Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα
Διδάσκοντες: Δημήτρης Φωτάκης, Δώρα Σούλιου, Θανάσης Λιανέας
3η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 7/1/2021

Άσκηση 1: Ραντεβού μετά το Lockdown

Έχετε ραντεβού στο κέντρο, με τους φίλους σας, για την πρώτη νυχτερινή έξοδο μετά το lockdown! Φαίνεται ότι το ίδιο σκέφθηκαν και όλοι οι άλλοι κάτοικοι της πόλης, οπότε επικρατεί μεγάλη κυκλοφοριακή συμφόρηση. Η Τροχαία, για να ομαλοποιήσει την κυκλοφορία, έχει μονοδρομήσει όλους τους δρόμους, και τους δίνει στην κυκλοφορία εναλλάξ, στην μία κατεύθυνση τις άρτιες χρονικές στιγμές και στην αντίθετη κατεύθυνση τις περιττές. Έχετε αναπαραστήσει το οδικό δίκτυο της πόλης ως ένα κατευθυνόμενο γράφημα $G(V,E)$ με n κορυφές και m ακμές. Η κατεύθυνση κάθε ακμής $e=(u,v)\in E$ στο G αντιστοιχεί στην κατεύθυνση της κυκλοφορίας στο οδικό τμήμα $u-v$ κατά τις περιττές χρονικές στιγμές $1,3,5,\ldots$. Για κάθε ακμή $e=(u,v)\in E$, η κυκλοφορία στο οδικό τμήμα $u-v$ κατά τις άρτιες χρονικές στιγμές $2,4,6,\ldots$ γίνεται στην αντίθετη κατεύθυνση (v,u). Θέλετε να διαπιστώσετε ποια είναι η τελευταία στιγμή που μπορείτε να ξεκινήσετε από την κορυφή $s\in V$, όπου κατοικείτε, για να φτάσετε στην κορυφή $t\in V$, στο κέντρο της πόλης, όχι αργότερα από τη χρονική στιγμή T, που είναι το ραντεβού σας. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο για αυτό το πρόβλημα, και να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική του πολυπλοκότητα.

Άσκηση 2: Προγραμματίζοντας την Αντίδραση

Πέντε επιστήμονες ανακάλυψαν ένα νέο παράξενο τύπο σωματιδιού, τα λεγόμενα κβαντοφωτονικά σωματίδια. Οι επιστήμονες έχουν την πεποίθηση ότι αν k κβαντοφωτονικά σωματίδια βρεθούν στο ίδιο ακριβώς σημείο την ίδια χρονική στιγμή, θα υπάρξει μια φαντασμαγορική πολύχρωμη αντίδραση.

Οι επιστήμονες έχουν παρατηρήσει ότι τα σωματίδια, λόγω της κβαντισμένης φύσης τους, κινούνται πάνω στις κορυφές ενός μη κατευθυνόμενου γραφήματος $G(V,E)$ με n κορυφές και m ακμές. Για κάθε σωματίδιο q_i, αν αυτό βρίσκεται στην κορυφή $v\in V$ την ημέρα t, τότε την επόμενη ημέρα $t+1$, αυτό μπορεί είτε να παραμείνει στην κορυφή v είτε να μετακινηθεί σε μια γειτονική κορυφή $u\in V$ της v (δηλ. σε κορυφή u για την οποία υπάρχει ακμή $\{v,u\}\in E$). Οι επιστήμονες μπορούν να προγραμματίσουν με ακρίβεια τις κινήσεις κάθε σωματιδίου q_i σε βάθος χρόνου. Αλλά δεν μπορούν να ελέγξουν τις αρχικές θέσεις των σωματιδίων στο G και το πότε τα σωματίδια θα κινηθούν. Μάλιστα, οι επιστήμονες έχουν παρατηρήσει ότι όλα τα σωματίδια που αλλάζουν θέση, κινούνται ακαριαία και ταυτόχρονα ακριβώς τα μεσάνυχτα (UTC) κάθε ημέρας.

Δεδομένων λοιπόν του γραφήματος $G(V,E)$, των αρχικών κορυφών $v_1,\ldots,v_k\in V$ των k σωματιδίων στο G, και του γεγονότος ότι το πλήθος n των κορυφών του G είναι σημαντικά μεγαλύτερο από το πλήθος k των σωματιδίων, οι επιστήμονες θέλουν να βρουν πως πρέπει να προγραμματίσουν τις κινήσεις των k σωματιδίων, ώστε η αντίδραση να συμβεί το συντομότερο δυνατόν, καθώς και την κορυφή του γραφήματος G όπου θα συμβεί αυτό. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο για αυτό το πρόβλημα, και να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική του πολυπλοκότητα.

Άσκηση 3: Ένας Παράξενος Περίπατος

Δίνεται ένα κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, c)$ με θετικά ακέραια βάρη c στις κορυφές του, όπου $c(v)$ είναι το βάρος μιας κορυφής $v \in V$. Ορίζουμε ως συνάρτηση κόστους ενός περιπάτου στο G τον *μέγιστο κοινό διαιρέτη* του βάρους των κορυφών που ανήκουν στον περίπατο. Π.χ., το κόστος ενός περιπάτου $w = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ είναι ίσο με $c(w) = \gcd(c(v_1), c(v_2), \ldots, c(v_k))$, όπου gcd είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης ενός συνόλου θετικών ακεραίων αριθμών. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει το ελάχιστο κόστος ενός περιπάτου στο γράφημα $G(V, E, c)$. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

Άσκηση 4: Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο με Περιορισμούς

Θεωρούμε ένα συνεκτικό μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, w)$, με n κορυφές, m ακμές και θετικά βάρη w στις ακμές. Θέλουμε να υπολογίσουμε ένα Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο $T^*(s, k)$ του G στο οποίο μια συγκεκριμένη κορυφή s έχει βαθμό ίσο με k (θεωρούμε ότι $k \geq 1$ και ότι το k δεν ξεπερνά τον βαθμό της s στο G, οπότε το G έχει ένα τέτοιο συνδετικό δέντρο).

(α) Να δείξετε ότι η άπληστη στρατηγική, η οποία συμπεριλαμβάνει στο συνδετικό δέντρο τις k ακμές μικρότερου βάρους που προσπίπτουν στην s, δεν οδηγεί πάντα στη βέλτιστη λύση.

(β) Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει ένα Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο $T^*(s, k)$ στο οποίο η κορυφή s έχει βαθμό ίσο με k. Να αιτιολογήσετε αναλυτικά την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

Άσκηση 5: Αλγόριθμος Boruvka

Θεωρούμε ένα συνεκτικό μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, w)$, με n κορυφές, m ακμές και θετικό βάρος $w(e)$ σε κάθε ακμή $e \in E$, όπου τα βάρη των ακμών είναι όλα διαφορετικά μεταξύ τους.

(α) Να δώσετε μια πλήρη (και αναλυτική) απόδειξη ορθότητας για τον αλγόριθμο Boruvka. Ειδικότερα, να δείξετε ότι (i) ο αλγόριθμος Boruvka καταλήγει πάντα σε ένα συνδετικό δέντρο T, και (ii) ότι το συνδετικό δέντρο T στο οποίο καταλήγει ο αλγόριθμος είναι πράγματι ελάχιστου βάρους.

(β) Να περιγράψετε λεπτομερώς μια υλοποίηση του αλγόριθμου με χρόνο εκτέλεσης $O(m \log n)$.

(γ) Να εξηγήσετε πως μπορούμε να συνδυάσουμε την παραπάνω υλοποίηση του αλγόριθμου Boruvka με την υλοποίηση του αλγόριθμου Prim με σωρό Fibonnaci ώστε να επιτύχουμε χρόνο εκτέλεσης $O(m \log \log n)$ για το πρόβλημα του Ελάχιστου Συνδετικού Δέντρου.

(δ) Καλούμε *σύμπτυξη* (contraction) μια ακμής $e = \{u, v\}$ ενός (απλού μη κατευθυνόμενου) γραφήματος G τη διαδικασία κατά την οποία προσθέτουμε στο G μια νέα κορυφή uv, "μετακινούμε" κάθε ακμή που προσπίπτει στην u ή στην v (εκτός από την e) ώστε να προσπίπτει στη νέα κορυφή uv, διαγράφουμε τις κορυφές u και v και την ακμή e, και καθιστούμε το γράφημα που προκύπτει απλό (αν δεν είναι ήδη).

Λέμε ότι μια κλάση $\mathcal{C}$ απλών μη κατευθυνόμενων γραφημάτων είναι *βολική* αν (i) η $\mathcal{C}$ είναι κλειστή ως προς τη σύμπτυξη ακμής (δηλ. για κάθε $G \in \mathcal{C}$, το γράφημα που προκύπτει από την σύμπτυξη μιας οποιασδήποτε ακμής του G ανήκει επίσης στην $\mathcal{C}$), και (ii) το πλήθος ακμών κάθε $G(V, E) \in \mathcal{C}$ είναι $O(|V|)$. Π.χ., η κλάση των απλών επίπεδων γραφημάτων είναι βολική.

Να δείξετε ότι ο αλγόριθμος Boruvka χρειάζεται χρόνο $O(|V|)$ για τον υπολογισμό του Ελάχιστου Συνδετικού Δέντρου ενός απλού μη κατευθυνόμενο γραφήματος $G(V, E, w)$ που ανήκει σε μια βολική κλάση γραφημάτων (π.χ., αν το G είναι απλό επίπεδο γράφημα).

Άσκηση 6: Το Σύνολο των Συνδετικών Δέντρων (ΚΤ 4.27 και ΚΤ 4.28)

Θεωρούμε ένα συνεκτικό μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ με n κορυφές και m ακμές.

(α) Έστω T_1 και T_2 δύο διαφορετικά συνδετικά δέντρα του G. Να δείξετε ότι για κάθε ακμή $e \in T_1 \setminus T_2$, υπάρχει ακμή $e' \in T_2 \setminus T_1$, τέτοια ώστε το $(T_1 \setminus \{e\}) \cup \{e'\}$ είναι συνδετικό δέντρο. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο που με δεδομένα τα T_1, T_2 και e, υπολογίζει μια τέτοια ακμή e'.

(β) Σχηματίζουμε γράφημα H που κάθε κορυφή του αντιστοιχεί σε ένα διαφορετικό συνδετικό δέντρο του G. Δύο συνδετικά δέντρα T_1 και T_2 του G (κορυφές του H) συνδέονται με ακμή στο H αν διαφέρουν κατά μία μόνο ακμή, δηλ. αν $|T_1 \setminus T_2| = |T_2 \setminus T_1| = 1$. Να δείξετε ότι το H είναι συνεκτικό και ότι η απόσταση (στο H) μεταξύ δύο συνδετικών δέντρων T_1 και T_2 του G είναι ίση με $|T_1 \setminus T_2|$. Να εξηγήσετε πως θα χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο του (α) για να υπολογίσουμε ένα συντομότερο μονοπάτι (στο H) μεταξύ των T_1 και T_2.

(γ) Θεωρούμε τώρα ότι το γράφημα G έχει βάρη στις ακμές του. Θεωρούμε, δηλαδή, ένα γράφημα $G(V, E, w)$, με n κορυφές, m ακμές και θετικό βάρος $w(e)$ σε κάθε ακμή $e \in E$. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο, που για κάθε ακμή $e \in E$, υπολογίζει το ελάχιστο βάρος ενός συνδετικού δέντρου T_e του G που περιέχει την ακμή e. Ο αλγόριθμός σας θα υπολογίζει το ελάχιστο βάρος ενός τέτοιου συνδετικού δέντρου T_e, για **όλες τις ακμές** $e \in E$, και θα επιστρέφει m ζεύγη της μορφής $(e_1, w(T_{e_1})), \ldots, (e_m, w(T_{e_m}))$, όπου $w(T_{e_j})$ είναι το συνολικό βάρος ενός ελάχιστου συνδετικού δέντρου T_{e_j} του G που περιέχει την ακμή $e_j \in E$. Να αιτιολογήσετε αναλυτικά την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας. Θα υπάρχει επιπλέον βαθμολογία (bonus) για απαντήσεις με χρονική πολυπλοκότητα $\mathrm{O}(|E| \log |E|)$.