

Μέγιστη Ροή – Ελάχιστη Τομή

Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

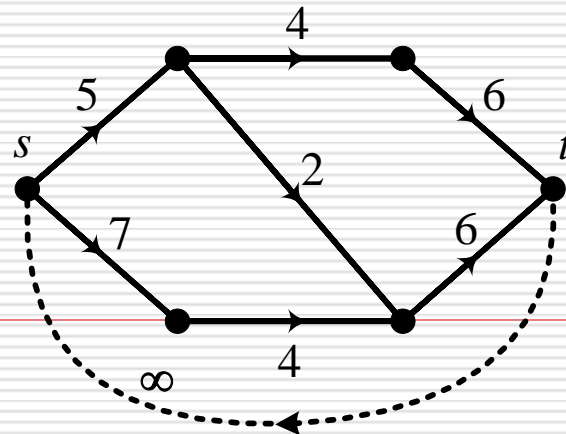
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



Δίκτυα και Ροές

- **Δίκτυο** : κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$.
 - Πηγή s , προορισμός t , χωρητικότητα ακμής b_e .



Δίκτυα και Ροές

□ **Δίκτυο** : κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$.

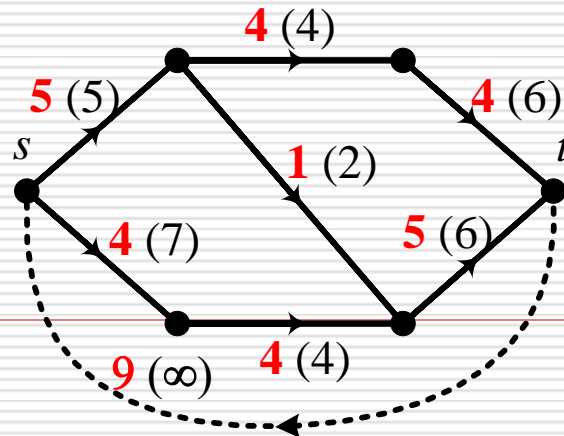
■ Πηγή s , προορισμός t , χωρητικότητα ακμής b_e .

□ $s - t$ ροή μεγέθους d : $f : E \mapsto \mathbb{R}_+$:

■ Χωρητικότητα: $\forall e \in E \quad f_e \leq b_e$

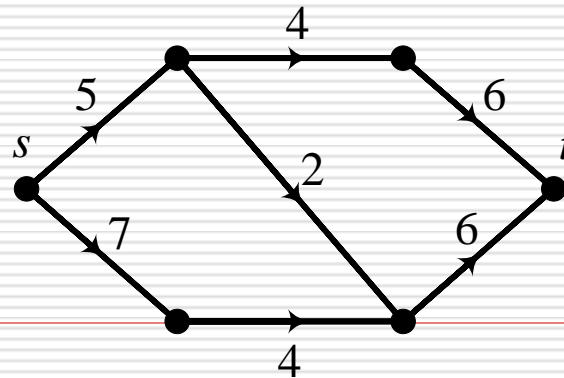
■ Διατήρηση ροής: $\forall v \in V \quad \sum_{e \in \text{in}(v)} f_e = \sum_{e \in \text{out}(v)} f_e$

■ Μέγεθος: $f_{ts} = d$



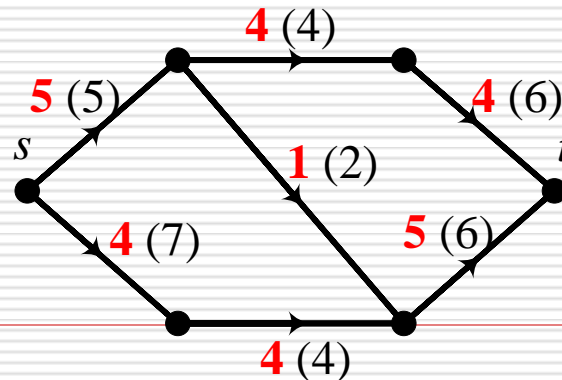
Μέγιστη $s - t$ Ροή

- Πρόβλημα **Μέγιστης $s - t$ Ροής** (Max-Flow):
 - Δεδομένου δικτύου $G(V, E, s, t, b)$



Μέγιστη $s - t$ Ροή

- Πρόβλημα **Μέγιστης $s - t$ Ροής** (Max-Flow):
 - Δεδομένου δικτύου $G(V, E, s, t, b)$
 - Υπολόγισε $s - t$ ροή με μέγιστη τιμή.



Μέγιστη $s - t$ Ροή

- Πρόβλημα **Μέγιστης $s - t$ Ροής** (Max-Flow):
- Δεδομένου δικτύου $G(V, E, s, t, b)$
 - Υπολόγισε $s - t$ ροή με μέγιστη τιμή.

$$\max f_{ts}$$

$$\text{s.t. } f_e \leq b_e$$

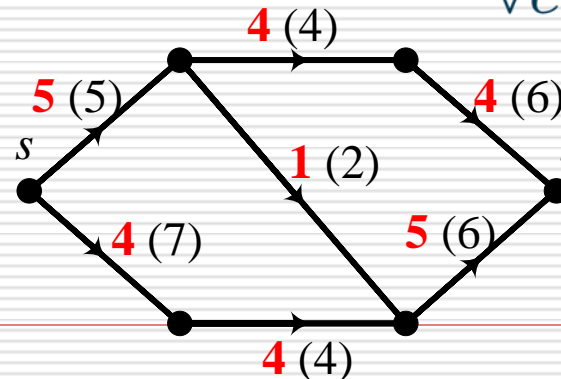
$$\forall e \in E$$

$$\sum_{e \in \text{in}(v)} f_e - \sum_{e \in \text{out}(v)} f_e \leq 0$$

$$\forall v \in V$$

$$f_e \geq 0$$

$$\forall e \in E$$

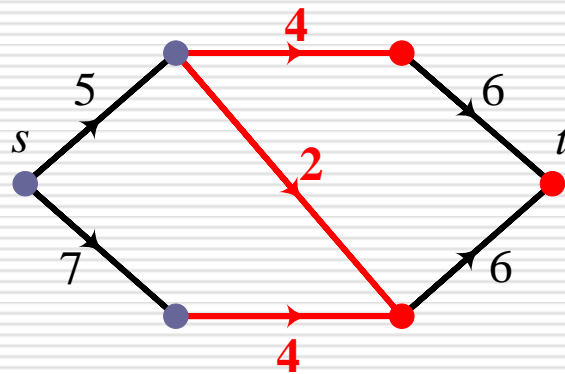


s - t Τομή

□ s - t τομή χωρητικότητας d :

■ Διαμέριση $(S, V \setminus S)$ με $s \in S$ και $t \in V \setminus S$.

■ Χωρητικότητα $b(S, V \setminus S) = \sum_{(u,v):u \in S, v \notin S} b_{uv} = d$

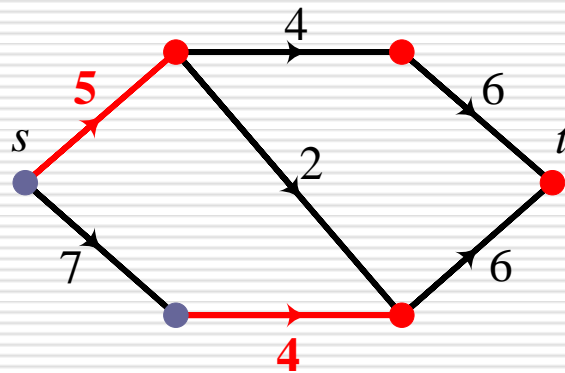


s - t Τομή

□ *s - t* τομή χωρητικότητας *d* :

■ Διαμέριση $(S, V \setminus S)$ με $s \in S$ και $t \in V \setminus S$.

■ Χωρητικότητα $b(S, V \setminus S) = \sum_{(u,v):u \in S, v \notin S} b_{uv} = d$



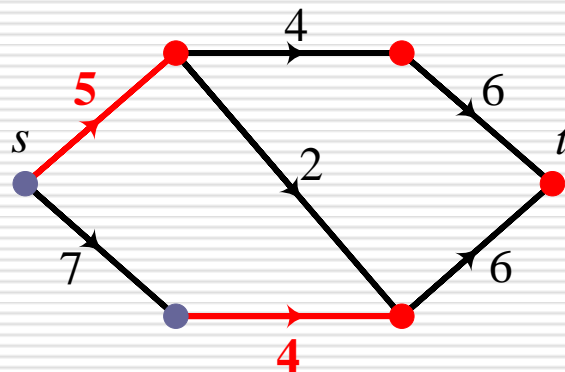
s - t Τομή

□ s - t τομή χωρητικότητας d :

■ Διαμέριση $(S, V \setminus S)$ με $s \in S$ και $t \in V \setminus S$.

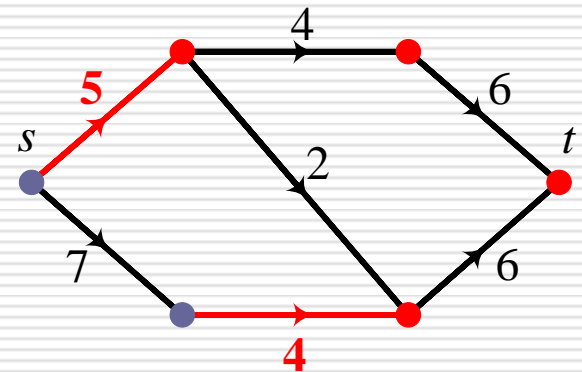
■ Χωρητικότητα $b(S, V \setminus S) = \sum_{(u,v):u \in S, v \notin S} b_{uv} = d$

■ Ακμές χωρητικότητας d που χωρίζουν s από t .



Ελάχιστη $s-t$ Τομή

- Πρόβλημα **Ελάχιστης $s - t$ Τομής** (Min $s-t$ Cut):
 - Δεδομένου δικτύου $G(V, E, s, t, b)$
 - Υπολόγισε $s - t$ τομή με ελάχιστη χωρητικότητα.



Ελάχιστη $s-t$ Τομή

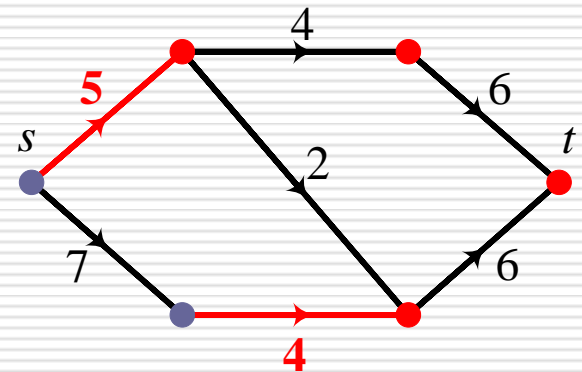
- Πρόβλημα **Ελάχιστης $s - t$ Τομής** (Min $s-t$ Cut):
- Δεδομένου δικτύου $G(V, E, s, t, b)$
 - Υπολόγισε $s - t$ τομή με ελάχιστη χωρητικότητα.

$$\min \sum_{(u,v) \in E} d_{uv} b_{uv}$$

$$\text{s.t. } d_{uv} - p_u + p_v \geq 0 \quad \forall (u, v) \in E$$

$$p_s - p_t \geq 1$$

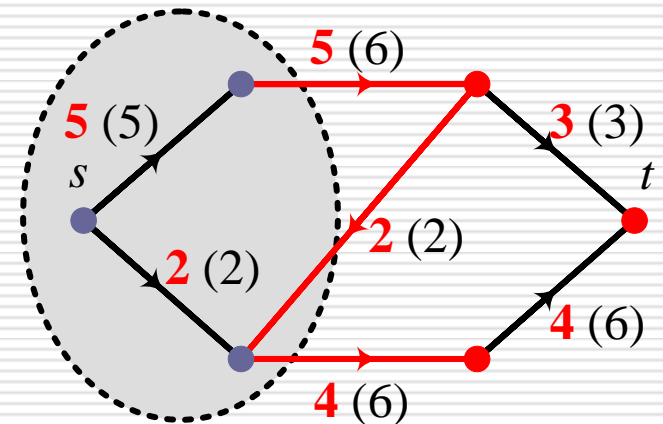
$$d_{uv}, p_v \geq 0$$



Ροές και Τομές

□ Έστω ροή f και τομή $(S, V \setminus S)$.

$$f(S, V \setminus S) = \sum_{v \in S, u \notin S} f_{vu} - \sum_{v \in S, u \notin S} f_{uv}$$



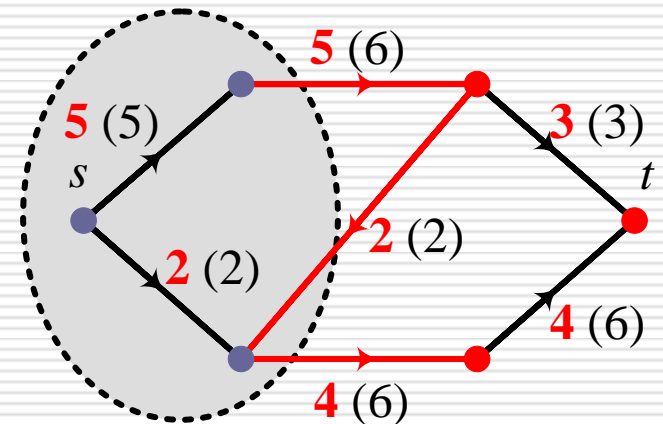
Ροές και Τομές

- Έστω ροή f και τομή $(S, V \setminus S)$.

$$f(S, V \setminus S) = \sum_{v \in S, u \notin S} f_{vu} - \sum_{v \in S, u \notin S} f_{uv}$$

- Κάθε $s - t$ ροή f και $s - t$ τομή $(S, V \setminus S)$:

$$f(S, V \setminus S) \leq b(S, V \setminus S)$$



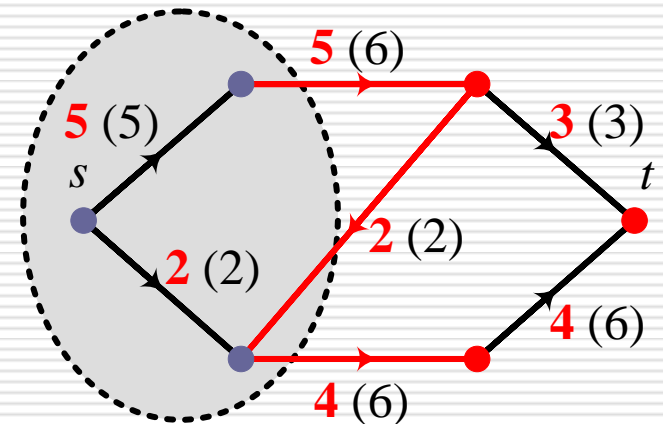
Ροές και Τομές

- Έστω ροή f και τομή $(S, V \setminus S)$.

$$f(S, V \setminus S) = \sum_{v \in S, u \notin S} f_{vu} - \sum_{v \in S, u \notin S} f_{uv}$$

- Κάθε $s - t$ ροή f και $s - t$ τομή $(S, V \setminus S)$:

$$f_{ts} = f(S, V \setminus S) \leq b(S, V \setminus S)$$



Ροές και Τομές

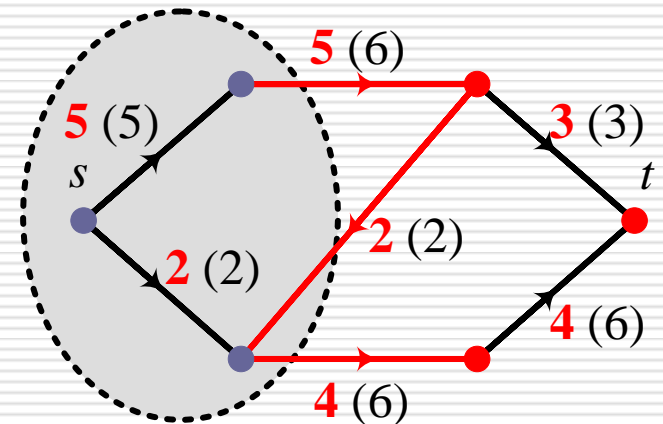
- Έστω ροή f και τομή $(S, V \setminus S)$.

$$f(S, V \setminus S) = \sum_{v \in S, u \notin S} f_{vu} - \sum_{v \in S, u \notin S} f_{uv}$$

- Κάθε $s - t$ ροή f και $s - t$ τομή $(S, V \setminus S)$:

$$f_{ts} = f(S, V \setminus S) \leq b(S, V \setminus S)$$

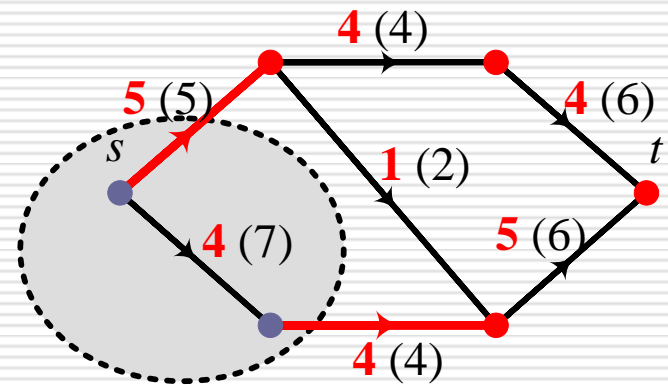
- **Μέγιστη $s - t$ ροή**
 \leq ελάχιστη $s - t$ τομή.



Μέγιστη Ροή και Ελάχιστη Τομή

□ **Μέγιστη $s - t$ ροή = Ελάχιστη $s - t$ τομή!**

- Max-Flow – Min-Cut Θεώρημα.
- Ακμές ελάχιστης τομής **κορεσμένες** σε μέγιστη ροή.

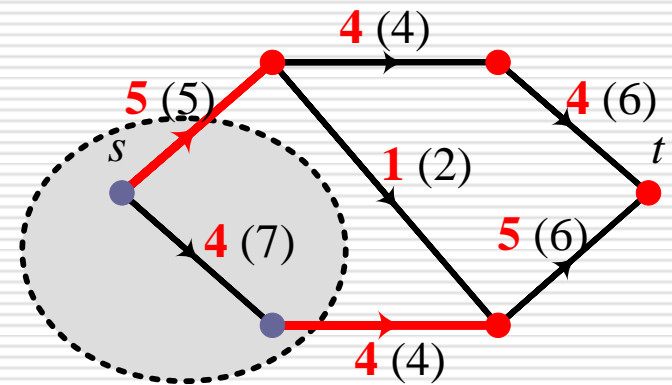


Μέγιστη Ροή και Ελάχιστη Τομή

□ **Μέγιστη $s - t$ ροή = Ελάχιστη $s - t$ τομή!**

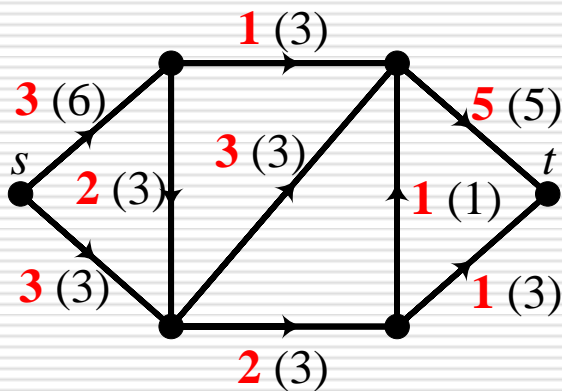
- Max-Flow – Min-Cut Θεώρημα.
- Ακμές ελάχιστης τομής
κορεσμένες σε μέγιστη ροή.

□ Μέγιστη ροή, ελάχιστη τομή:
συνεκτικότητα / μεταφορική
ικανότητα δικτύου.



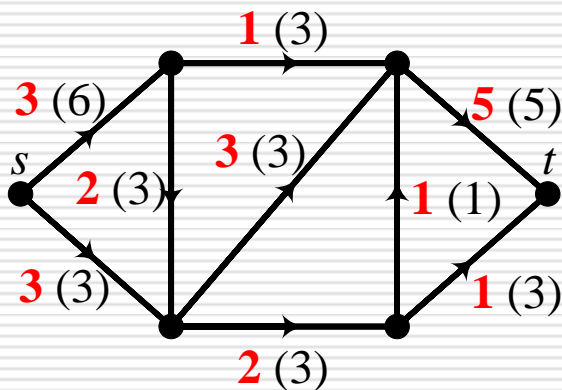
Υπολειμματικό Δίκτυο

□ Δίκτυο $G(V, E, b)$ και ροή f .



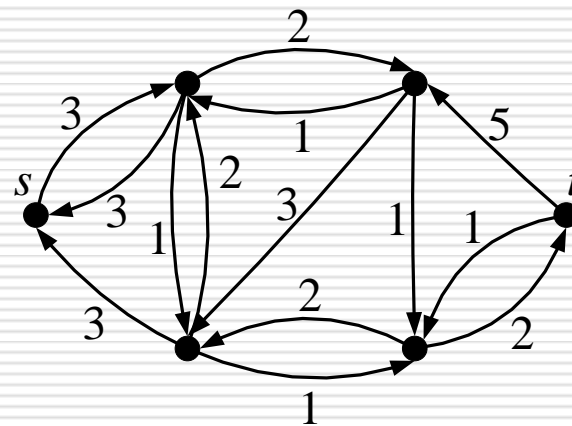
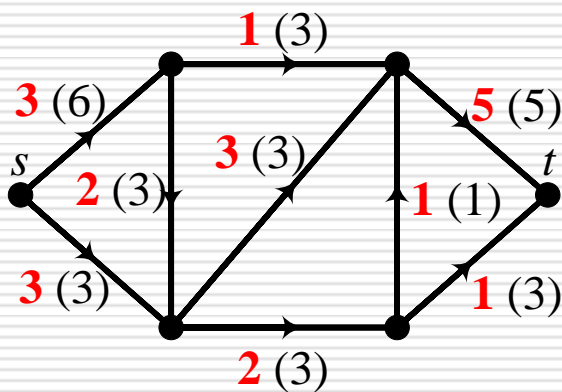
Υπολειμματικό Δίκτυο

- Δίκτυο $G(V, E, b)$ και ροή f .
- Υπολειμματικό δίκτυο $G_f(V, E_f, r_f)$:
 - Χωρητικότητα (μπρος-ακμές): $\forall (u, v) \in E \quad r_{uv} = b_{uv} - f_{uv}$
 - Ροή (πίσω-ακμές): $\forall (u, v) \in E \quad r_{vu} = f_{uv}$



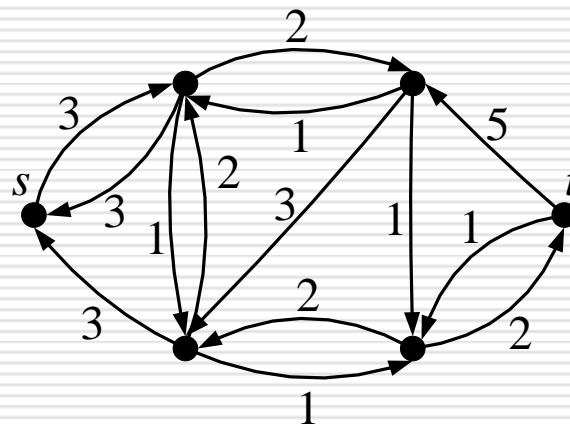
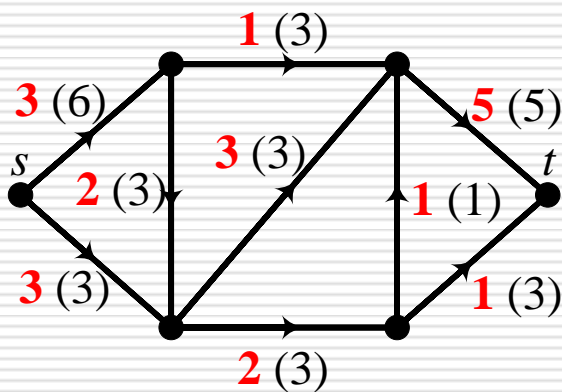
Υπολειμματικό Δίκτυο

- Δίκτυο $G(V, E, b)$ και ροή f .
- Υπολειμματικό δίκτυο $G_f(V, E_f, r_f)$:
 - Χωρητικότητα (μπρος-ακμές): $\forall (u, v) \in E \quad r_{uv} = b_{uv} - f_{uv}$
 - Ροή (πίσω-ακμές): $\forall (u, v) \in E \quad r_{vu} = f_{uv}$



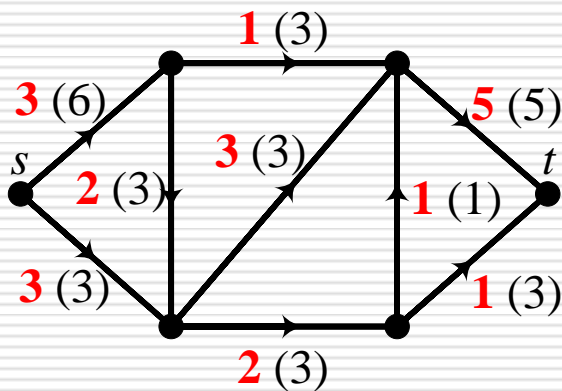
Υπολειμματικό Δίκτυο

- Δίκτυο $G(V, E, b)$ και ροή f .
- Υπολειμματικό δίκτυο $G_f(V, E_f, r_f)$:
 - Χωρητικότητα (μπρος-ακμές): $\forall (u, v) \in E \quad r_{uv} = b_{uv} - f_{uv}$
 - Ροή (πίσω-ακμές): $\forall (u, v) \in E \quad r_{vu} = f_{uv}$
- $s - t$ μονοπάτι στο υπολειμματικό: **επαυξητικό μονοπάτι.**



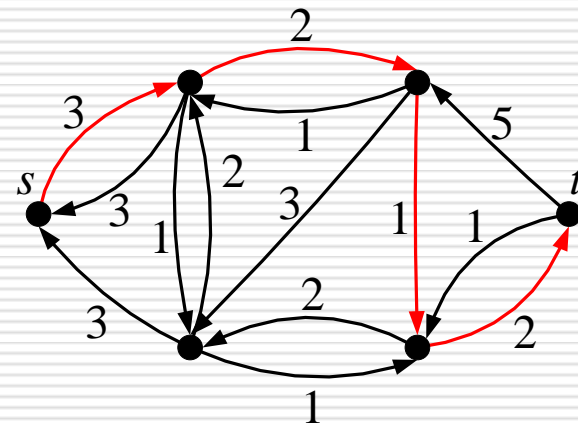
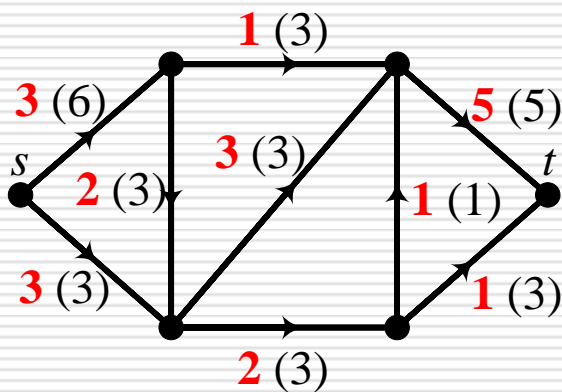
Χαρακτηρισμός Μέγιστης Ροής

□ Μέγιστη ροή ανν όχι επαυξητικό μονοπάτι.



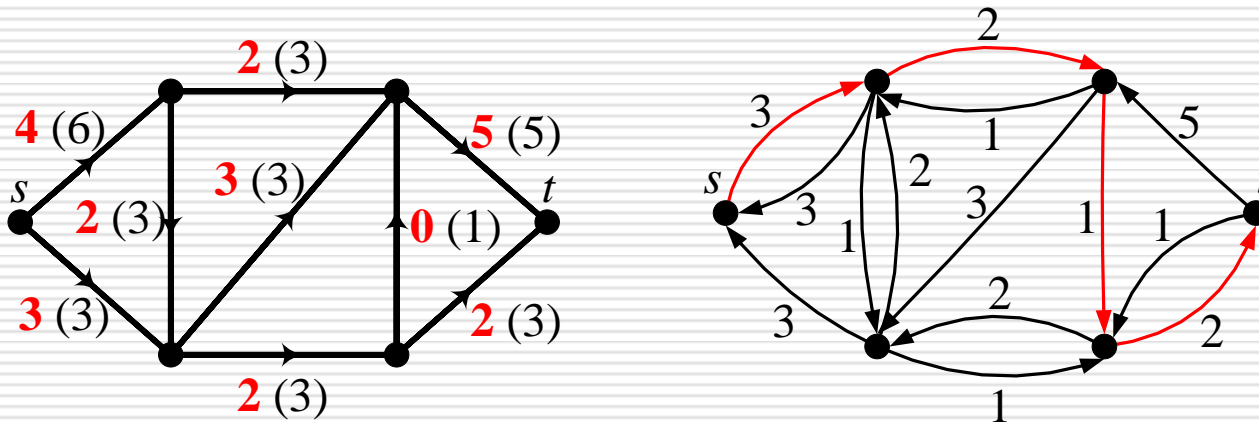
Χαρακτηρισμός Μέγιστης Ροής

- Μέγιστη ροή ανν όχι επαυξητικό μονοπάτι.
- Επαυξητικό μονοπάτι \Rightarrow αύξηση ροής \Rightarrow όχι μέγιστη ροή.



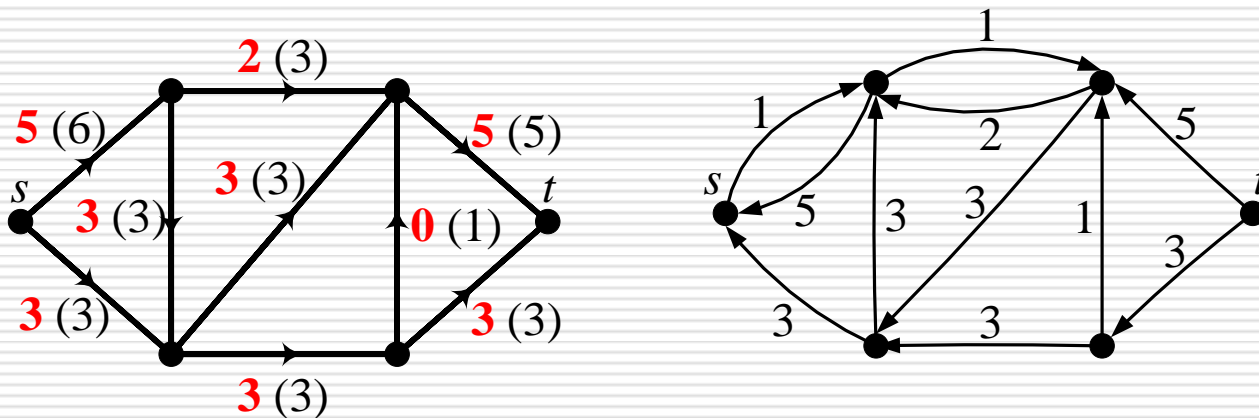
Χαρακτηρισμός Μέγιστης Ροής

- Μέγιστη ροή ανν όχι επαυξητικό μονοπάτι.
- Επαυξητικό μονοπάτι \Rightarrow αύξηση ροής \Rightarrow όχι μέγιστη ροή.



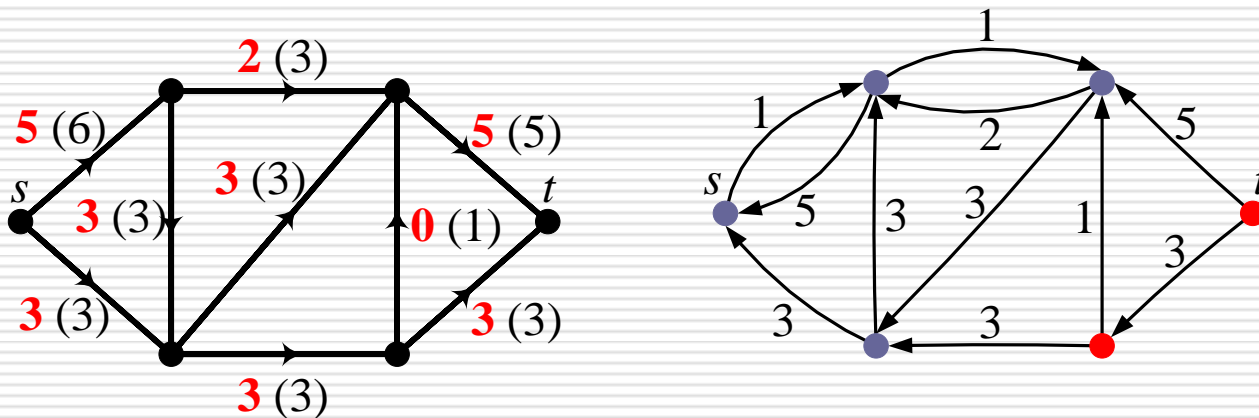
Χαρακτηρισμός Μέγιστης Ροής

- Μέγιστη ροή ανν όχι επαυξητικό μονοπάτι.
- Επαυξητικό μονοπάτι \Rightarrow αύξηση ροής \Rightarrow όχι μέγιστη ροή.
- Όχι επαυξητικό μονοπάτι :



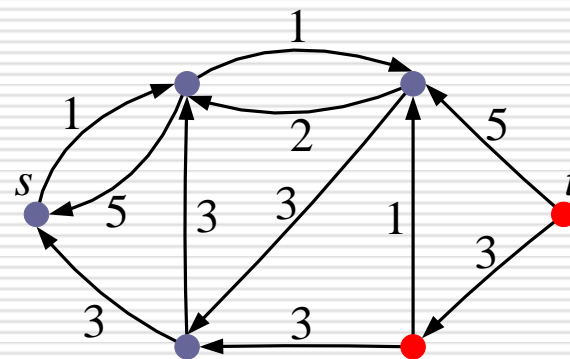
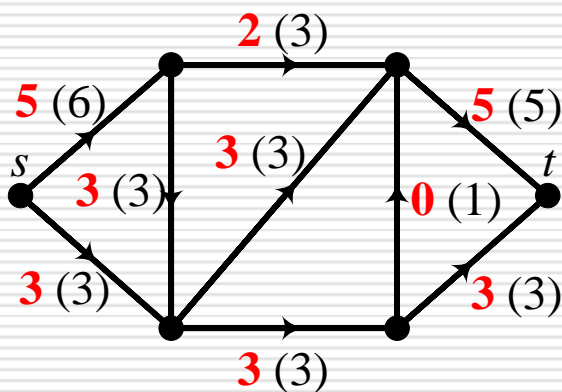
Χαρακτηρισμός Μέγιστης Ροής

- Μέγιστη ροή ανν όχι επαυξητικό μονοπάτι.
- Επαυξητικό μονοπάτι \Rightarrow αύξηση ροής \Rightarrow όχι μέγιστη ροή.
- Όχι επαυξητικό μονοπάτι :
 - Κορυφές προσπελάσιμες από s ορίζουν τομή χωρητικότητας ίσης με ροή.



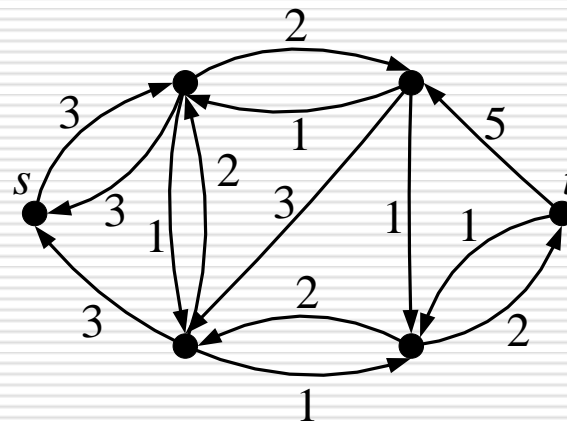
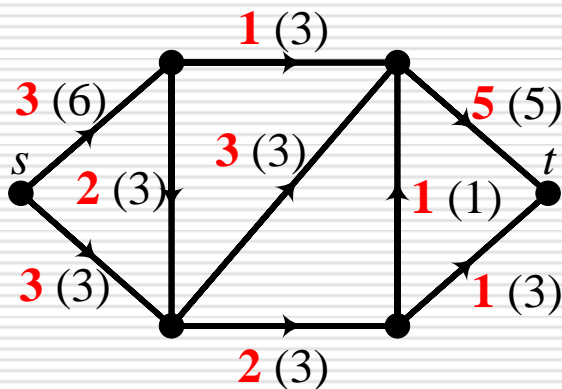
Χαρακτηρισμός Μέγιστης Ροής

- Μέγιστη ροή ανν όχι επαυξητικό μονοπάτι.
- Επαυξητικό μονοπάτι \Rightarrow αύξηση ροής \Rightarrow όχι μέγιστη ροή.
- Όχι επαυξητικό μονοπάτι :
 - Κορυφές προσπελάσιμες από s ορίζουν τομή χωρητικότητας ίσης με ροή.
 - Μέγιστη ροή και ελάχιστη τομή λόγω Θ . Max-Flow-Min-Cut!



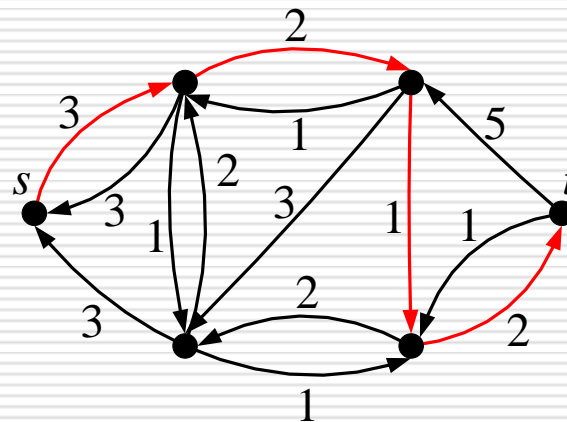
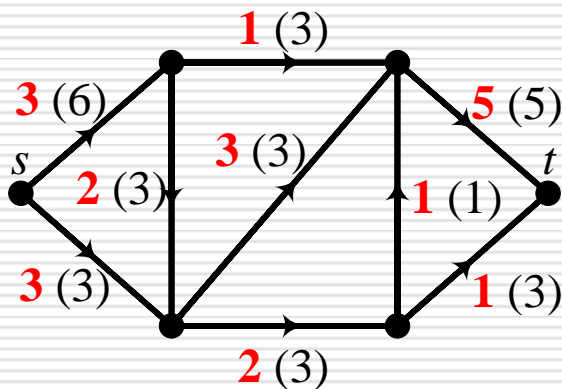
Αλγόριθμος Ford-Fulkerson

- Ενόσω **επαυξητικό μονοπ. p** στο υπολειμματικό,
 - Χωρητικότητα επαυξητικού $\delta \leftarrow \min_{e \in p} \{r_e\}$
 - **Αύξηση ροής κατά δ** στο p και ενημέρωση υπολειμματικού δικτύου.



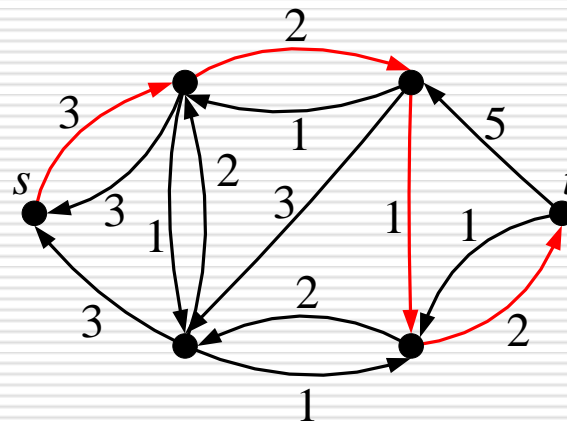
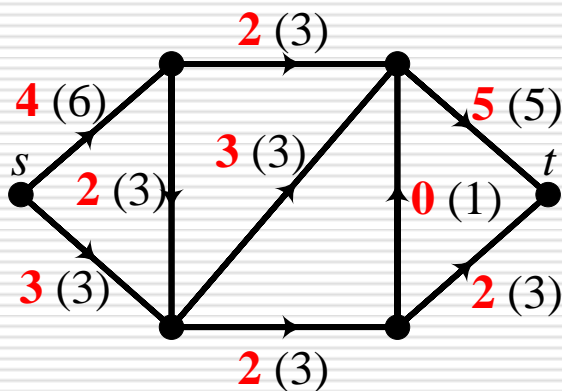
Αλγόριθμος Ford-Fulkerson

- Ενόσω **επαυξητικό μονοπ.** p στο υπολειμματικό,
 - Χωρητικότητα επαυξητικού $\delta \leftarrow \min_{e \in p} \{r_e\}$
 - **Αύξηση ροής κατά δ** στο p και ενημέρωση υπολειμματικού δικτύου.



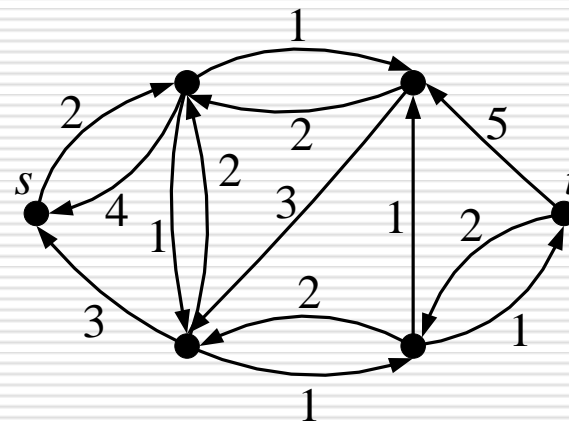
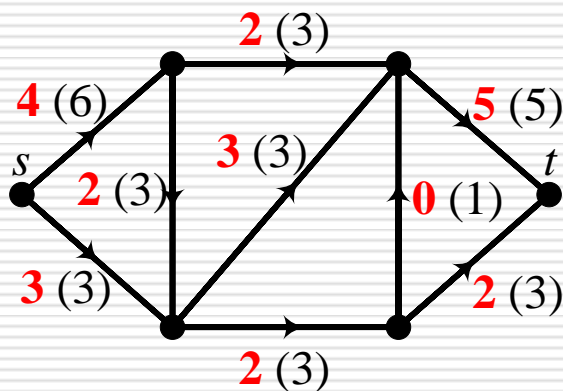
Αλγόριθμος Ford-Fulkerson

- Ενόσω **επαυξητικό μονοπ.** p στο υπολειμματικό,
 - Χωρητικότητα επαυξητικού $\delta \leftarrow \min_{e \in p} \{r_e\}$
 - **Αύξηση ροής κατά δ** στο p και ενημέρωση υπολειμματικού δικτύου.



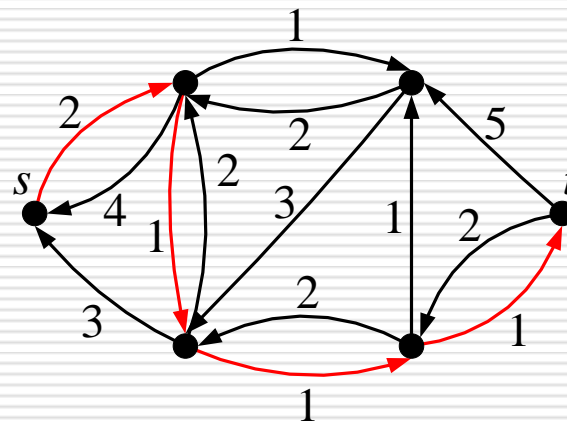
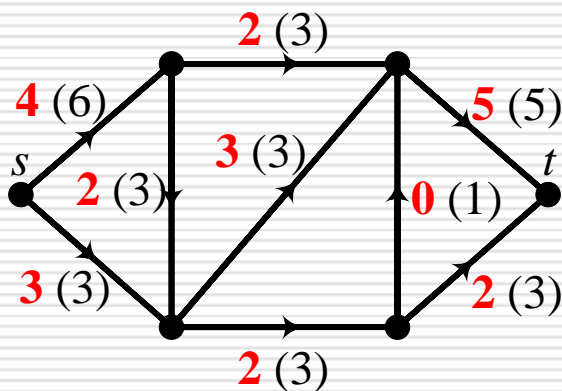
Αλγόριθμος Ford-Fulkerson

- Ενόσω **επαυξητικό μονοπ.** p στο υπολειμματικό,
 - Χωρητικότητα επαυξητικού $\delta \leftarrow \min_{e \in p} \{r_e\}$
 - **Αύξηση ροής κατά δ** στο p και ενημέρωση υπολειμματικού δικτύου.



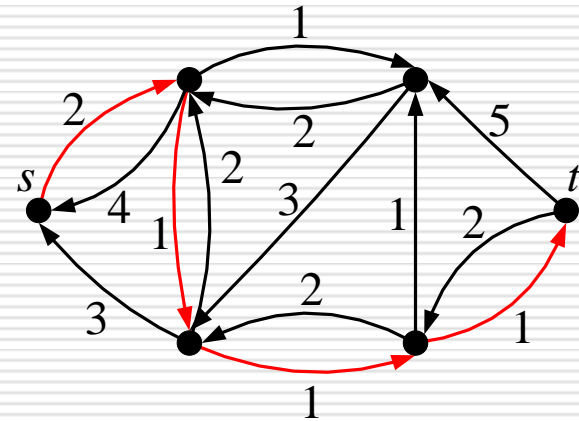
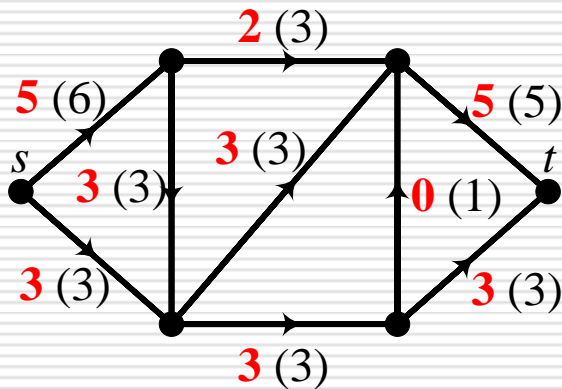
Αλγόριθμος Ford-Fulkerson

- Ενόσω **επαυξητικό μονοπ.** p στο υπολειμματικό,
 - Χωρητικότητα επαυξητικού $\delta \leftarrow \min_{e \in p} \{r_e\}$
 - **Αύξηση ροής κατά δ** στο p και ενημέρωση υπολειμματικού δικτύου.



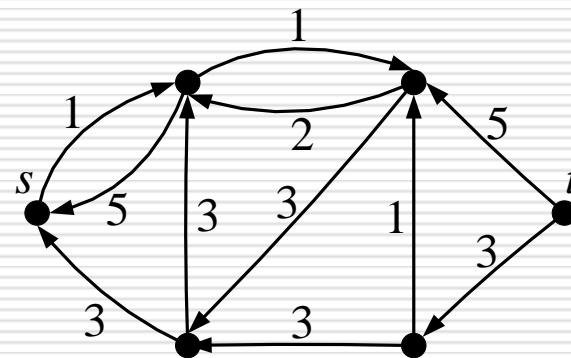
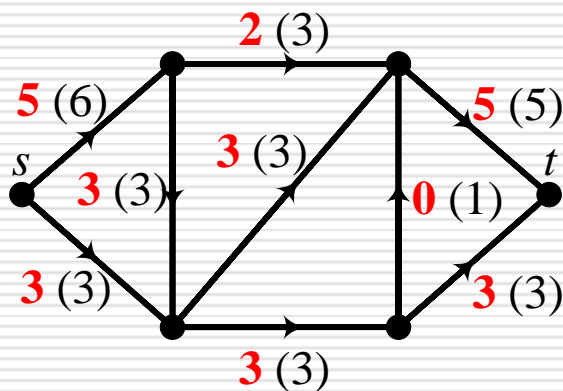
Αλγόριθμος Ford-Fulkerson

- Ενόσω **επαυξητικό μονοπ.** p στο υπολειμματικό,
 - Χωρητικότητα επαυξητικού $\delta \leftarrow \min_{e \in p} \{r_e\}$
 - **Αύξηση ροής κατά δ** στο p και ενημέρωση υπολειμματικού δικτύου.



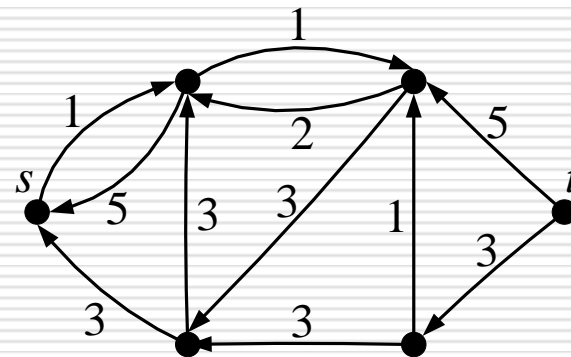
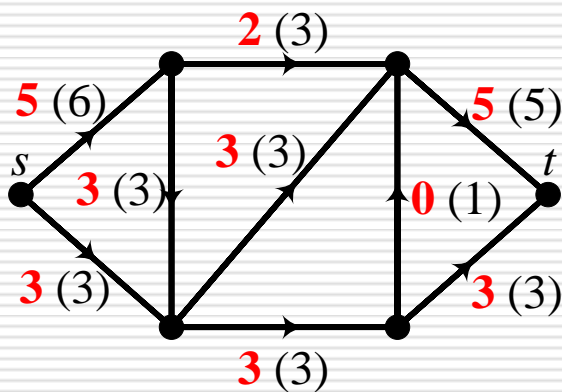
Αλγόριθμος Ford-Fulkerson

- Ενόσω **επαυξητικό μονοπ.** p στο υπολειμματικό,
 - Χωρητικότητα επαυξητικού $\delta \leftarrow \min_{e \in p} \{r_e\}$
 - **Αύξηση ροής κατά δ** στο p και ενημέρωση υπολειμματικού δικτύου.



Αλγόριθμος Ford-Fulkerson

- Ενόσω **επαυξητικό μονοπ.** p στο υπολειμματικό,
 - Χωρητικότητα επαυξητικού $\delta \leftarrow \min_{e \in p} \{r_e\}$
 - **Αύξηση ροής κατά δ** στο p και ενημέρωση υπολειμματικού δικτύου.
- Επαυξητικό μονοπάτι με π.χ. **DFS, BFS.**
 - Επαύξηση σε χρόνο $O(m)$.



Χρόνος Εκτέλεσης

□ Ακέραιες χωρητικότητες $\leq U$:

Χρόνος Εκτέλεσης

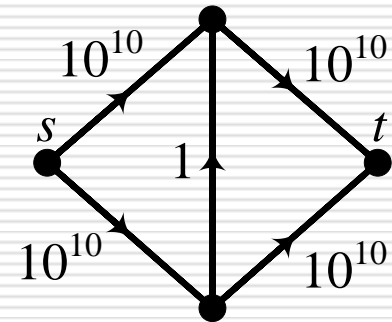
- Ακέραιες χωρητικότητες $\leq U$:
 - Επαύξηση αυξάνει ροή τουλάχιστον κατά 1.
 - Χρόνος εκτέλεσης $O(m^2 U)$.

Χρόνος Εκτέλεσης

- Ακέραιες χωρητικότητες $\leq U$:
 - Επαύξηση αυξάνει ροή τουλάχιστον κατά 1.
 - Χρόνος εκτέλεσης $O(m^2 U)$.
- Δίκτυο με ακέραιες χωρητικότητες έχει ακέραιη μέγιστη ροή.

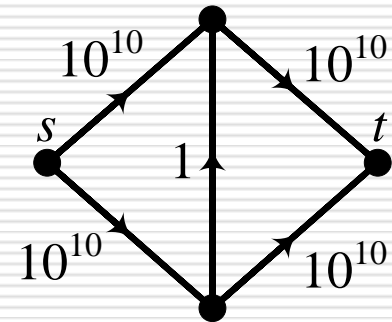
Χρόνος Εκτέλεσης

- Ακέραιες χωρητικότητες $\leq U$:
 - Επαύξηση αυξάνει ροή τουλάχιστον κατά 1.
 - Χρόνος εκτέλεσης $O(m^2 U)$.
- Δίκτυο με ακέραιες χωρητικότητες έχει ακέραιη μέγιστη ροή.
- Μπορεί εκθετικός χρόνος για μεγάλες χωρητικότητες !



Χρόνος Εκτέλεσης

- Ακέραιες χωρητικότητες $\leq U$:
 - Επαύξηση αυξάνει ροή τουλάχιστον κατά 1.
 - Χρόνος εκτέλεσης $O(m^2 U)$.
- Δίκτυο με ακέραιες χωρητικότητες έχει ακέραιη μέγιστη ροή.
- Μπορεί εκθετικός χρόνος για μεγάλες χωρητικότητες !
- Μπορεί να μην τερματίσει για άρρητες χωρητικότητες.



Βελτιώσεις Edmonds-Karp

- Επαυξητικό μονοπάτι με μέγιστη χωρητικότητα.

Βελτιώσεις Edmonds-Karp

- Επαυξητικό μονοπάτι με μέγιστη χωρητικότητα.
 - $2m$ επαυξήσεις \Rightarrow μέγιστη χωρητικότητα στο μισό.

Βελτιώσεις Edmonds-Karp

- Επαυξητικό μονοπάτι με μέγιστη χωρητικότητα.
 - $2m$ επαυξήσεις \Rightarrow μέγιστη χωρητικότητα στο μισό.
 - Αντί «μέγιστης», «αρκετά μεγάλης» χωρητικότητας:
 - Υπολειμματικό γράφημα μόνο με χωρητικότητες $\geq \Delta$.
 - Αν όχι επαυξητικό μονοπάτι, $\Delta \leftarrow \Delta / 2$.

Βελτιώσεις Edmonds-Karp

- Επαυξητικό μονοπάτι με μέγιστη χωρητικότητα.
 - $2m$ επαυξήσεις \Rightarrow μέγιστη χωρητικότητα στο μισό.
 - Αντί «μέγιστης», «αρκετά μεγάλης» χωρητικότητας:
 - Υπολειμματικό γράφημα μόνο με χωρητικότητες $\geq \Delta$.
 - Αν όχι επαυξητικό μονοπάτι, $\Delta \leftarrow \Delta / 2$.
 - Χρόνος εκτέλεσης $O(m^2 \log U)$.

Βελτιώσεις Edmonds-Karp

- Επαυξητικό μονοπάτι με μέγιστη χωρητικότητα.
 - $2m$ επαυξήσεις \Rightarrow μέγιστη χωρητικότητα στο μισό.
 - Αντί «μέγιστης», «αρκετά μεγάλης» χωρητικότητας:
 - Υπολειμματικό γράφημα μόνο με χωρητικότητες $\geq \Delta$.
 - Αν όχι επαυξητικό μονοπάτι, $\Delta \leftarrow \Delta / 2$.
 - Χρόνος εκτέλεσης $O(m^2 \log U)$.
- Επαυξητικό μονοπάτι ελάχιστου μήκους (ακμών).

Βελτιώσεις Edmonds-Karp

- Επαυξητικό μονοπάτι με μέγιστη χωρητικότητα.
 - $2m$ επαυξήσεις \Rightarrow μέγιστη χωρητικότητα στο μισό.
 - Αντί «μέγιστης», «αρκετά μεγάλης» χωρητικότητας:
 - Υπολειμματικό γράφημα μόνο με χωρητικότητες $\geq \Delta$.
 - Αν όχι επαυξητικό μονοπάτι, $\Delta \leftarrow \Delta / 2$.
 - Χρόνος εκτέλεσης $O(m^2 \log U)$.
- Επαυξητικό μονοπάτι ελάχιστου μήκους (ακμών).
 - Υπολογισμός με BFS σε χρόνο $O(m)$.
 - #επαυξήσεων $O(n m)$, χρόνος εκτέλεσης $O(n m^2)$.

Βελτιώσεις Edmonds-Karp

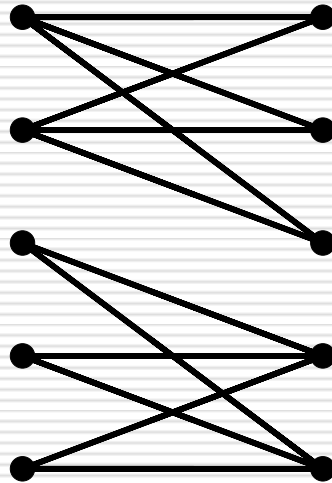
- Επαυξητικό μονοπάτι με μέγιστη χωρητικότητα.
 - $2m$ επαυξήσεις \Rightarrow μέγιστη χωρητικότητα στο μισό.
 - Αντί «μέγιστης», «αρκετά μεγάλης» χωρητικότητας:
 - Υπολειμματικό γράφημα μόνο με χωρητικότητες $\geq \Delta$.
 - Αν όχι επαυξητικό μονοπάτι, $\Delta \leftarrow \Delta / 2$.
 - Χρόνος εκτέλεσης $O(m^2 \log U)$.
- Επαυξητικό μονοπάτι ελάχιστου μήκους (ακμών).
 - Υπολογισμός με BFS σε χρόνο $O(m)$.
 - #επαυξήσεων $O(n m)$, χρόνος εκτέλεσης $O(n m^2)$.
 - Βελτίωση Dinic: υπολογισμός με BFS σε χρόνο $O(n)$!
 - Χρόνος εκτέλεσης $O(n^2 m)$.

Βελτιώσεις Edmonds-Karp

- Επαυξητικό μονοπάτι με μέγιστη χωρητικότητα.
 - $2m$ επαυξήσεις \Rightarrow μέγιστη χωρητικότητα στο μισό.
 - Αντί «μέγιστης», «αρκετά μεγάλης» χωρητικότητας:
 - Υπολειμματικό γράφημα μόνο με χωρητικότητες $\geq \Delta$.
 - Αν όχι επαυξητικό μονοπάτι, $\Delta \leftarrow \Delta / 2$.
 - Χρόνος εκτέλεσης $O(m^2 \log U)$.
- Επαυξητικό μονοπάτι ελάχιστου μήκους (ακμών).
 - Υπολογισμός με BFS σε χρόνο $O(m)$.
 - #επαυξήσεων $O(nm)$, χρόνος εκτέλεσης $O(nm^2)$.
 - Βελτίωση Dinic: υπολογισμός με BFS σε χρόνο $O(n)$!
 - Χρόνος εκτέλεσης $O(n^2m)$.
- Καλύτεροι αλγόριθμοι με blocking-flow και push-relabel τεχνικές έχουν χρόνους $O(nm \log n)$ και $O(n^3)$ αντιστ.

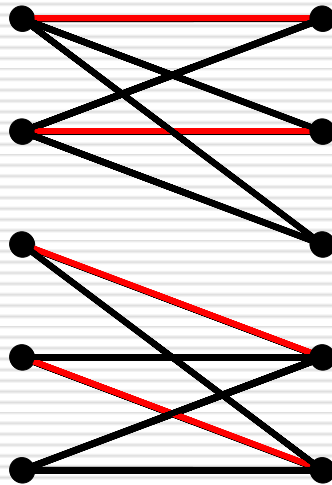
Μέγιστο Ταίριασμα

- Διμερές γράφημα: υπολογισμός **μέγιστου** αριθμού **ακμών χωρίς κοινά άκρα** (ταίριασμα).



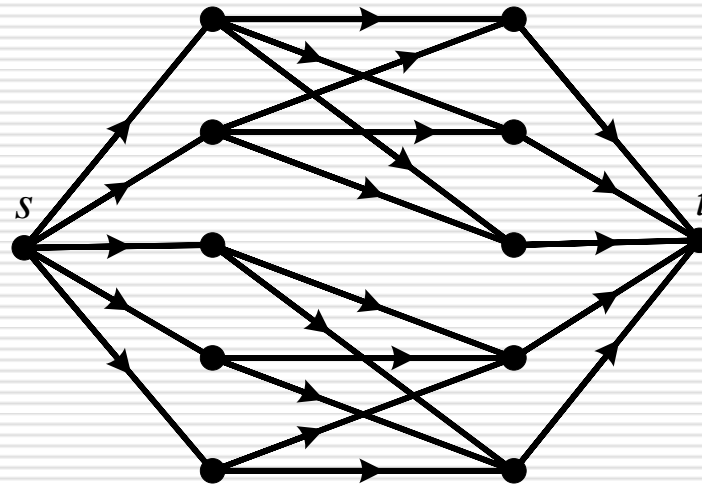
Μέγιστο Ταίριασμα

- Διμερές γράφημα: υπολογισμός **μέγιστου** αριθμού **ακμών χωρίς κοινά άκρα** (ταίριασμα).



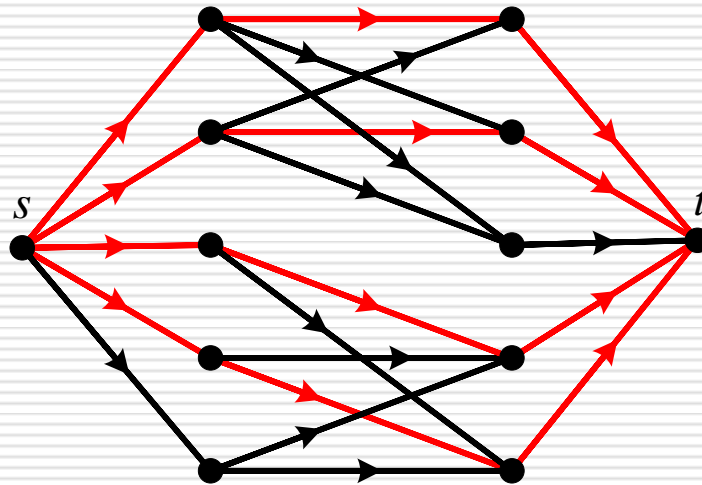
Μέγιστο Ταίριασμα

- Διμερές γράφημα: υπολογισμός **μέγιστου** αριθμού **ακμών χωρίς κοινά άκρα** (ταίριασμα).
- **Μέγιστη ροή**: πηγή s , προορισμός t , προσανατολισμός $s \rightarrow t$, **χωρητικότητα 1**.



Μέγιστο Ταίριασμα

- Διμερές γράφημα: υπολογισμός **μέγιστου** αριθμού **ακμών χωρίς κοινά άκρα** (ταίριασμα).
- **Μέγιστη ροή**: πηγή s , προορισμός t , προσανατολισμός $s \rightarrow t$, **χωρητικότητα 1**.



Μέγιστο Ταίριασμα

- Διμερές γράφημα: υπολογισμός **μέγιστου** αριθμού **ακμών χωρίς κοινά άκρα** (ταίριασμα).
- **Μέγιστη ροή**: πηγή s , προορισμός t , προσανατολισμός $s \rightarrow t$, **χωρητικότητα 1**.

