



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα
Διδάσκοντες: Δημήτρης Φωτάκης, Δώρα Σούλιου, Θανάσης Λιανέας
4η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 12/2/2021

Άσκηση 1: Ταξιδεύοντας με Ηλεκτρικό Αυτοκίνητο

Θεωρούμε κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, w)$, με n κορυφές (ή πόλεις), m ακμές και θετικά μήκη $w : E \rightarrow \mathbb{N}_+$ στις ακμές, το οποίο αποτελεί μοντέλο του οδικού δικτύου μιας χώρας. Θέλουμε να ταξιδέψουμε από την πόλη s στην πόλη t . Το αυτοκίνητό μας είναι ηλεκτρικό και έχει αυτονομία α (δηλ. η απόσταση που διανύει το αυτοκίνητο μεταξύ δύο διαδοχικών φορτίσεων δεν μπορεί να ξεπερνά το α). Ευτυχώς σε κάποιες (όχι όλες τις) πόλεις υπάρχουν σταθμοί φόρτισης. Συγκεκριμένα, $C \subset V$ είναι το σύνολο των πόλεων που διαθέτουν σταθμό φόρτισης. Ευτυχώς, τουλάχιστον, οι πόλεις s και t διαθέτουν σταθμούς φόρτισης (δηλ. $s, t \in C$).

Στα (α) και (β) παρακάτω, να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα των αλγορίθμων που θα διατυπώσετε.

(α) Εξετάζουμε αρχικά την περίπτωση που η αυτονομία του αυτοκινήτου μας είναι αρκετά μεγάλη, ώστε να μην απαιτείται ενδιάμεση φόρτιση για το ταξίδι μας από την s στην t . Θέλουμε όμως, στη διαδρομή, να επισκεφθούμε τουλάχιστον μία ακόμη πόλη με σταθμό φόρτισης, για να επιβεβαιώσουμε ότι οι σταθμοί φόρτισης στις ενδιάμεσες πόλεις είναι συμβατοί. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει το συντομότερο $s - t$ μονοπάτι που διέρχεται από τουλάχιστον μία πόλη του C διαφορετική από τις s και t (υποθέτουμε ότι $|C| \geq 3$).

(β) Θεωρούμε ότι η αυτονομία α του αυτοκινήτου μας είναι σχετικά μικρή και αναμένεται να λειτουργήσει περιοριστικά για τη διαδρομή που θέλουμε να ακολουθήσουμε. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει το συντομότερο $s - t$ μονοπάτι υπό τον περιορισμό ότι η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών πόλεων με σταθμό φόρτισης στη διαδρομή μας δεν ξεπερνά την αυτονομία α του αυτοκινήτου μας.

Άσκηση 2: Στρίβοντας Μόνο Δεξιά!

“Δανειστήκατε” το ολοκαίνουργιο σπορ αυτοκίνητο του πατέρα σας. Μετά τα πρώτα μέτρα, συνειδητοποιείτε ότι έχει κλειδώσει το τιμόνι με μια σύγχρονη ηλεκτρονική κλειδαριά, η οποία δεν σας επιτρέπει να στρίψετε καθόλου αριστερά (δεξιά μπορείτε να στρίψετε μια χαρά). Επιπλέον, για να μην τραβήξετε την “προσοχή” της Τροχαίας, θέλετε να αποφύγετε πάση θυσία τις αναστροφές. Προσπαθείτε να φτάσετε όσο το δυνατόν συντομότερα στο συνεργείο του Άρη, που θα σας βοηθήσει να ξεκλειδώσετε την κλειδαριά. Δεδομένου ότι μπορείτε να οδηγήσετε πολύ γρήγορα στις ευθείες, στόχος σας είναι να βρείτε μια διαδρομή από το σπίτι σας στο συνεργείο του Άρη που ελαχιστοποιεί το πλήθος των δεξιών στροφών.

Έχετε στη διάθεσή σας έναν χάρτη της πόλης, ενημερωμένο με τις τρέχουσες κυκλοφοριακές συνθήκες, στη μορφή ενός $m \times n$ πλέγματος. Όλα τα οδικά τμήματα είναι διπλής κατεύθυνσης και κάθε οδικό τμήμα μεταξύ δύο κορυφών / διασταυρώσεων μπορεί να είναι είτε ελεύθερο, για να οδηγήσετε γρήγορα σε αυτό, είτε μπλοκαρισμένο από την κυκλοφορία (και άρα όχι διαθέσιμο για σας). Σε κάθε κορυφή / διασταύρωση, μπορείτε είτε να συνεχίσετε ευθεία είτε να στρίψετε δεξιά.

Στα (α) και (β) παρακάτω, να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα των αλγορίθμων που θα διατυπώσετε.

(α) Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει μια διαδρομή από το σπίτι σας στο συνεργείο του Άρη με το ελάχιστο πλήθος δεξιών στροφών (ή αποφαίνεται ότι δεν είναι δυνατόν να φτάσετε στο συνεργείο στρίβοντας μόνο δεξιά). Μεταξύ δυο διαδρομών με το ίδιο πλήθος δεξιών στροφών, προτιμάτε αυτή που ελαχιστοποιεί τη συνολική απόσταση (την οποία υπολογίζουμε σε οικοδομικά τετράγωνα / οδικά τμήματα μεταξύ διαδοχικών διασταυρώσεων, βλ. Manhattan distance). Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

(β) Δεν προλάβετε καλά-καλά να τρέξετε τον αλγόριθμο του (α), και σκέφτεστε ότι είναι πιθανόν να σας ακολουθεί η μεγάλη σας αδελφή, που αν ανακαλύψει το συνεργείο του Άρη, θα το “καρφώσει” κατ’ ευθείαν στον πατέρα σας. Για να την αποφύγετε, θέλετε κάθε δεξιά στροφή σε μία διασταύρωση να ακολουθείται από μια δεξιά στροφή στην αμέσως επόμενη διασταύρωση. Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει μια διαδρομή από το σπίτι σας στο συνεργείο του Άρη με το ελάχιστο πλήθος δεξιών στροφών, δεδομένου του προηγούμενου περιορισμού (ή αποφαίνεται ότι δεν υπάρχει τέτοια διαδρομή). Όπως και στο (α), μεταξύ δύο αποδεκτών διαδρομών με το ίδιο πλήθος δεξιών στροφών, προτιμάτε αυτή που ελαχιστοποιεί τη συνολική απόσταση.

Άσκηση 3: Σχεδιασμός Videogame

Σας έχει ανατεθεί ο σχεδιασμός ενός μοντέρνου videogame. Κεντρικό στοιχείο του είναι ο Λαβύρινθος, τον οποίο οι παίκτες διασχίζουν περνώντας μέσα από πολλά δωμάτια. Κάθε δωμάτιο μπορεί να είναι άδειο, να κατοικείται από ένα τέρας, ή να περιέχει ένα μαγικό φίλτρο. Καθώς ο παίκτης περνάει μέσα από τα δωμάτια, αυξάνεται ή μειώνεται η δύναμή του P . Αν κάποια στιγμή το P πάψει να είναι θετικό, ο παίκτης χάνει τη “ζωή” του και το παιχνίδι σταματάει εκεί.

Ο Λαβύρινθος αναπαρίσταται από ένα κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E, p)$, με βάρη $p : V \rightarrow \mathbb{Z}$ στις κορυφές, όπου οι κορυφές αντιστοιχούν σε δωμάτια και οι ακμές σε διαδρόμους (μιας κατεύθυνσης) που οδηγούν από το ένα δωμάτιο στο άλλο. Ο Λαβύρινθος έχει συγκεκριμένη είσοδο $s \in V$ και έξοδο $t \in V$. Η συνάρτηση βάρους κορυφών p αναπαριστά τι συναντούν οι παίκτες σε κάθε δωμάτιο. Ειδικότερα, έχουμε $p(v) = 0$, όταν το δωμάτιο είναι άδειο, $p(v) > 0$, όταν το δωμάτιο περιέχει ένα μαγικό φίλτρο, και $p(v) < 0$, όταν το δωμάτιο κατοικείται από ένα τέρας. Όταν ένας παίκτης με δύναμη P βρεθεί στο δωμάτιο v , η δύναμή του αλλάζει σε $P + p(v)$. Μετά την αποχώρηση του παίκτη από το δωμάτιο v , το τέρας ή το μαγικό φίλτρο ανανεώνονται. Υποθέτουμε ότι ο παίκτης ξεκινά στην είσοδο s με δύναμη P_0 , ότι το δωμάτιο εισόδου είναι άδειο (άρα $p(s) = 0$), και ότι υπάρχει πάντα διαδρομή από την είσοδο s στην έξοδο t του Λαβύρινθου.

Για να μεγιστοποιήσουμε τα έσοδα από το videogame, θέλουμε να διαπιστώνουμε αποδοτικά ποια είναι η ελάχιστη δύναμη P_0 , με την οποία αν ξεκινήσει ένας παίκτης στην είσοδο s , μπορεί να φτάσει “ζωντανός” στην έξοδο t . Μια $s - t$ διαδρομή π είναι r -ασφαλής, αν ο παίκτης, ξεκινώντας με δύναμη $P_0 = r$, φτάνει “ζωντανός” στην έξοδο, ακολουθώντας την π . Ένας Λαβύρινθος $G(V, E, p)$ είναι r -ασφαλής, αν περιέχει r -ασφαλή $s - t$ διαδρομή π .

Για καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα των αλγορίθμων που θα διατυπώσετε.

1. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο που με είσοδο Λαβύρινθο $G(V, E, p)$, στον οποίο δεν υπάρχουν κύκλοι που ενισχύουν τη δύναμη του παίκτη, και δεδομένη τιμή r , αποφαίνεται αν ο Λαβύρινθος G είναι r -ασφαλής.
2. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο που με είσοδο Λαβύρινθο $G(V, E, p)$, στον οποίο μπορεί να υπάρχουν κύκλοι που ενισχύουν τη δύναμη του παίκτη, και δεδομένη τιμή r , αποφαίνεται αν ο Λαβύρινθος G είναι r -ασφαλής.
3. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο που με είσοδο Λαβύρινθο $G(V, E, p)$, υπολογίζει την ελάχιστη τιμή r για την οποία ο Λαβύρινθος G είναι r -ασφαλής.

Άσκηση 4: Επαναφορά της Ομαλότητας στη Χώρα των Αλγορίθμων

Τις τελευταίες εβδομάδες έχουμε γενικευμένες συγκρούσεις μεταξύ Στρατού (βλ. δυνάμεων της νέας δημοκρατικά εκλεγμένης κυβέρνησης) και Εξτρεμιστών (βλ. δυνάμεων που υποστηρίζουν την προηγούμενη κυβέρνηση της χώρας, η οποία ηττήθηκε στις πρόσφατες εκλογές και αρνείται να παραδώσει την εξουσία) κατά μήκος της κεντρικής οδικής αρτηρίας της Χώρας των Αλγορίθμων.

Η κεντρική οδική αρτηρία έχει τη μορφή μιας απεριόριστης ευθείας, όπου οι θέσεις καθορίζονται με βάση την απόσταση (σε χιλιόμετρα) από την αρχή της, που αντιστοιχεί στο χιλιόμετρο 0. Οι Εξτρεμιστές έχουν εγκαθιδρύσει βάσεις ανεφοδιασμού σε ορισμένα σημεία της οδικής αρτηρίας, τις οποίες χρησιμοποιούν για να υποστηρίζουν τις δυνάμεις τους. Η ύπαρξη βάσης σε απόσταση το πολύ d είναι αναγκαία για την ενεργή παρουσία δυνάμεων Εξτρεμιστών σε μια θέση. Αν κάποιες βάσεις καταστραφούν, όλες οι δυνάμεις Εξτρεμιστών που θα βρεθούν χωρίς υποστήριξη από βάση σε απόσταση το πολύ d παραδίδονται άμεσα.

Ο Στρατηγός Β γνωρίζει με ακρίβεια τις θέσεις των δυνάμεων Στρατού, των δυνάμεων Εξτρεμιστών και των βάσεων Εξτρεμιστών στην κεντρική οδική αρτηρία. Θέλει να σχεδιάσει μια γενικευμένη επίθεση που θα κάμψει πλήρως την αντίσταση των Εξτρεμιστών και θα τερματίσει οριστικά τις συγκρούσεις. Δυνάμεις Στρατού σε μια θέση x μπορούν να αιχμαλωτίσουν δυνάμεις Εξτρεμιστών σε μια θέση y ή να καταστρέψουν μια βάση τους στη θέση y εξαπολύοντας επίθεση με συνολικό κόστος ανάλογο της απόστασης $|x - y|$ (το κόστος είναι ίδιο είτε πρόκειται ο Στρατός να αιχμαλωτίσει Εξτρεμιστές είτε να καταστρέψει μια βάση τους, ποτέ δεν μπορεί να κάνει και τα δύο). Μετά από μια τέτοια επίθεση, οι δυνάμεις Στρατού πρέπει να επιστρέψουν στην αρχική τους θέση y για ανασύνταξη. Μετά την ανασύνταξη, οι δυνάμεις Στρατού μπορούν να εξαπολύσουν νέα επίθεση.

Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο που με είσοδο τις θέσεις των δυνάμεων Στρατού $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$, των δυνάμεων Εξτρεμιστών $e_1, \dots, e_m \in \mathbb{Z}$, των βάσεων Εξτρεμιστών $b_1, \dots, b_k \in \mathbb{Z}$, και τη μέγιστη απόσταση υποστήριξης από βάση Εξτρεμιστών $d \in \mathbb{N}$, υπολογίζει το ελάχιστο κόστος μιας γενικευμένης επίθεσης που θα κάμψει πλήρως την αντίσταση των Εξτρεμιστών. Η αντίσταση των Εξτρεμιστών θα έχει καμφθεί πλήρως όταν όλες οι δυνάμεις τους θα έχουν είτε αιχμαλωτιστεί είτε παραδοθεί (μπορεί να υπάρχουν βάσεις σε λειτουργία, αν δεν υπάρχουν δυνάμεις Εξτρεμιστών για να υποστηρίξουν). Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

Άσκηση 5: Λογιστικές Αλχημείες

Η κυβέρνηση της Χώρας των Αλγορίθμων έχει θεσπίσει έναν νέο φόρο μεγάλων συναλλαγών, σύμφωνα με τον οποίο κάθε μεταφορά χρημάτων μεταξύ δύο εταιρειών που ξεπερνά ένα συγκεκριμένο όριο φορολογείται με ένα συγκεκριμένο ποσοστό. Το όριο αυτό δεν έχει ακόμη οριστικοποιηθεί και ο Σύλλογος Βιομηχάνων προσπαθεί να επηρεάσει την κυβέρνηση ως προς αυτό.

Μια ομάδα n εταιρειών αποφάσισε να σας συμβουλευτεί για το πως μπορεί να ρυθμιστεί αυτό το όριο, ώστε αφενός να μην είναι πολύ μικρό και αφετέρου να αποφύγουν τελείως αυτόν τον φόρο. Κάθε εταιρεία i έχει ένα (θετικό, αρνητικό ή 0) υπόλοιπο $b_i \in \mathbb{Z}$ που πρέπει να λάβει από (αν $b_i > 0$) ή να πληρώσει στις (αν $b_i < 0$) υπόλοιπες εταιρείες συνολικά. Δεν υπάρχει χρέος ή απαίτηση από εταιρείες εκτός ομάδας, δηλ. έχουμε $\sum_{i=1}^n b_i = 0$. Υπάρχει αμοιβαία εμπιστοσύνη, οπότε δεν ενδιαφέρει ποια εταιρεία οφείλει σε ποια. Ενδιαφέρει μόνο να υπολογιστεί ένα σύνολο συναλλαγών που ρυθμίζει το υπόλοιπο κάθε εταιρείας και ελαχιστοποιεί το μέγιστο χρηματικό ποσό που θα μεταφερθεί από μια εταιρεία σε μια άλλη. Για προφανείς λόγους, μπορεί να γίνει το πολύ μία συναλλαγή μεταξύ κάθε ζεύγους εταιρειών και σε μία μόνο κατεύθυνση (δηλ. για κάθε ζευγάρι εταιρειών i και j που συναλλάσσονται, μπορεί να έχουμε μία μόνο συναλλαγή, όπου είτε η i πληρώνει τη j είτε η j πληρώνει την i). Από την άλλη, είναι δυνατόν μια εταιρεία με υπόλοιπο 0 να βοηθήσει στην οργάνωση των συναλλαγών, λαμβάνοντας και πληρώνοντας χρήματα από/προς άλλες εταιρείες.

Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο που με είσοδο τα υπόλοιπα των n εταιρειών $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{Z}$, υπολογίζει το ελάχιστο ποσό T που απαιτείται ώστε να ρυθμιστεί το υπόλοιπο όλων των εταιρειών και επιτυγχάνει όλες οι συναλλαγές να αφορούν χρηματικά ποσά που δεν ξεπερνούν το T . Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

Παράδειγμα: Έστω $n = 3$ εταιρείες με υπόλοιπο $b_1 = -20$, $b_2 = 15$ και $b_3 = 5$. Μια ρύθμιση είναι η 1 να εξοφλήσει τις 2 και 3 απευθείας, μέσω συναλλαγών ποσών 15 και 5. Η ρύθμιση που ελαχιστοποιεί το μέγιστο ποσό μιας συναλλαγής είναι η 1 να μεταφέρει ποσό 10 σε καθεμία από τις 2 και 3, και στη συνέχεια η 3 να μεταφέρει ποσό 5 στην 2.

Άσκηση 6: Αναγωγές και NP-Πληρότητα

Να δείξετε ότι τα παρακάτω προβλήματα είναι NP-Πλήρη:

Άθροισμα Υποσυνόλου κατά Προσέγγιση

Είσοδος: Σύνολο $A = \{w_1, \dots, w_n\}$ με n φυσικούς και φυσικοί B και x με $B > x \geq 1$.

Ερώτηση: Υπάρχει $S \subseteq A$ τέτοιο ώστε $B - x \leq w(S) \leq B$;

Τακτοποίηση Ορθογώνιων Παραλληλογράμμων

Είσοδος: n ορθογώνια παραλληλόγραμμα A_1, \dots, A_n , διαστάσεων $1 \times x_1, \dots, 1 \times x_n$, αντίστοιχα, και ορθογώνιο παραλληλόγραμμο B συνολικού εμβαδού $x_1 + \dots + x_n$. Θεωρούμε ότι τα x_1, \dots, x_n είναι θετικοί ακέραιοι πολυωνυμικά μεγάλοι σε σχέση με το n .

Ερώτηση: Είναι δυνατόν να τοποθετηθούν τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα A_1, \dots, A_n εντός του B χωρίς επικαλύψεις;

Μέγιστη Τομή με Βάρη στις Κορυφές

Είσοδος: Ακέραιος $B \geq 1$ και πλήρες γράφημα $G(V, E)$ με n κορυφές, όπου κάθε κορυφή v έχει ακέραιο βάρος $w(v) \geq 1$ και κάθε ακμή $e = \{u, v\}$ έχει βάρος $w(e) = w(u)w(v)$.

Ερώτηση: Υπάρχει τομή $(S, V \setminus S)$ στο G τέτοια ώστε το συνολικό βάρος των ακμών που διασχίζουν την τομή να είναι τουλάχιστον B .

Κύκλος Hamilton κατά Προσέγγιση

Είσοδος: Μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$.

Ερώτηση: Υπάρχει κυκλική διαδρομή στο G που διέρχεται από κάθε κορυφή τουλάχιστον μία και το πολύ δύο φορές;

Ικανοποιησιμότητα με Περιορισμούς

Είσοδος: Λογική πρόταση $\varphi = \bigwedge_{j=1}^m (\ell_{j1} \vee \ell_{j2} \vee \ell_{j3} \vee \ell_{j4})$ σε 4-Συζευκτική Κανονική Μορφή (4-CNF). Υπενθυμίζεται ότι στην αναπαράσταση της φ σε 4-CNF, κάθε literal ℓ_{ji} είναι είτε μια λογική μεταβλητή είτε η άρνηση μιας λογικής μεταβλητής.

Ερώτηση: Υπάρχει ανάθεση τιμών αλήθειας στις λογικές μεταβλητές ώστε κάθε όρος $\ell_{j1} \vee \ell_{j2} \vee \ell_{j3} \vee \ell_{j4}$ να περιλαμβάνει τουλάχιστον ένα αληθές και τουλάχιστον ένα ψευδές literal;

Επιλογή Ανεξάρτητων Υποσυνόλων

Είσοδος: Συλλογή $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$ υποσυνόλων ενός συνόλου U με n στοιχεία και φυσικός αριθμός k , $2 \leq k \leq m$.

Ερώτηση: Υπάρχουν k υποσύνολα στη συλλογή \mathcal{S} που να είναι, ανά δύο, ξένα μεταξύ τους;