# Quicksort

Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Μικροαλλαγές: Α. Παγουρτζής

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

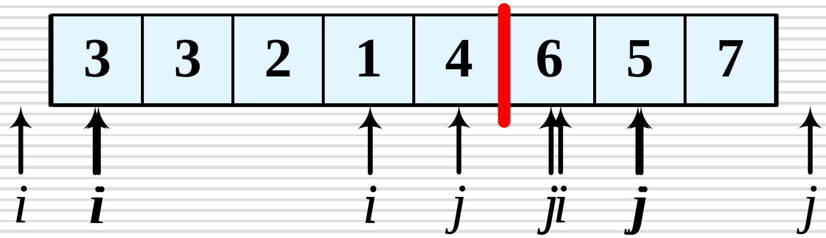
# Quicksort [Hoare, 62]

- Στοιχείο διαχωρισμού (pivot), π.χ. πρώτο, τυχαίο, …
- Αναδιάταξη και διαμέριση εισόδου σε δύο υπο-ακολουθίες:
  - Στοιχεία αριστερής υπο-ακολ. ≤ στοιχείο διαχωρισμού.
  - Στοιχεία δεξιάς υπο-ακολ. ≥ στοιχείο διαχωρισμού.
- Ταξινόμηση υπο-ακολουθιών αναδρομικά.
- Ακολουθία ταξινομημένη – όχι σύνθεση!

```
quickSort(int A[], int left, int right) {
   if (left >= right) return; // At most 1 element
   q = partition(A, left, right);
   quickSort(A, left, q);
   quickSort(A, q+1, right);   }
```

# Διαμέριση

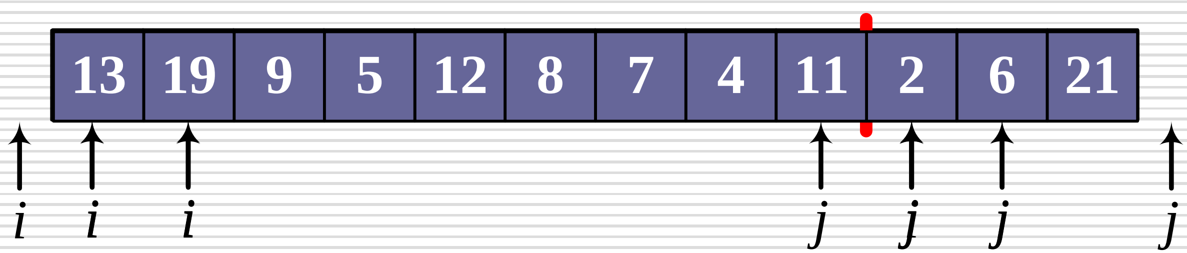
- Στοιχείο διαχωρισμού (pivot), π.χ. **πρώτο**, τυχαίο, …
- Διαμέριση σε ένα πέρασμα :
  - Σάρωση από αριστερά (με δείκτη *i*) μέχρι A[*i*] ≥ pivot.
  - Σάρωση από δεξιά (με δείκτη *j*) μέχρι A[*j*] ≤ pivot.
  - Αν δεν έχουν εξεταστεί όλα τα στοιχεία (*i* < *j*): αντιμετάθεση(A[*i*] , A[*j*]) και συνέχεια.
  - Αν έχουν εξεταστεί όλα: επιστροφή ορίου διαχωρισμού (δείκτη *j*).




**Στοιχείο διαχωρισμού : 5**

# Διαμέριση

```
partition(int A[], int left, int right) {
    int pivot = A[left]; i = left - 1; j = right + 1;
    while (1) {
        while (A[++i] < pivot) ;
        while (A[--j] > pivot) ;
        if (i < j) swap(A[i], A[j]);
        else return(j); }    }
```




Στοιχείο διαχωρισμού : **13**

# Διαμέριση

```
partition(int A[], int left, int right) {
    int pivot = A[left]; i = left - 1; j = right + 1;
    while (1) {
        while (A[++i] < pivot) ;
        while (A[--j] > pivot) ;
        if (i < j) swap(A[i], A[j]);
        else return(j); }   }
```

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 8 | 6 | 12 | 19 | 23 | 17 | 10 |

Στοιχείο διαχωρισμού : **10**

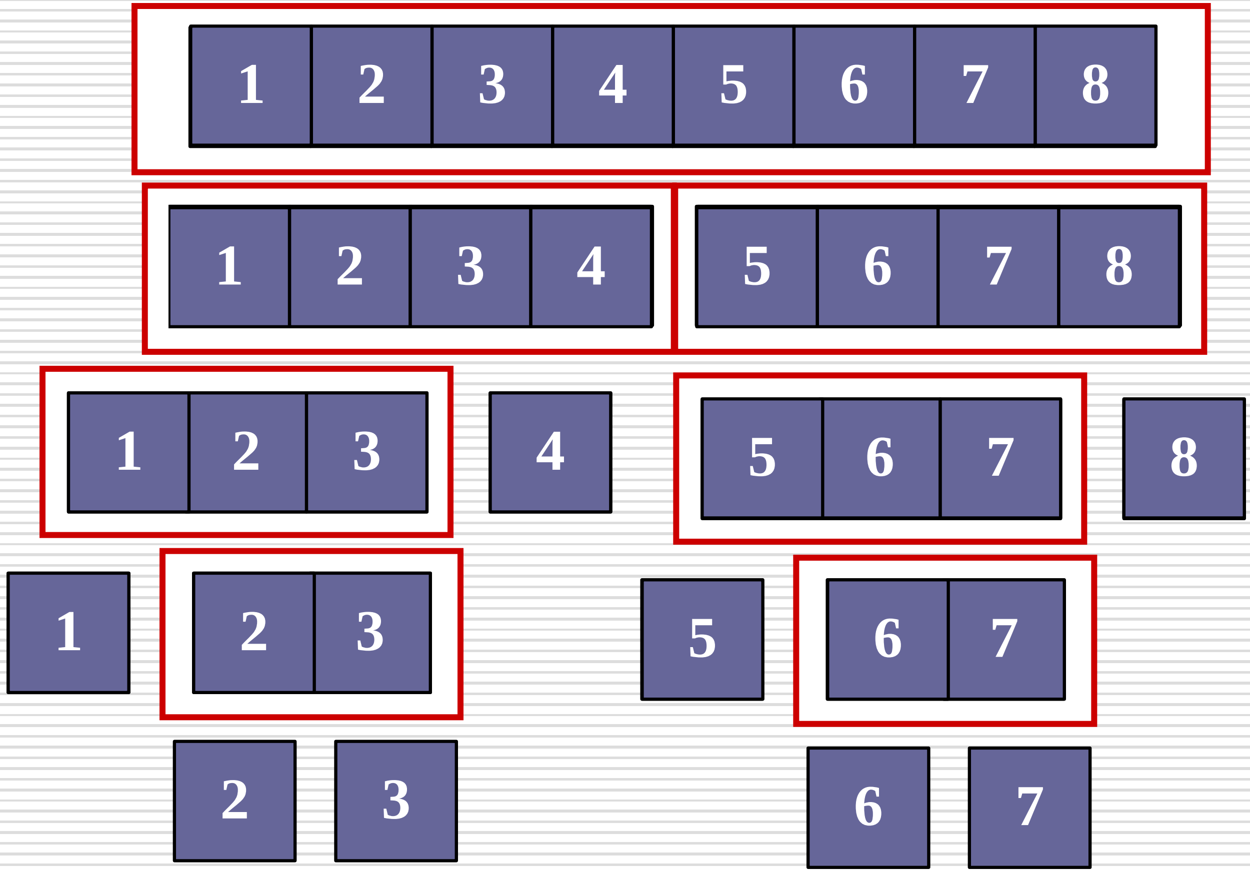
# Ανάλυση Διαχωρισμού

- Ορθότητα **partition** :
  - Διατηρεί και επεκτείνει αριστερή περιοχή με στοιχεία ≤ pivot και δεξιά περιοχή με στοιχεία ≥ pivot.
  - A[*i*] ≥ pivot : αριστερή περιοχή σταματά στο i-1.
  - A[*j*] ≤ pivot : δεξιά περιοχή σταματά στο j+1.
  - Ξένες περιοχές : αντιμετάθεση στοιχείων και συνέχεια.
  - Επικάλυψη : ολοκλήρωση διαμέρισης.
  - Τελικά τα στοιχεία αριστερά ≤ pivot και τα στοιχεία δεξιά ≥ pivot, **όπως απαιτείται.**
- Κάθε περιοχή ≥ 1 στοιχείο. **Quicksort τερματίζει.** (1 ≤ σημείο διαχωρισμού ≤ $n$ – 1)
  - Απαραίτητα: *i* και *j* σταματούν στο pivot.

# Ανάλυση Διαχωρισμού

- Χρόνος εκτέλεσης **partition** :
  - Κάθε στοιχείο συγκρίνεται με pivot μία φορά (εκτός από στοιχεία εκατέρωθεν σημείου χωρισμού).
  - Τελικά *i* και *j* «δείχνουν» είτε γειτονικές είτε ίδια θέση γιατί όπου πέρασε το *i* δεν συνεχίζει *j*.
  - Χρόνος εκτέλεσης **partition για n στοιχεία = Θ(n).**
- Μετά τον διαχωρισμό, στοιχεία δεν αλλάζουν «πλευρά» (δηλ. αριστερά μένουν αριστερά, δεξιά μένουν δεξιά).
- Υπάρχουν πολλές άλλες μορφές διαμέρισης, π.χ. pivot παίρνει τελική του θέση στον πίνακα, διαίρεση στα τρία, …

# Παράδειγμα Quicksort



# Ορθότητα Quicksort

- Απόδειξη ορθότητας **partition** :
  - Τερματισμός : μέγεθος υπο-ακολουθιών $\leq n - 1$.
  - Ταξινόμηση :
    - Αριστερά στοιχεία ≤ pivot ≤ δεξιά στοιχεία.
    - Επαγωγικά, αριστερή περιοχή και δεξιά περιοχή ταξινομημένες.
    - Συνολικά, πίνακας ταξινομημένος.

# Χρόνος Εκτέλεσης (χ.π.)

- Χρόνος εκτελ. αναδρομικών αλγ. με διατύπωση και λύση αναδρομικής εξίσωσης.
- Χρόνος εκτέλεσης **partition**($n$ στοιχεία) : $\Theta(n)$
- ***T*(*n*)** : χρόνος (χ.π.) για ταξινόμηση $n$ στοιχείων.
  - **Θ(*n*)** : αναδιάταξη και διαίρεση εισόδου.
  - ***T*(*k*)** : ταξινόμηση αριστερού τμήματος ($k$ στοιχεία).
  - ***T*(*n* – *k*)** : ταξινόμηση δεξιού τμήματος ($n - k$ στοιχεία).

$$T(n) = \Theta(n) + \max_{1 \leq k \leq n-1} \{T(k) + T(n-k)\}\,, \quad T(1) = \Theta(1)$$

# Χρόνος Εκτέλεσης (χ.π.)

$$T(n) = \Theta(n) + \max_{1 \le k \le n-1} \{T(k) + T(n-k)\}\,, \quad T(1) = \Theta(1)$$

- Χειρότερη περίπτωση : $k = 1$ ή $k = n - 1$ (σε κάθε κλήση).
  - Ουσιαστικά δεν γίνεται διαίρεση (μόνο αναδιάταξη) !
  - Partition «βοηθάει ελάχιστα» τον αλγόριθμο.

$$T(n) = \Theta(n) + T(n-1) + T(1)\,, \quad T(1) = \Theta(1)$$

$$T(n) = \Theta(n) + \Theta(n-1) + \Theta(n-2) + \cdots + \Theta(1) = \Theta(n^2)$$

- Στιγμιότυπα που quicksort χρειάζεται χρόνο $\Omega(n^2)$;

# Χρόνος Εκτέλεσης

- **Καλύτερη περίπτωση** : $k = n / 2$ (σε κάθε κλήση).
  - Ουσιαστικά τέλεια διαίρεση !
  - Partition «βοηθάει τα μέγιστα» !

$$T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n) \Rightarrow T(n) = \Theta(n \log n)$$

- Αν $\min\{k, n-k\} \geq n/4$ (περίπου ίδιο μεγέθος)

$$T(n) = \Theta(n) + T(n/4) + T(3n/4) \Rightarrow T(n) = \Theta(n \log n)$$

- Χειρότερη και καλύτερη περίπτωση εξαιρετικά σπάνιες !
- Αν τυχαίο στοιχείο pivot,
  πιθανότητα διαίρεσης ($n$ / 4, 3$n$ / 4) ή καλύτερης ≥ **1/2** !

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |

# Πιθανοτική Quicksort

- Τυχαίο στοιχείο σαν στοιχείο χωρισμού (pivot).
- Για κάθε $k \in [n-1]$,
  πιθανότητα διαίρεσης ($k$, $n$ – $k$) = $\dfrac{1}{n-1}$

```
randomQuickSort(int A[], int left, int right) {
   if (left >= right) return; // At most 1 element
   pivot = random(left, right);
   swap(A[left], A[pivot]);
   q = partition(A, left, right);
   randomQuickSort(A, left, q);
   randomQuickSort(A, q+1, right);   }
```

# Χρόνος Εκτέλεσης (μ.π.)

$$S(n) = \Theta(n) + \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}[S(k) + S(n-k)]$$

$$= \Theta(n) + \frac{2}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} S(k)$$

- Λύση αναδρομής : $S(n) = \Theta(n \log n)$
  Αυτός ο χρόνος εκτέλεσης με μεγάλη πιθανότητα !
- Πιθανότητα διαμέρισης (*n* / 4, 3*n* / 4) ή καλύτερης ≥ **1/2** !
  - Κατά «μέσο όρο», κάθε 2 επίπεδα στο δέντρο της αναδρομής, έχουμε «επιτυχημένη» διαμέριση.
  - Σε κάθε επίπεδο, συνολικός χρόνος διαμέρισης Θ(*n*).
  - Θ(*n* log *n*) από «επιτυχημένες» διαμερίσεις +
    Θ(*n* log *n*) από «αποτυχημένες» διαμερίσεις .

# Χρόνος Εκτέλεσης (μ.π.)

- Πιθανότητα «αποτυχημένες» διαιρέσεις > $c \log n$ είναι εξαιρετικά μικρή !
  - Χρόνος εκτέλεσης $\Theta(n \log n)$ με **μεγάλη πιθανότητα** !
- Μέση περίπτωση δεν εξαρτάται από είσοδο ! Αφορά στη συμπεριφορά του αλγόριθμου.
- Εξαιρετικά μικρή πιθανότητα χειρότερης περίπτωσης.
  - Ανάλυση χειρότερης περίπτωσης δεν έχει νόημα !

# Πιθανοτικοί Αλγόριθμοι

- Ντετερμινιστικοί αλγόριθμοι:
  - Προκαθορισμένη συμπεριφορά για κάθε είσοδο.
  - Υπάρχει χειρότερη περίπτωση και μπορεί να συμβεί.
- Πιθανοτικοί αλγόριθμοι:
  - Συμπεριφορά από είσοδο και τυχαίες επιλογές.
  - Χρήση τυχαιότητας ώστε χειρότερη περίπτωση να συμβαίνει με πολύ μικρή πιθανότητα.
  - Ποια είναι η χειρότερη περ. για πιθανοτική quicksort;
  - Χρόνος (αποδοτικότητα) εκτ. κατά μέση τιμή (expectation). Ορθότητα με μεγάλη πιθανότητα.
  - Las-Vegas: αποτέλεσμα σωστό, μέσος χρόνος πολυων/κός.
  - Monte-Carlo: αποτέλεσμα σωστό μεγάλη πιθανότητα, χρόνος πολυωνυμικός εγγυημένα.

# Σύνοψη

- Quicksort:
  - Πιθανοτικός αλγόριθμος.
  - Χρόνος χειρότερης περ.: $\Theta(\, n^2 \,)$
  - Χρόνος μέσης περίπτωσης: $\Theta(n \log n)$
  - Χώρος: σχεδόν in-place.
  - Αναδρομή καθυστερεί και απαιτεί μνήμη.
  - Εύκολη και γρήγορη υλοποίηση.
  - Γρηγορότερος αλγόριθμος στην πράξη (για $n \geq 30$).

# Σύνοψη

| **Αλγόριθμος** | Καλύτερη | Μέση | Χειρότερη | Χώρος |
|---|---|---|---|---|
| BubbleS | $\Omega(n)$ | $O(n^2)$ | $O(n^2)$ | $O(1)$ |
| InsertionS | $\Omega(n)$ | $O(n^2)$ | $O(n^2)$ | $O(1)$ |
| SelectionS | $\Omega(n)$ | $O(n^2)$ | $O(n^2)$ | $O(1)$ |
| HeapS | $\Omega(n \log n)$ | $O(n \log n)$ | $O(n \log n)$ | $O(1)$ |
| MergeS | $\Omega(n \log n)$ | $O(n \log n)$ | $O(n \log n)$ | $O(n)$ |
| QuickS | $\Omega(n \log n)$ | $O(n \log n)$ | $O(n^2)$ | ? |