Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών

Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Διδάσκοντες: Δημήτρης Φωτάκης, Δώρα Σούλιου, Θανάσης Λιανέας

4η Σειρά Προγραμματιστικών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 19/4/2021

Άσκηση 1: Συντόμευση Διαδρομής

Στην πληττόμενη από τον κορονοϊό χώρα των Αλγορίθμων, πρέπει να φτάσουμε από την αγαπημένη μας παραλία, όπου έχουμε πάει για μια χειμερινή βουτιά, στο σπίτι μας, πριν αρχίσει η απαγόρευση κυκλοφορίας, σε B ώρες ακριβώς!

Γνωρίζουμε το οδικό δίκτυο της χώρας, το οποίο αποτελείται από N πόλεις (αριθμημένες από 1 μέχρι N) και M δρόμους μονής κατεύθυνσης. Κάθε δρόμος $e = (u, v)$ μας επιτρέπει να ταξιδέψουμε από την πόλη u, στη μία άκρη του, στην πόλη v, στην άλλη άκρη, σε $\ell(e)$ ώρες. Η αγαπημένη μας παραλία βρίσκεται στην πόλη s και το σπίτι μας στην πόλη t. Υπό κανονικές συνθήκες, φαίνεται αδύνατον να διανύσουμε την απόσταση από την πόλη s στην πόλη t σε B μόλις ώρες. Ευτυχώς, όμως, το υπερσύγχρονο αυτοκίνητό μας έχει τη δυνατότητα να κινηθεί αστραπιαία κατά μήκος ενός δρόμου. Όταν συμβαίνει αυτό σε έναν δρόμο $e = (u, v)$, διανύουμε την απόσταση από την πόλη u στην πόλη v σε ελάχιστα λεπτά, μηδενίζοντας πρακτικά το $\ell(e)$. Δυστυχώς αυτή η δυνατότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί λίγες φορές σε όλη τη διάρκεια ζωής του αυτοκινήτου μας.

Θέλουμε λοιπόν να υπολογίσουμε το ελάχιστο πλήθος δρόμων, όπου αν κινηθούμε αστραπιαία, μηδενίζοντας πρακτικά το χρόνο που χρειάζεται για να τους διασχίσουμε, θα καταφέρουμε να φτάσουμε από την αγαπημένη μας παραλία, στην πόλη s, στο σπίτι μας, στην πόλη t, σε B ώρες το πολύ, προλαβαίνοντας την έναρξη της απαγόρευσης κυκλοφορίας (και γλιτώνοντας ένα βαρύ πρόστιμο!).

Δεδομένα Εισόδου: Το πρόγραμμά σας θα διαβάζει από το standard input ένα κατευθυνόμενο γράφημα που αναπαριστά το οδικό δίκτυο της χώρας, τις πόλεις s και t, και το χρόνο B που έχουμε στη διάθεσή μας. Στην πρώτη γραμμή, θα δίνονται 5 φυσικοί αριθμοί, το πλήθος N των πόλεων, το πλήθος M των δρόμων, η πόλη s όπου βρίσκεται η αγαπημένη μας παραλία, η πόλη t όπου βρίσκεται το σπίτι μας, και ο χρόνος B (σε ώρες) που έχουμε στη διάθεσή μας. Θα ακολουθούν M γραμμές που περιγράφουν έναν δρόμο μονής κατεύθυνσης η κάθε μία. Στην i-οστή γραμμή, θα δίνονται 3 φυσικοί αριθμοί, που αντιστοιχούν στην αρχική πόλη u_i και στην τελική πόλη v_i του i-οστού δρόμου, και στη χρονική διάρκεια ℓ_i (σε ώρες) που χρειάζεται για να διανύσουμε τον i-οστό δρόμο $e_i = (u_i, v_i)$.

Δεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμά σας πρέπει να τυπώνει στο standard output (στην πρώτη γραμμή) έναν ακέραιο που αντιστοιχεί στο ελάχιστο πλήθος δρόμων, όπου αν κινηθούμε με πολύ μεγάλη ταχύτητα, θα καταφέρουμε να φτάσουμε από την πόλη s στην πόλη t, σε B ώρες το πολύ.

Περιορισμοί:

$3 \leq N \leq 1.000$
$3 \leq M \leq 10.000$
$1 \leq B \leq 10^9$
$1 \leq \ell_i \leq 10^6$
$1 \leq s, t \leq N$, $s \neq t$
Όριο χρόνου εκτέλεσης: 1 sec.
Όριο μνήμης: 64 MB.

Παράδειγμα Εισόδου:

```
6 9 3 6 15
2 1 4
3 2 7
4 5 6
1 3 8
1 4 4
5 2 8
5 6 10
1 5 5
4 2 5
```

Παράδειγμα Εξόδου:

```
2
```

Σε testcases[1] που αντιστοιχούν στο 25% της βαθμολογίας, θα υπάρχει ακριβώς μία διαδρομή από την s στην t. Σε testcases που αντιστοιχούν στο 25% της βαθμολογίας, θα είναι $N \leq 100$ και $M \leq 1000$.

Άσκηση 2: Κύπελλο Ποδοσφαίρου

Στην εξωτική Παραγκούπολη, οι αγώνες του κυπέλλου ποδοσφαίρου λαμβάνουν χώρα ακολουθιακά, ο ένας μετά τον άλλο (και όχι σε γύρους, όπως συνήθως). Αρχικά, έχουμε N ομάδες που συμμετέχουν στην διοργάνωση, και μετά από κάθε αγώνα, η ηττημένη ομάδα βγαίνει εκτός διοργάνωσης, ενώ η νικήτρια παραμένει (δεν υπάρχουν ισοπαλίες). Η διοργάνωση ολοκληρώνεται όταν έχει μείνει μόνο μία ομάδα, η οποία κερδίζει το κύπελλο. Έχετε αναλάβει να καθορίσετε την ακολουθία των αγώνων επιλέγοντας ημερομηνίες και αντιπάλους.

Γνωρίζετε πολύ καλά ότι το αποτέλεσμα δεν εξαρτάται μόνο από τις επιδόσεις και την προετοιμασία των ομάδων, αλλά και από την "τύχη", δηλαδή το πρόγραμμα των αγώνων. Έχετε περάσει αρκετό καιρό βλέποντας προσεκτικά τις επιδόσεις κάθε ομάδας. Είναι πλέον προφανές ότι τα αποτελέσματα κάποιων αγώνων είναι 100% προβλέψιμα. Έχοντας αυτές τις πληροφορίες, θέλετε να δείτε αν μπορείτε να οργανώσετε το πρόγραμμα των αγώνων με τρόπο ώστε μια ομάδα Χ να κερδίσει το κύπελλο. Θέλετε δηλαδή να οργανώσετε τους αγώνες έτσι ώστε η ομάδα Χ να παίξει μόνο με αντιπάλους που σίγουρα θα κερδίσει (ώστε τελικά να κερδίσει το κύπελλο). Αν αυτό είναι δυνατό, λέμε ότι το κύπελλο μπορεί να "στηθεί" για λογαριασμό της ομάδας Χ. Θέλετε λοιπόν να γράψετε ένα πρόγραμμα που υπολογίζει για ποιες ομάδες μπορεί να "στηθεί" το κύπελλο.

Δεδομένα Εισόδου: Το πρόγραμμά σας θα διαβάζει από το standard input ένα κατευθυνόμενο γράφημα που αναπαριστά τα ζεύγη των ομάδων για τις οποίες το μεταξύ τους αποτέλεσμα είναι 100% προβλέψιμο. Στην πρώτη γραμμή, θα δίνεται το πλήθος N των ομάδων, και θα ακολουθούν N γραμμές. Στην i-οστή γραμμή, ο πρώτος αριθμός d_i θα δηλώνει από πόσες ομάδες χάνει σίγουρα η ομάδα i (μπορεί να είναι 0), και θα ακολουθούν d_i αριθμοί, που θα δηλώνουν ποιες είναι αυτές οι ομάδες. Π.χ. στο παράδειγμα, έχουμε 5 ομάδες, η 1η χάνει από μία ομάδα, την 5, η 2η χάνει από τρεις ομάδες, τις 1, 4, και 5, η 3η χάνει από δύο ομάδες, τις 1 και 4, η 4η χάνει από μία ομάδα, την 1, και η 5η χάνει από μία ομάδα, την 3.

Παρατηρήσεις: Τα δεδομένα για τη σχέση των αποτελεσμάτων που είναι προβλέψιμα θα περιγράφουν μια σχέση που είναι αντισυμμετρική και δεν είναι κατ' ανάγκη ούτε πλήρης ούτε μεταβατική. Δηλαδή, όσον αφορά στην αντισυμμετρικότητα, αν υπάρχει μια ομάδα a χάνει από μια ομάδα b, η b δεν θα χάνει από την a. Όσον αφορά στην πληρότητα, μπορεί να υπάρχουν ζευγάρια για τα οποία δεν γνωρίζουμε με σιγουριά ποια ομάδα χάνει από την άλλη. Όσον αφορά στην μεταβατικότητα, μπορεί να γνωρίζουμε ότι μια ομάδα a χάνει από μια ομάδα b, και ότι η b χάνει από μια ομάδα c, και να μην γνωρίζουμε με σιγουριά αν η a χάνει από την c (ή μπορεί ακόμη και να γνωρίζουμε ότι η c χάνει από την a).

Δεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμά σας πρέπει να τυπώνει στο standard output (στην πρώτη γραμμή) έναν ακέραιο, το πλήθος των ομάδων για τις οποίες μπορεί να "στηθεί" η διοργάνωση του κυπέλλου.

Περιορισμοί:

$3 \leq N \leq 30.000$
$3 \leq M \leq 10^6$
Όριο χρόνου εκτέλεσης: 1 sec.
Όριο μνήμης: 64 MB.

Παράδειγμα Εισόδου:

```
5
1 5
3 1 4 5
2 1 4
1 1
1 3
```

Παράδειγμα Εξόδου:

```
4
```

[1] **Εξήγηση Παραδείγματος:** Θέλουμε να πάμε από την πόλη 3 στην πόλη 6 και έχουμε 15 ώρες στη διάθεσή μας. Αν κινηθούμε αστραπιαία στους δρόμους $(3, 2)$ και $(2, 1)$, ουσιαστικά μηδενίζοντας τα αντίστοιχα μήκη, μπορούμε να φτάσουμε στην πόλη 6 σε 15 ώρες ακριβώς. Υπάρχουν και άλλοι συνδυασμοί ζευγαριών δρόμων στους οποίους αν κινηθούμε αστραπιαία, θα φτάσουμε έγκαιρα στην πόλη 6 (π.χ., $\{(1, 5), (5, 6)\}$ ή $\{(3, 2), (5, 6)\}$). Δεν υπάρχει όμως τρόπος να φτάσουμε έγκαιρα στην πόλη 6 κινούμενοι αστραπιαία σε έναν μόνο δρόμο.