επιλύσιμα προβλήματα** (μη αποκρ. γλώσσες).
  - Γλώσσες μη αριθμήσιμες, DTM αριθμήσιμες!
- **Πρόβλημα τερματισμού** (halting problem):
  - Δεδομένης DTM  $M$  και συμβ/ράς  $x$ ,  $M(x)$  τερματίζει;
  - Υπάρχει(;) DTM / πρόγραμμα  $H$  που δέχεται ως είσοδο (οποιαδήποτε) DTM / πρόγραμμα  $M$  και την είσοδο  $x$  για  $M$ , και απαντά **YES** αν  $M(x)$  τερματίζει και **NO** αν  $M(x)$  δεν τερματίζει.
- Πρόβλημα τερματισμού είναι **μη επιλύσιμο!**
  - Απόδειξη με **διαγωνιοποίηση**.

# Μη-Υπολογισιμότητα

---

- Πρόβλημα τερματισμού είναι **μη επιλύσιμο!**
  - Έστω ότι **υπάρχει DTM H** που για κάθε DTM M και είσοδο x, H(M; x) αποφασίζει αν M(x) **τερματίζει ή όχι**.
$$H(M; x) = \begin{cases} \text{YES} & \text{αν } M(x) \text{ τερματίζει} \\ \text{NO} & \text{αν } M(x) \text{ δεν τερματίζει} \end{cases}$$
  - Με βάση DTM H, κατασκευάζουμε DTM D(M):  
if  $H(M; M) = \text{YES}$  then **run forever** else **halt**
  - Εκ κατασκευής, D(M) τερματίζει αν M(M) **δεν** τερματίζει!
  - Δοκιμάζουμε D με είσοδο τον εαυτό της:
    - D(D) τερματίζει αν D(D) **δεν** τερματίζει! **Άτοπο!!!**
- Υπάρχουν πολλά άλλα μη επιλύσιμα προβλήματα.
  - Π.χ. επίλυση Διοφαντικών εξισώσεων.