Στοιχεία Χωρικής Πολυπλοκότητας

Δημήτρης Φωτάκης

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Χωρική Πολυπλοκότητα

- **Χωρική** πολυπλοκότητα DTM M (NTM N):
  - Αύξουσα συνάρτηση $s : \mathrm{N} \rightarrow \mathrm{N}$ ώστε για κάθε x, $|x| = n$, #κυττάρων όπου M(x) (απαιτητικότερος κλάδος N(x)) αποθηκεύει ενδιάμεσα αποτελέσματα είναι $\leq s(n)$.
  - Δεν συμπεριλαμβάνεται είσοδος και έξοδος.
- (Μη ντετ.) χωρική πολυπλοκότητα προβλήματος Π:
  - «Οικονομικότερη» σε μνήμη DTM (NTM) που λύνει Π.
- Κλάσεις χωρικής πολυπλοκότητας:

$$\mathbf{DSPACE}[s(n)] \equiv \{\Pi : \Pi \text{ λύνεται από DTM χώρου } \mathrm{O}(s(n))\}$$

$$\mathbf{NSPACE}[s(n)] \equiv \{\Pi : \Pi \text{ λύνεται από NTM χώρου } \mathrm{O}(s(n))\}$$

Κλάσεις Χωρικής Πολυπλοκότητας

- Πολυωνυμικός χώρος: $\mathbf{PSPACE} \equiv \bigcup_{k\geq 0} \mathbf{DSPACE}[n^k]$
  $\mathbf{NPSPACE} \equiv \bigcup_{k\geq 0} \mathbf{NSPACE}[n^k]$
- Λογαριθμικός χώρος: $\mathbf{L} \equiv \mathbf{DSPACE}[\log n]$
  $\mathbf{NL} \equiv \mathbf{NSPACE}[\log n]$
- Για κάθε συνάρτηση πολυπλοκότητας *s*(*n*), ισχύει ότι:

$$\mathbf{DSPACE}[s(n)] \subseteq \mathbf{NSPACE}[s(n)] \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{PSPACE} \subseteq \mathbf{NPSPACE} \\ \mathbf{L} \subseteq \mathbf{NL} \end{cases}$$

$$\mathbf{NTIME}[s(n)] \subseteq \mathbf{DSPACE}[s(n)] \Rightarrow \mathbf{NP} \subseteq \mathbf{PSPACE}$$

$$\mathbf{NSPACE}[s(n)] \subseteq \mathbf{DTIME}[c^{\log n + s(n)}] \Rightarrow \mathbf{NL} \subseteq \mathbf{P}$$

Κλάσεις Χωρικής Πολυπλοκότητας

- Ιεραρχία κλάσεων χωρικής πολυπλοκότητας:
  - Για κάθε συνάρτηση πολυπλοκότητας $s(n) \geq \log n$,

$$\mathbf{DSPACE}[s(n)] \subset \mathbf{DSPACE}[\omega(s(n))] \quad \Rightarrow \mathbf{L} \subset \mathbf{PSPACE}$$
$$\mathbf{NSPACE}[s(n)] \subset \mathbf{NSPACE}[\omega(s(n))] \Rightarrow \mathbf{NL} \subset \mathbf{NPSPACE}$$

- Θεώρημα **Savitch**. Για κάθε συναρτ. πολυπλ. $s(n) \geq \log n$,

$$\mathbf{NSPACE}[s(n)] \subseteq \mathbf{DSPACE}[s^2(n)]$$
$$\Rightarrow \mathbf{PSPACE} = \mathbf{NPSPACE}$$

Συνολική Εικόνα

- Γνωρίζουμε ότι:

  $$\mathbf{L} \subseteq \mathbf{NL} \subseteq \mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP} \subseteq \mathbf{PSPACE} = \mathbf{NPSPACE}$$

- ... και ότι: $\mathbf{L} \subset \mathbf{PSPACE}$ *και* $\mathbf{NL} \subset \mathbf{PSPACE}$