Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα
Διδάσκοντες: Άρης Παγουρτζής, Δώρα Σούλιου, Στάθης Ζάχος
3η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 27/12/2017

Άσκηση 1 - Πομποί και Δέκτες

1. Έχουμε n κεραίες που διακρίνονται σε πομπούς και δέκτες και είναι τοποθετημένες σε μια νοητή ευθεία, στη διεύθυνση δύσης-ανατολής. Οι πομποί εκπέμπουν μόνο προς τα ανατολικά και οι δέκτες λαμβάνουν μόνο από τα δυτικά. Κάθε πομπός μπορεί να στείλει μηνύματα σε έναν και μοναδικό δέκτη (και αντίστοιχα κάθε δέκτης μπορεί να λαμβάνει μηνύματα από έναν και μοναδικό πομπό, δεν έχουμε καθόλου προβλήματα παρεμβολών ή εξασθένησης σήματος λόγω της απόστασης). Το ζητούμενο είναι να μεγιστοποιήσουμε τους πομπούς και τους δέκτες που χρησιμοποιούνται. Κωδικοποιούμε λοιπόν το παραπάνω πρόβλημα ως μια ακολουθία $a_1, \ldots a_n$ όπου $a_i = t$ (αντίστοιχα $a_i = r$) αν η κεραία στη θέση i είναι πομπός (αντίστοιχα δέκτης). Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο που, με είσοδο μια τέτοια ακολουθία υπολογίζει το μέγιστο αριθμό πομπών και δεκτών που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε.

2. Έπειτα από αναβάθμιση του συστήματος, οι κεραίες μας μπορούν πλέον να λειτουργούν είτε ως πομποί είτε ως δέκτες. Όταν μια κεραία i λειτουργεί ως πομπός, έχει κατανάλωση ισχύος T_i, ενώ όταν λειτουργεί ως δέκτης έχει κατανάλωση ισχύος $R_i \leq T_i$. Για διευκόλυνση, θεωρούμε ότι έχουμε άρτιο πλήθος κεραιών n. Δυστυχώς η αναβάθμιση δεν κατάφερε να αντιμετωπίσει τον περιορισμό στην κατεύθυνση εκπομπής (οι πομποί συνεχίζουν να εκπέμπουν μόνο προς τα ανατολικά και οι δέκτες λαμβάνουν μόνο από τα δυτικά) και τον περιορισμό του μοναδικού πομπού για μοναδικό δέκτη. Το ζητούμενο είναι να χωρίσουμε τις κεραίες σε $\frac{n}{2}$ ζεύγη πομπού-δέκτη ώστε να ελαχιστοποιήσουμε τη συνολική κατανάλωση ισχύος (οι κεραίες αριθμούνται πάντα από τα δυτικά προς τα ανατολικά, και για κάθε ζεύγος πομπού i - δέκτη j, πρέπει να ισχύει ότι $i < j$). Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο για αυτό το πρόβλημα. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας (υπάρχει bonus για ιδιαίτερα αποδοτικούς αλγορίθμους).
Παράδειγμα: Έστω ότι έχουμε 4 κεραίες με κατανάλωση ενέργειας (ως πομποί και δέκτες αντίστοιχα, από τα δυτικά προς τα ανατολικά): $(9,\ 6)$, $(6,\ 2)$, $(8,\ 1)$ και $(5,\ 3)$. Βέλτιστη λύση είναι να ζευγαρώσουμε τις κεραίες $1-3$ και $2-4$ ή τις κεραίες $1-4$ και $2-3$, με συνολική κατανάλωση ενέργειας 19.

Άσκηση 2 - Επιστροφή στη Γη

Ο Rick και ο Morty βρίσκονται σε μία από τις κλασσικές τους περιπέτειες σε κάποια παράλληλη διάσταση. Καθώς προσπαθούν να ξεφύγουν από ένα στρατό θυμωμένων Daleks που τους κυνηγάει,ένα τρομερό πράγμα συμβαίνει: Το portal gun τους σπάει και παγιδεύονται στη συγκεκριμένη διάσταση. Επιπλέον το ιπτάμενο αυτοκίνητό τους έχει αποκτήσει μια παράξενη συνήθεια: Φαίνεται να τηλεμεταφέρεται σε πλανήτες που βρίσκονται σε απόσταση ακριβώς 5 από την εκάστοτε τοποθεσία τους.

Το πρόβλημα τους είναι ότι βιάζονται να επιστρέψουν στη Γη ώστε να επισκευάσουν το portal gun τους. Ευτυχώς για αυτούς έχουν στα χέρια τους έναν γαλαξιακό χάρτη στη μορφή ενός αβαρούς, μη κατευθυνόμενου γράφου $G = (V, E)$, όπου οι κορυφές αντιπροσωπεύουν τους πλανήτες και οι ακμές το δρόμο από τον έναν πλανήτη στον άλλο. Ο Rick σας βάζει να του σχεδιάσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο ο οποίος θα βρίσκει τη συντομότερη διαδρομή (αν υπάρχει) από την τωρινή τοποθεσία τους s στην τοποθεσία t (Γη), την οποία το ιπτάμενο αυτοκίνητο μπορεί να ακολουθήσει. Μπορείτε να τους βοηθήσετε; Αιτιολογήστε αναλυτικά την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας. Υπάρχουν παραπάνω από μια (αποδοτικές) λύσεις.

Άσκηση 3 - Διακοπές στην Ικαρία

Ο κύριος Μάκης έχει ένα όμορφο σπίτι στην Ικαρία, το οποίο θέλει να νοικιάσει για τις πρώτες n μέρες του καλοκαιριού (τη $n+1$ μέρα θα πάει αυτός για διακοπές). Έχει ήδη πάρει m προσφορές, η κάθε μία από τις οποίες ξεκινάει από τη μέρα s_i και τελειώνει τη μέρα f_i (και οι 2 ημέρες είναι μεταξύ του 1 και του n) και το ποσό a_i το οποίο ο επίδοξος παραθεριστής είναι διατεθειμένος να πληρώσει για αυτές τις μέρες. Ο κύριος Μάκης μπορεί να νοικιάσει το σπίτι μόνο σε έναν ενοικιαστή κάθε μια από τις n μέρες. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορεί να αποδεχτεί δύο διαφορετικές προσφορές στις οποίες υπάρχει επικάλυψη σε τουλάχιστον μία μέρα.

Καλείστε να βοηθήσετε τον κύριο Μάκη να βρει το σύνολο από τις προσφορές ώστε να μεγιστοποιήσει το κέρδος του. Για αυτό το σκοπό πρέπει να μοντελοποιήσετε το πρόβλημα και να σχεδιάσετε έναν όσο το δυνατόν πιο αποδοτικό αλγόριθμό. Υποθέστε ότι οι προσφορές σας δίνονται σαν μία λίστα από διατεταγμένα ζεύγη, όχι απαραίτητα ταξινομημένα με κάποιον συγκεκριμένο τρόπο.

Άσκηση 4 - Διαγαλαξιακές Πτήσεις

Ο φίλος σας ο Daneel είναι κυβερνήτης ενός διαστημοπλοίου που χρησιμοποιεί κρυστάλλους λιθίου για καύσιμο και διαθέτει έναν warp drive κινητήρα για να μπορεί να ταξιδεύει μεταξύ γειτονικών γαλαξιών. Σας έχει δοθεί ένας αστρικός χάρτης σε μορφή μη κατευθυνόμενου γραφήματος με βάρη $G(V, E, w)$, όπου οι κόμβοι είναι οι γαλαξίες, οι ακμές δείχνουν ποιοι γαλαξίες είναι γειτονικοί και το βάρος $w(u, v)$ είναι το κόστος σε κρυστάλλους για το ταξίδι από τον γαλαξία u στον γαλαξία v.

Επιπλέον, επειδή ο κινητήρας είναι παλιάς τεχνολογίας ο Κανονισμός Ασφάλειας προβλέπει ότι θα πρέπει το διαστημόπλοιο να μπορεί, αν χρειαστεί, να φτάσει σε κάποιον γαλαξία που διαθέτει σταθμό επισκευής με 3 το πολύ ταξίδια από γαλαξία σε γαλαξία. Το σύνολο R των γαλαξιών όπου υπάρχει σταθμός επισκευής φαίνεται επίσης στον χάρτη. Ο φίλος σας ξεκινάει ένα ταξίδι από τον Γαλαξία $M64$ και θέλει να ξέρει σε ποιους άλλους γαλαξίες μπορεί να φτάσει τηρώντας τον Κανονισμό Ασφάλειας, και ποιο θα είναι το ελάχιστο δυνατό κόστος σε κρυστάλλους για τον κάθε ένα. Σχεδιάστε έναν αποδοτικό αλγόριθμο για να τον βοηθήσετε να βρει την απάντηση. Ποια είναι η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας;

Άσκηση 5 - Απαραίτητες (και μη) ακμές

Θεωρούμε ένα συνεκτικό μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, w)$ με n κορυφές, m ακμές και θετικά βάρη w στις ακμές (τα βάρη κάποιων ακμών μπορεί να είναι και ίδια).

1. Έστω T ένα spanning tree του G για το οποίο γνωρίζουμε ότι κάθε ακμή $e \in T$ εντάσσεται σε κάποιο Minimum Spanning Tree του G. Αρκεί αυτό για να συμπεράνουμε ότι το T αποτελεί ένα Minimum Spanning Tree του G; Να αιτιολογήσετε κατάλληλα την απάντηση σας.

2. Συμβολίζουμε με $MST(G)$ το συνολικό βάρος ενός Minimum Spanning Tree του G. Μια ακμή $e \in E$ θεωρείται *απαραίτητη* για το Minimum Spanning Tree αν η αφαίρεση της οδηγεί σε αύξηση του βάρους του, δηλαδή αν $MST(G) < MST(G - e)$. Να αποδείξετε ότι:

   (α) Μια ακμή είναι *απαραίτητη* αν και μόνο αν υπάρχει τομή $(S, V \backslash S)$ τέτοια ώστε η e είναι η μοναδική ακμή ελαχίστου βάρους που την διασχίζει, δηλαδή για κάθε ακμή $e' = \{u, v\},\ e' \neq e$ με $u \in S$ και $v \in V \backslash S$, ισχύει ότι $w(e) < w(e')$

   (β) Μια ακμή e είναι απαραίτητη αν και μόνο αν για κάθε κύκλο C που την περιέχει, η e δεν αποτελεί ακμή μέγιστου βάρους του C. Δηλαδή υπάρχει ακμή $e' \in C : w(e') > w(e)$

3. Να διατυπώσετε έναν αλγόριθμο γραμμικού χρόνου που αποφασίζει αν μια ακμή του G είναι απαραίτητη για το Minimum Spanning Tree. Να αιτιολογήσετε αναλυτικά την ορθότητα και την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

4. Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει όλες τις ακμές του G που είναι απαραίτητες για το Minimum Spanning Tree. Η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας πρέπει να είναι συγκρίσιμη με αυτή των αλγορίθμων που υπολογίζουν ένα Minimum Spanning Tree. Να αιτιολογήσετε αναλυτικά την ορθότητα και την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.