Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Διακριτά Μαθηματικά

Διδάσκοντες: Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου

1η Γραπτή Εργασία, Ημ/νια Παράδοσης: 12/4/2021

Θέμα 1 (Διαδικασίες Απαρίθμησης, 2.4 μον.). (α) Μια συνάρτηση $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ είναι *πολυωνυμική βαθμού* d όταν υπάρχουν φυσικοί $(a_d, a_{d-1}, \ldots, a_0)$ τέτοιοι ώστε $p(n) = \sum_{\ell=0}^{d} a_\ell n^\ell$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{P}_d$ το σύνολο όλων των πολυωνυμικών συναρτήσεων βαθμού d στους φυσικούς και με $\mathcal{P} = \bigcup_{d \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_d$ το σύνολο όλων των πολυωνυμικών συναρτήσεων στους φυσικούς. Να εξετάσετε αν το σύνολο $\mathcal{P}$ είναι αριθμήσιμο. Να δείξετε ακόμη ότι υπάρχουν (μη αριθμήσιμα άπειρες) συναρτήσεις $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ που δεν ανήκουν στο $\mathcal{P}$, δηλ. που δεν μπορούν να εκφραστούν ως πολυωνυμικές συναρτήσεις.

(β) Στην Θεωρητική Πληροφορική, ένα (υπολογιστικό) *πρόβλημα απόφασης* ουσιαστικά χαρακτηρίζεται από ένα ερώτημα στο οποίο η απάντηση είναι είτε "ναι" είτε "όχι" (π.χ. "έχει το γράφημα G κύκλο Hamilton;", "είναι ο φυσικός αριθμός n άρτιος;", "είναι ο φυσικός αριθμός n πρώτος;", κλπ.). Έτσι, κάθε πρόβλημα απόφασης στους φυσικούς αριθμούς μπορεί να αναπαρασταθεί από το υποσύνολο των φυσικών για τους οποίους η απάντηση στο αντίστοιχο ερώτημα είναι "ναι". Π.χ. το πρόβλημα της αναγνώρισης των άρτιων αριθμών μπορεί να αναπαρασταθεί από το σύνολο $\{0, 2, 4, 6, \ldots\}$, το πρόβλημα της αναγνώρισης των πρώτων αριθμών μπορεί να αναπαρασταθεί από το σύνολο $\{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$, κλπ. Η λύση σε ένα τέτοιο πρόβλημα είναι ένα πρόγραμμα σε μία γλώσσα προγραμματισμού, για παράδειγμα στη C++, το οποίο λαμβάνει ως είσοδο έναν φυσικό αριθμό n, και έπειτα από πεπερασμένο αριθμό βημάτων, τυπώνει στην έξοδο τη σωστή απάντηση στην αντίστοιχη ερώτηση. Να δείξετε ότι υπάρχουν (μη αριθμήσιμα άπειρα) προβλήματα απόφασης στους φυσικούς για τα οποία δεν υπάρχει λύση.

(γ) Ένα εχθρικό υποβρύχιο ξεκινά από τη θέση $x \in \mathbb{N}$, και κινείται με σταθερή ταχύτητα y μέτρα/λεπτό, $y \in \mathbb{N}$, κατά μήκος μιας ευθείας (την οποία γνωρίζουμε). Έχουμε στη διάθεσή μας απεριόριστο πλήθος τορπιλών που μπορούμε να εκτοξεύσουμε εναντίον του υποβρυχίου, καθώς και απεριόριστο χρόνο για να το βυθίσουμε. Μπορούμε να εκτοξεύουμε μία τορπίλη κάθε λεπτό, στοχεύοντας προς μια θέση $z \in \mathbb{N}$ στην ευθεία, και θεωρούμε ότι το υποβρύχιο θα βυθιστεί αν τη χρονική στιγμή εκτόξευσης βρίσκεται στη θέση z.

Να διατυπώσετε μία αλγοριθμική μέθοδο η οποία, χωρίς γνώση των x και y, επιλέγει με συστηματικό τρόπο την ακολουθία των θέσεων όπου κατευθύνονται οι τορπίλες μας, και εγγυάται τη βύθιση του υποβρυχίου σε πεπερασμένο χρόνο. Να αποδείξετε την ορθότητα της μεθόδου, και να υπολογίσετε το πλήθος των τορπιλών (ως συνάρτηση των x και y) που θα χρειαστεί να εκτοξεύσουμε μέχρι τη βύθιση του υποβρυχίου.

Θέμα 2 (Προτασιακή Λογική, 2.4 μον.). (α) Επισκέπτεσθε ένα νησί όπου κατοικούν δύο είδη ανθρώπων, οι ιππότες που λένε πάντα την αλήθεια, και οι απατεώνες που λένε πάντα ψέματα. (i) Πρώτα συναντάτε δύο κατοίκους του νησιού, τον A και τον B. Ο A λέει ότι *"Είμαστε και οι δύο ιππότες."*. Ο B λέει ότι *"Ο A είναι απατεώνας."*. Τι είναι οι A και B; (ii) Δύο άλλοι κάτοικοι, ο C και ο D σας πλησιάζουν, αλλά μιλάει μόνο ο C και λέει ότι: *"Είμαστε και οι δύο απατεώνες"*. Τι είναι οι C και D; (iii) Στη συνέχεια συναντάτε τους κατοίκους του νησιού E και F. Ο E λέει ότι *"Ο F είναι απατεώνας"*, και ο F λέει ότι *"Ο E είναι απατεώνας"*. Πόσοι από τους E και F είναι απατεώνες; (iv) Τέλος συναντάτε τους G και H, που επίσης κατοικούν στο νησί. Ρωτάτε τον G: *"Υπάρχει κάποιος ευγενής μεταξύ σας;"*. Αυτός αποκρίνεται, και η απάντησή του είναι τέτοια ώστε να μπορείτε να αποφανθείτε με σιγουριά για τους G και H. Τι απάντησε ο G, και σε ποια κατηγορία ανήκει καθένας από τους G και H;

(β) Έστω φ προτασιακός τύπος. Ορίζουμε την ακολουθία προτασιακών τύπων $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n, \ldots$ ως εξής: $\sigma_0 \equiv \varphi \to \varphi$, και για κάθε $n \geq 0$, $\sigma_{n+1} \equiv \sigma_n \to \varphi$. Για ποιες τιμές του n ο σ_n είναι ικανοποιήσιμος και για ποιες είναι ταυτολογία; Για ποιες τιμές του n αληθεύει ότι $\sigma_n \models \sigma_{n+1}$;

(γ) Η n-οστή πρόταση σε μία λίστα με 100 μαθηματικές προτάσεις δηλώνει ότι *"Οι n από τις προτάσεις στη λίστα είναι ψευδείς."*. (i) Ποιες από τις 100 προτάσεις είναι αληθείς και ποιες ψευδείς; (ii) Ποιες από τις 100 προτάσεις είναι αληθείς και ποιες ψευδείς αν η n-οστή πρόταση δηλώνει ότι *"Τουλάχιστον n από τις προτάσεις στη λίστα είναι ψευδείς."*; (iii) Τι συμβαίνει αν έχουμε 99 δηλώσεις όπως αυτές στο (ii);

(δ) Έστω T ένα άπειρο σύνολο προτασιακών τύπων, και έστω φ αυθαίρετα επιλεγμένος προτασιακός τύπος. Να δείξετε ότι:

1. Αν $T \models \varphi$, τότε υπάρχει *πεπερασμένο* $T_0 \subseteq T$ τέτοιο ώστε $T_0 \models \varphi$.
2. Αν το T είναι μη ικανοποιήσιμο, τότε υπάρχει *πεπερασμένο* $T_0 \subseteq T$ που δεν είναι ικανοποιήσιμο.

Θέμα 3 (Κατηγορηματική Λογική, 2.0 μον.). (α) Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με μονομελή κατηγορηματικά σύμβολα P και M και διμελή κατηγορηματικά σύμβολα T και L. Ερμηνεύουμε αυτή τη γλώσσα στο σύμπαν που αποτελείται από την ένωση του συνόλου των καθηγητών και των μαθημάτων της Σχολής, με το $P(x)$ να δηλώνει ότι *"ο x είναι καθηγητής"*, το $M(x)$ να δηλώνει ότι *"το x είναι μάθημα"*, το $T(x, y)$ να δηλώνει ότι *"ο x διδάσκει το y"*, και το $L(x, y)$ να δηλώνει ότι *"ο x συμπαθεί τον y"*. Σε αυτή την ερμηνεία, να γράψετε τύπους που να δηλώνουν ότι:

1. Κάθε καθηγητής διδάσκει τουλάχιστον ένα μάθημα.
2. Ένας καθηγητής συμπαθεί έναν άλλο μόνον αν υπάρχει μάθημα που το διδάσκουν και οι δύο.
3. Υπάρχουν δύο καθηγητές που διδάσκουν ακριβώς τα ίδια μαθήματα.
4. Υπάρχει ένας καθηγητής που διδάσκει (ακριβώς) δύο μαθήματα.
5. Αν ένας καθηγητής διδάσκει περισσότερα του ενός μαθήματα, τότε τουλάχιστον ένα αυτά το συνδιδάσκει με όλους τους άλλους καθηγητές που τον συμπαθούν.

(β) Έστω πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο Q. Να διερευνήσετε την λογική εγκυρότητα της παρακάτω πρότασης:

$$\forall x \forall y \Big(Q(x, y) \leftrightarrow \neg Q(x, y) \Big) \to \exists x \forall y Q(x, y)$$

Θέμα 4 (Κατηγορηματική Λογική, 2.0 μον.). (α) Έστω πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P. Θεωρούμε τις προτάσεις:

$$\varphi = \forall x P(x, x) \land \forall x \forall y \Big(P(x, y) \to \forall z \big(P(x, z) \lor P(z, y) \big) \Big) \to \forall x \forall y \big(P(x, y) \lor P(y, x) \big)$$

$$\psi = \forall x P(x, x) \land \forall x \forall y \Big(P(x, y) \to \forall z \big(P(x, z) \lor P(z, y) \big) \Big) \to \exists x \forall y P(x, y)$$

1. Να διερευνήσετε τη λογική εγκυρότητα της φ.
2. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή στον πληθάριθμο του σύμπαντος, να δείξετε ότι κάθε ερμηνεία σε πεπερασμένο σύμπαν αποτελεί μοντέλο της ψ.
3. Να διατυπώσετε ερμηνεία που δεν αποτελεί μοντέλο της ψ.

(β) Έστω πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P. Θεωρούμε την πρόταση:

$$\xi = \forall x \Big(P(x, x) \to \forall y \big(P(x, y) \lor P(y, x) \big) \Big) \to \exists x \forall y P(x, y)$$

Να διερευνήσετε σε ποιες από τις παρακάτω ερμηνείες αληθεύει η ξ:

1. Σύμπαν $A = \{a, b, c\}$ και το P ερμηνεύεται με τη σχέση $P^A = \{(a, b), (b, c)\}$.
2. Σύμπαν $A = \{a, b, c\}$ και το P ερμηνεύεται με τη σχέση $P^A = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$.
3. Σύμπαν $A = \{a, b, c\}$ και το P ερμηνεύεται με τη σχέση $P^A = \{(a, a), (a, b), (a, c)\}$.
4. Σύμπαν οι θετικοί φυσικοί αριθμοί, με το $P(x, y)$ να δηλώνει ότι *"ο x διαιρεί τον y"*.

Θέμα 5 (Διμελείς Σχέσεις, 1.2 μον.). (α) Έστω R μια ανακλαστική και μεταβατική σχέση. Να δείξετε ότι η $R \cap R^{-1}$ είναι σχέση ισοδυναμίας.

(β) Να σχεδιάσετε το διάγραμμα Hasse ενός μερικώς διατεταγμένου συνόλου το οποίο έχει τρία minimal και τρία maximal στοιχεία, και είναι τέτοιο ώστε κάθε στοιχείο είναι είτε μεγαλύτερο είτε μικρότερο από (ακριβώς) δύο άλλα στοιχεία.

(γ) Ορίζουμε μια σχέση R στο σύνολο των θετικών φυσικών ως εξής: Για κάθε $m, n \in \mathbb{N}_+$, $(n, m) \in R$ αν και μόνο αν κάθε πρώτος παράγοντας του n είναι και πρώτος παράγοντας του m. Είναι η R σχέση διάταξης; Να αιτιολογήσετε κατάλληλα τον ισχυρισμό σας.

Παράδοση. Οι εργασίες πρέπει να αναρτηθούν στο `courses.corelab.ntua.gr` μέχρι τα μεσάνυχτα της Δευτέρας 12 Απριλίου.

Καλή Επιτυχία!