Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα
Διδάσκοντες: Αριστείδης Παγουρτζής, Δώρα Σουλίου, Ευστάθιος Ζάχος, Δημήτρης Σακαβάλας
2η Σειρά Προγραμματιστικών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 3/12/2017

Άσκηση 1: Διαδίδοντας την γνώση

Επειδή παρακολουθήσατε το μάθημα των Αλγορίθμων και σας άρεσε πολύ, θέλετε να διαδώσετε αυτά που μάθατε στον υπόλοιπο κόσμο. Αποφασίζετε λοιπόν να γυρίσετε με το ποδήλατό σας τα χωριά γύρω από το δικό σας αγοράζοντας και πουλώντας το βιβλίο του μαθήματος.

Σε κάθε χωριό εκτιμούν διαφορετικά τους αλγορίθμους, οπότε η τιμή του βιβλίου είναι διαφορετική. Ακόμη, επειδή τα βιβλία αχρηστεύονται με την χρήση, θέλετε να αγοράσετε και να πουλήσετε το βιβλίο το πολύ L φορές κατά τη διάρκεια αυτής της περιοδείας σας. Γνωρίζετε λοιπόν τις τιμές $c_1, c_2, \ldots, c_N$ του βιβλίου για τα N χωριά. Έστω ότι θα πραγματοποιήσετε $M \leq L$ αγοραπωλησίες και ότι για την i-οστή από αυτές θα αγοράσετε το βιβλίο στο χωριό a_i και θα το πουλήσετε στο χωριό b_i. Με το ποδήλατό σας μπορείτε να κουβαλήσετε μόνο ένα βιβλίο, επομένως τα διαστήματα $[a_i, b_i]$ δεν επικαλύπτονται, δηλαδή ισχύει: $1 \leq a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \ldots < a_M < b_M \leq N$. Στην περιοδεία σας, πρέπει να επισκεφθείτε τα χωριά με την σειρά, από το 1 έως το N, και για κάθε χωριό να αποφασίσετε εάν θα πραγματοποιήσετε κάποια αγορά ή πώληση. Επίσης, εάν επισκεφτείτε ένα χωριό, δεν μπορείτε να επιστρέψετε σε αυτό. Το συνολικό κέρδος στο τέλος της περιοδείας σας, πέρα φυσικά από την χαρά που παίρνετε από τη διάδοση της γνώσης, είναι:

$$G = \sum_{i=1}^{M} \left(c_{b_i} - c_{a_i}\right)$$

Επιθυμείτε να βρείτε πόσες φορές πρέπει να αγοράσετε και να πουλήσετε και πότε, ώστε να μεγιστοποιήσετε το κέρδος σας G. Πρέπει δηλαδή να υπολογίσετε την τιμή του M και τα όρια των διαστημάτων $[a_i, b_i]$ που σας δίνουν την μέγιστη τιμή του G.

Γράψτε ένα πρόγραμμα που θα διαβάζει τις N τιμές του βιβλίου στα χωριά και θα υπολογίζει το μέγιστο κέρδος G που μπορείτε να επιτύχετε.

Δεδομένα Εισόδου: Το πρόγραμμα θα διαβάζει από το standard input δύο γραμμές. Στην πρώτη γραμμή το πρόγραμμά σας θα διαβάζει δύο φυσικούς αριθμούς, το πλήθος των χωριών N και τον μέγιστο αριθμό αγοραπωλησιών L. Στην επόμενη γραμμή θα διαβάζει N φυσικούς αριθμούς, χωρισμένους με ένα κενό, που θα αντιστοιχούν στα c_i, δηλαδή στην τιμή του βιβλίου για το χωριό i.

Δεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμα θα τυπώνει στο standard output μία γραμμή που θα περιέχει έναν φυσικό αριθμό, το μέγιστο κέρδος G που μπορεί να επιτευχθεί με το πολύ L αγοραπωλησίες.

Περιορισμοί:	Παραδείγματα Εισόδου:	Παράδειγμα Εξόδου:
$1 \leq N \leq 10^5$ $1 \leq L \leq 10^3$ $1 \leq c_i \leq 10^4$	10 3 12 12 7 10 15 8 3 4 8 8	13
Όριο χρόνου εκτέλεσης: 1 sec. Όριο μνήμης: 64 MB.	5 2 10 9 8 7 6	0

Άσκηση 2: Κύριος Κρίοζοτ

Ο κύριος Κρίοζοτ είναι πολύ τακτικός πελάτης στο εστιατόριό σας και του αρέσει πάρα πολύ το φαΐ. Του αρέσει τόσο πολύ που έχει παραγγείλει ένα δείπνο με N εδέσματα αριθμημένα από το 1 ως το N. Ως σεφ, πρέπει να χωρίσετε τα εδέσματα σε πιάτα. Από τα τόσα χρόνια μαγειρικής, ξέρετε ότι αν αλλάξει η σειρά των εδεσμάτων, θα χαλάσουν οι γευστικοί συνδιασμοί που τόσο προσεκτικά έχετε ετοιμάσει. Για τον λόγο αυτό, έχετε αποφασίσει κάθε πιάτο να αποτελείται από μια συνεχόμενη σειρά από εδέσματα της μορφής $(i, i+1, \ldots, i+k)$.

Κάθε πιάτο i έχει ένα συντελεστή MIAM (MIAM: Ικανότητα Απόλαυσης Μεζέ) x_i. Αρχικά σκεφτήκατε ότι ο συντελεστής MIAM ενός πιάτου $(i, i+1, \ldots, i+k)$ υπολογίζεται αθροίζοντας τους συντελεστές των επιμέρους εδεσμάτων. Με άλλα λόγια, $x = x_i + x_{i+1} + \cdots + x_{i+k}$.

Όμως, χρόνια γευσιγνωστικών διακρίσεων σας έχουν οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι ο συντελεστής MIAM ενός πιάτου πρέπει να προσαρμοστεί. Ο προσαρμοσμένος συντελεστής x' υπολογίζεται, χρησιμοποιώντας την εξίσωση $x' = ax^2 + bx + c$, όπου a, b, c γνωστές παράμετροι $(a < 0)$, x ο αρχικός συντελεστής του πιάτου.

Σκοπός σας είναι να χωρίσετε τα εδέσματα σε πιάτα ώστε να μεγιστοποιήσετε το άθροισμα των προσαρμοσμένων συντελεστών όλων των πιάτων ώστε να μείνει ευχαριστημένος ο κύριος Κρίοζοτ και να σας προτιμήσει και για το επόμενο τεράστιο γεύμα του.

Για παράδειγμα, υποθέστε ότι έχετε 4 εδέσματα, $x_1 = 2, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4$. Επίσης, έστω ότι οι παράμετροι για την εξίσωση προσαρμογής του συντελεστή MIAM ενός πιάτου είναι $a = -1, b = 10, c = -20$. Σε αυτή την περίπτωση η καλύτερη λύση είναι να χωρίσετε τα εδέσματα σε τρία πιάτα: Το πρώτο πιάτο περιέχει τα εδέσματα 1 και 2, το δεύτερο πιάτο το έδεσμα 3, και το τρίτο πιάτο το έδεσμα 4. Ο συντελεστής MIAM των τριών πιάτων είναι 4, 3, 4 αντίστοιχα, και ο προσαρμοσμένος συντελεστής είναι 4, 1, 4. Ο συνολικός προσαρμοσμένος συντελεστής MIAM για αυτόν τον χωρισμό είναι 9 και μπορεί να ελεγχθεί ότι δεν υπάρχει καλύτερος.

Δεδομένα Εισόδου: Η είσοδος αποτελείται από τρεις γραμμές. Η πρώτη γραμμή περιέχει έναν θετικό ακέραιο N, τον συνολικό αριθμό των εδεσμάτων. Η δεύτερη γραμμή περιέχει 3 ακέραιους a, b, c, τις παράμετρους για την εξίσωση προσαρμογής του συντελεστή MIAM ενός πιάτου. Η τελευταία γραμμή περιέχει N ακεραίους $x_i, x_2, \ldots, x_N$, χωρισμένους με κενά, αντιπροσωπεύοντας τον συντελεστή MIAM των εδεσμάτων $1, 2, \ldots, N$, αντίστοιχα.

Δεδομένα Εξόδου: Μία γραμμή με έναν ακέραιο, που αντιπροσωπεύει τον μέγιστο προσαρμοσμένο συντελεστή MIAM που μπορεί να επιτευχθεί. Σημειώνεται ότι ο αριθμός αυτός μπορεί να ξεπεράσει το 10^9.

Περιορισμοί:	Παράδειγμα Εισόδου:	Παράδειγμα Εξόδου:
$0 \leq x_i \leq 100$ $-5 \leq a \leq -1$ $\lvert b\rvert \leq 10,000,000$ $\lvert c\rvert \leq 10,000,000$ $1 \leq N \leq 10,000$ Στο 50% των περιπτώσεων θα ισχύει $1 \leq N \leq 1,000$	4 -1 10 -20 2 2 3 4	9

Όριο χρόνου εκτέλεσης: 1 sec . Όριο μνήμης: 64 MB.

Bonus: Κάποια αρχεία με $1 \leq N \leq 1,000,000$