



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα
Διδάσκοντες: Αριστείδης Παγουρτζής, Δώρα Σουλίου, Ευστάθιος Ζάχος,
Δημήτρης Σακαβάλας
3η Σειρά Προγραμματιστικών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 7/1/2018

Άσκηση 1: Χριστουγεννιάτικα μπισκότα

Τα Χριστούγεννα φτάνουν άλλη μια χρονιά στην χώρα των αλγορίθμων. Οι αποθήκες του Άγιου Βασίλη ξεχειλίζουν από δώρα που πρέπει να πακεταριστούν στον σάκο. Τα δώρα είναι σε N στοίβες μέσα στην αποθήκη, όπου η στοίβα 1 είναι η είσοδος και η στοίβα N είναι η έξοδος της αποθήκης. Η αποθήκη του Άγιου Βασίλη είναι αχανής και για να μην χαθούν τα ζωτικά, έχει εγκαταστήσει M φωτεινά μονοπάτια ανάμεσα σε συγκεκριμένες στοίβες, ώστε να καθοδηγεί τα ζωτικά. Οι στοίβες με τα δώρα βρίσκονται διάσπαρτες μέσα στην αποθήκη, και οπότε κάθε φωτεινό μονοπάτι έχει διαφορετικό μήκος. Αν υπάρχει μονοπάτι ανάμεσα στις στοίβες i και j τότε η απόσταση του θα συμβολίζεται d_{ij} . Τα δώρα όμως είναι βαριά, και κάθε ζωτικό θέλει να κάνει την ελάχιστη απόσταση από την είσοδο έως την έξοδο. Συγκεκριμένα, κάθε ζωτικό κάνει ένα από τα διαφορετικά ελάχιστα μονοπάτια που υπάρχουν από την στοίβα 1 στην στοίβα N και δεν υπάρχει κανένα ελάχιστο μονοπάτι από την στοίβα 1 στην στοίβα N που να μην το ταξιδεύει κάποιο ζωτικό.

Καθώς τα Χριστούγεννα είναι κοντά, η Αγιοβασιλίνα θέλει να φροντίσει να είναι χαρούμενα τα ζωτικά. Για να το πετύχει αυτό, έχει αποφασίσει να βάλει K δίσκους με διαφορετικά μπισκότα ο καθένας σε κάποιες από τις στοίβες.

Πριν αποφασίσει όμως που θα βάλει τους δίσκους, θέλει να μάθει πόσα είναι τα ελάχιστα μονοπάτια που ακολουθούν τα ζωτικά ανάμεσα σε κάποιες από τις στοίβες. Για τον σκοπό αυτό σας ζητάει, αφού σας εξηγήσει πως είναι η αποθήκη του Άγιου Βασίλη, πόσα είναι τα ελάχιστα μονοπάτια ανάμεσα σε Q ζευγάρια από στοίβες. Τέλος, σας ζητάει να της πείτε, αν βάλει βέλτιστα τους δίσκους, πόσα ζωτικά θα δοκιμάσουν όλα τα μπισκότα.

Δεδομένα Εισόδου: Το πρόγραμμα θα διαβάζει από το standard input τέσσερις θετικούς ακεραίους N, M, Q και K που αντιστοιχούν στο πλήθος των στοιβών, στα φωτεινά μονοπάτια, τις ερωτήσεις για τα ελάχιστα μονοπάτια ανάμεσα σε στοίβες και το πλήθος των δίσκων με τα κουλουράκια. Στις επόμενες M γραμμές δίνονται τρεις θετικοί ακεραίοι i, j, d_{ij} οι οποίοι δηλώνουν ότι η στοίβα i ενώνεται με φωτεινό μονοπάτι με την στοίβα j μήκους d_{ij} . Στις επόμενες Q γραμμές υπάρχουν δύο θετικοί ακεραίοι, οι στοίβες i και j για τις οποίες το πλήθος των ελαχίστων μονοπατιών ανάμεσά τους θέλει να ξέρει η Αγιοβασιλίνα.

Δεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμα θα τυπώνει στο standard output $Q + 1$ γραμμές. Στην i -οστή από τις πρώτες Q γραμμές θα τυπώνει έναν θετικό ακεραίο, την απάντηση στην i -οστή από τις Q ερωτήσεις. Στην τελευταία γραμμή, θα τυπώνει πόσα ζωτικά θα πάρουν από όλα τα μπισκότα.

| Περιορισμοί: | Παραδείγματα Εισόδου: | Παράδειγμα Εξόδου: |
|--------------------------------------|-----------------------|--------------------|
| $1 \leq N \leq 300$ | 4 5 3 3 | 1 |
| $N - 1 \leq M \leq \frac{N(N-1)}{2}$ | 1 3 2 | 2 |
| $1 \leq i, j \leq N$ | 1 2 1 | 2 |
| $1 \leq d_{ij} \leq 10^9$ | 2 3 1 | 2 |
| $1 \leq K \leq N$ | 2 4 2 | |
| Για το 20% $1 \leq N \leq 20$ | 3 4 1 | |
| Για το 55% $1 \leq N \leq 100$ | 1 2 | |
| Για το 70% $1 \leq K \leq 3$ | 2 4 | |
| Όριο χρόνου εκτέλεσης: 1 sec. | 1 3 | |
| Όριο μνήμης: 64 MB. | 8 10 3 2 | 3 |
| | 1 2 3 | 4 |
| | 1 3 5 | 1 |
| | 2 4 4 | 6 |
| | 4 3 2 | |
| | 4 5 1 | |
| | 5 6 3 | |
| | 6 8 1 | |
| | 5 7 2 | |
| | 7 6 1 | |
| | 7 8 2 | |
| | 3 8 | |
| | 1 6 | |
| | 2 7 | |

1 Άσκηση 2: Καλοκαιρινές Διακοπές

Φέτος, στις καλοκαιρινές σας διακοπές, θα επισκεφθείτε με το αυτοκίνητο τη χώρα των Αλγορίθμων. Είστε πραγματικά ενθουσιασμένοι για αυτό! Είστε αποφασισμένοι να επισκεφθείτε όσο το δυνατόν περισσότερες πόλεις αυτής της αχανούς και αραιοκατοικημένης χώρας. Το μόνο που σας ανησυχεί είναι ο ανεφοδιασμός του αυτοκινήτου σας με καύσιμα. Το αυτοκίνητό σας έχει σχετικά μικρό ντεπόζιτο και βενζινάδικα υπάρχουν μόνο στις πόλεις. Επειδή οι αποστάσεις μεταξύ των πόλεων είναι μεγάλες, φοβάστε ότι μπορεί να μην είστε σε θέση να ταξιδέψετε σε κάποιες πόλεις. Για να δείτε αν θα τα καταφέρετε, χρειάζεται να υπολογίσετε διαδρομές που ελαχιστοποιούν τη μέγιστη απόσταση που θα χρειαστεί να διανύσετε χωρίς να υπάρχει δυνατότητα ανεφοδιασμού.

Ο φίλος σας από τους Μηχανολόγους προσπαθεί να υπολογίσει με ακρίβεια την αυτονομία του αυτοκινήτου σας. Εν τω μεταξύ, έχετε προμηθευτεί έναν λεπτομερή χάρτη της χώρας των Αλγορίθμων. Στον χάρτη υπάρχουν N πόλεις και M αμφίδρομες οδικές συνδέσεις. Κάθε οδική σύνδεση e συνδέει απευθείας τις δύο πόλεις $x(e)$ και $y(e)$ που βρίσκονται στα άκρα της και έχει μήκος $d(e)$. Έχετε ακόμη σημειώσει Q ζευγάρια πόλεων μεταξύ των οποίων θέλετε να μετακινηθείτε. Για κάθε τέτοιο ζευγάρι πόλεων (u, v) , θέλετε να υπολογίσετε μια διαδρομή που ελαχιστοποιεί τη μέγιστη απόσταση που θα χρειαστεί να διανύσετε χωρίς δυνατότητα ανεφοδιασμού¹. Θα σημειώσετε αυτή την απόσταση και θα τη συγκρίνετε με την αυτονομία του αυτοκινήτου σας, ώστε να προγραμματίσετε το ταξίδι σας. Δεν σας πειράζει να ταξιδέψετε λίγο περισσότερο, άλλωστε θα βρίσκαστε σε διακοπές. Το σημαντικό είναι να μην ξεμείνετε από καύσιμα!

Για να μην καθυστερείτε, αποφασίσατε να γράψετε ένα πρόγραμμα που υπολογίζει αυτές τις διαδρομές (και τις αντίστοιχες αποστάσεις που θα διανύσετε χωρίς δυνατότητα ανεφοδιασμού) για όλα τα ζευγάρια πόλεων που έχετε σημειώσει.

Δεδομένα Εισόδου: Το πρόγραμμά σας θα διαβάζει από το standard input, δύο θετικούς ακέραιους N και M που αντιστοιχούν στο πλήθος των πόλεων και στο πλήθος των οδικών συνδέσεων. Οι πόλεις αριθμούνται από 1 μέχρι N . Σε κάθε μία από τις επόμενες M γραμμές, θα υπάρχουν τρεις θετικοί ακέραιοι $x(e)$, $y(e)$ και $d(e)$ που δηλώνουν ότι υπάρχει απευθείας οδική σύνδεση μεταξύ των πόλεων $x(e)$ και $y(e)$ με μήκος $d(e)$. Το οδικό δίκτυο που αποτυπώνεται στον χάρτη είναι μη κατευθυνόμενο, συνεκτικό και δεν περιέχει ανακυκλώσεις ή πολλαπλές οδικές συνδέσεις μεταξύ των ίδιων πόλεων. Στην γραμμή $M + 2$, θα υπάρχει ένας θετικός ακέραιος Q που αντιστοιχεί στο πλήθος των ζευγαριών πόλεων μεταξύ των οποίων θέλετε να μετακινηθείτε. Σε κάθε μία από τις επόμενες Q γραμμές, θα υπάρχουν δύο θετικοί ακέραιοι u και v , που δηλώνουν ένα συγκεκριμένο ζευγάρι πόλεων.

Δεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμα σας πρέπει να τυπώνει στο standard output Q φυσικούς αριθμούς, σε μια διαφορετική γραμμή τον καθένα. Αν το i -οστό ζευγάρι πόλεων μεταξύ των οποίων θέλετε να ταξιδέψετε είναι το (u, v) , στην i -οστή γραμμή της εξόδου πρέπει να τυπωθεί το μήκος της μακρύτερης οδικής σύνδεσης στο $v - u$ μονοπάτι που ελαχιστοποιεί την απόσταση που χρειάζεται να διανύσετε χωρίς να υπάρχει δυνατότητα ανεφοδιασμού.

¹ Αξιολογείτε δηλαδή κάθε $u - v$ μονοπάτι p με βάση το βοττλενεσκ κόστος του $b(p) = \max_{e \in p} \{d(e)\}$. Για κάθε ζευγάρι πόλεων (u, v) , πρέπει λοιπόν να υπολογίσετε ένα $u - v$ μονοπάτι p_{uv}^* με ελάχιστο βοττλενεσκ κόστος $b(p_{uv}^*)$.

Περιορισμοί:

$$2 \leq N \leq 3.000$$

$$N - 1 \leq M \leq 100.000$$

$$1 \leq Q \leq 100.000$$

$$1 \leq d(e) \leq 10^8$$

Όριο χρόνου εκτέλεσης: 1 sec.

Όριο μνήμης: 64 MB.

Θα υπάρχουν και κάποια

βonus αρχεία εισόδου

με $N = 30.000$ και

$$100.000 \leq M \leq 200.000.$$

Παράδειγμα Εισόδου:

5 6

1 2 1

1 5 6

2 3 2

2 4 4

3 4 3

4 5 4

10

1 2

1 3

1 4

1 5

2 3

2 4

2 5

3 4

3 5

4 5

Παράδειγμα Εξόδου:

1

2

3

4

2

3

4

3

4

4