Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Διακριτά Μαθηματικά

Διδάσκοντες: Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου

2η Γραπτή Εργασία, Ημ/νια Παράδοσης: 24/5/2021

Θέμα 1 (Αρχή του Περιστερώνα, 1.8 μον.). (α) Επιλέγουμε αυθαίρετα n φυσικούς αριθμούς από το σύνολο $\{1, 2, 3, \dots, 2^n - 3, 2^n - 2\}$. Να δείξετε ότι μεταξύ των αριθμών που έχουμε επιλέξει υπάρχει πάντα ένα ζευγάρι όπου ο μεγαλύτερος από τους δύο αριθμούς είναι μικρότερος ή ίσος από το διπλάσιο του άλλου (π.χ., για $n = 3$, αν επιλέξουμε τους αριθμούς 1, 3, 6, έχουμε ότι $6 \leq 2 \cdot 3$.

(β) Θεωρούμε μια ακολουθία N θετικών ακεραίων η οποία περιέχει ακριβώς n διαφορετικούς αριθμούς. Να δείξετε ότι αν $N \geq 2^n$, υπάρχουν τουλάχιστον δύο ή περισσότερες διαδοχικές θέσεις της ακολουθίας τέτοιες ώστε το γινόμενο των αντίστοιχων αριθμών να είναι ένα τέλειο τετράγωνο. Π.χ., στην ακολουθία $7, 5, 3, 5, 7, 5, 3, 7$, όπου $n = 3$ και $N = 2^3$, το γινόμενο των έξι τελευταίων διαδοχικών θέσεων είναι τέλειο τετράγωνο.

Θέμα 2 (Γραφήματα και Μαθηματική Επαγωγή, 1.8 μον.). (α) Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή στο πλήθος των κορυφών, να δείξετε ότι σε κάθε tournament $T(V, E)$ με $|V| \geq 2$ κορυφές, υπάρχει κορυφή s^* που είναι προσπελάσιμη από κάθε άλλη κορυφή $v \in V \setminus \{s^*\}$ μέσω μονοπατιού (που σέβεται την κατεύθυνση των ακμών του T) μήκους το πολύ 2.

(β) Θεωρούμε συνεκτικό γράφημα $G(V, E)$ με n κορυφές και σύνολο $T \subseteq V$, με $|T| = 2\ell \leq n$ κορυφές, για κάποιο $\ell \geq 1$. Να δείξετε ότι υπάρχουν ℓ μονοπάτια $p_1, \dots, p_\ell$ στο G, χωρίς κοινές ακμές μεταξύ τους, στα οποία κάθε κορυφή του T εμφανίζεται ως άκρο ενός από αυτά. *Υπόδειξη:* Μπορείτε να δείξετε το ζητούμενο με επαγωγή στο n, θεωρώντας την ειδική περίπτωση που το G είναι δέντρο, και έπειτα να εξηγήσετε γιατί το ζητούμενο ισχύει για κάθε συνεκτικό γράφημα G.

Θέμα 3 (Ανεξάρτητα Σύνολα, 0.8 μον.). Έστω (απλό) γράφημα $G(V, E)$ με n κορυφές. Να δείξετε ότι αν το G είναι d-κανονικό, τότε έχει ανεξάρτητο σύνολο με τουλάχιστον $n/(d + 1)$ κορυφές (και να δείξετε ότι ένα τέτοιο ανεξάρτητο σύνολο μπορεί να υπολογιστεί αποδοτικά).

Θέμα 4 (Αυτοσυμπληρωματικά Γραφήματα, 1.0 μον.). Να δείξετε ότι για κάθε φυσικό $k \geq 1$, (i) υπάρχει αυτοσυμπληρωματικό γράφημα με $4k$ κορυφές όπου οι μισές κορυφές έχουν βαθμό $2k - 1$ και οι άλλες μισές έχουν βαθμό $2k$, και (ii) ότι υπάρχει αυτοσυμπληρωματικό γράφημα με $4k + 1$ κορυφές που είναι $2k$-κανονικό. *Υπόδειξη:* Για το (i), ξεκινήστε από το P_4 και αντικαταστείστε κάθε κορυφή του είτε με ένα πλήρες γράφημα K_k είτε με ένα ανεξάρτητο σύνολο I_k.

Θέμα 5 (Κύκλος Euler, Κύκλος Hamilton, 1.8 μον.). (α) Να δείξετε ότι μπορούμε πάντα να προσανατολίσουμε όλες τις ακμές ενός μη-κατευθυνόμενου συνεκτικού γραφήματος G ώστε για κάθε κορυφή u, ο προς-τα-έσω βαθμός και ο προς-τα-έξω βαθμός της u είτε να είναι ίσοι είτε να διαφέρουν κατά 1.

(β) Έστω γράφημα G και έστω x μια κορυφή του G τέτοια ώστε το $G - x$ να έχει κύκλο Hamilton. Υποθέτουμε ότι το G έχει δύο κορυφές u και v που έχουν βαθμό 3 και είναι γειτονικές με την x. (i) Να δείξετε ότι αν οι u και v συνδέονται μεταξύ τους, τότε και το G έχει κύκλο Hamilton. (ii) Να δείξετε ότι αν οι u και v δεν συνδέονται μεταξύ τους, τότε το G δεν έχει απαραίτητα κύκλο Hamilton.

Θέμα 6 (Δέντρα, 1.8 μον.). (α) Έστω $n \geq 2$ θετικοί ακέραιοι $d_1, \dots, d_n$. Να δείξετε ότι $d_1 + \cdots + d_n = 2(n - 1)$ αν και μόνο αν υπάρχει δέντρο T με n κορυφές και βαθμούς κορυφών $d_1, \dots, d_n$.

(β) Έστω απλό μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα $G(V, E, w)$ με θετικά βάρη $w : E \to \mathbb{N}^*$ στις ακμές. Μια ακμή $e \in E$ καλείται *απαραίτητη* για το Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο (ΕΣΔ) του G αν η αφαίρεσή της οδηγεί σε αύξηση του βάρους του ΕΣΔ, δηλ. αν $\text{ΕΣΔ}(G) < \text{ΕΣΔ}(G - e)$. Να δείξετε ότι μια ακμή $e \in E$ είναι απαραίτητη για το ΕΣΔ του G αν και μόνο αν υπάρχει τομή $(S, V \setminus S)$ τέτοια ώστε η e να είναι *η μοναδική ακμή ελάχιστου βάρους* που διασχίζει την $(S, V \setminus S)$, δηλ. για κάθε ακμή $e' = \{u, v\}$, με $u \in S$, $v \in V \setminus S$ και $e' \neq e$, έχουμε ότι $w(e) < w(e')$.

Θέμα 7 (Επιπεδότητα, 1.6 μον.). (α) Έστω $k \geq 3$ φυσικός αριθμός. Θεωρούμε *απλό επίπεδο* γράφημα $G(V, E)$ με n κορυφές και m ακμές το οποίο δεν έχει κύκλους με μήκος μικρότερο ή ίσο του $k - 1$ (δηλ. αν το G έχει κύκλους, τότε το μήκος κάθε κύκλου στο G είναι μεγαλύτερο ή ίσο του k). Να δείξετε ότι κάθε τέτοιο απλό επίπεδο γράφημα G έχει πλήθος ακμών $m \leq \frac{k}{k-2}(n - 2)$.

(β) Θεωρούμε συνεκτικό επίπεδο γράφημα στο οποίο όλες οι όψεις έχουν βαθμό 5 ή 6. Να δείξετε δείξτε ότι (i) αν ο βαθμός κάθε κορυφής είναι ίσος με 3, τότε το γράφημα έχει 12 όψεις βαθμού 5, και (ii) ότι αν ο βαθμός κάθε κορυφής είναι τουλάχιστον 3, τότε υπάρχουν τουλάχιστον 12 όψεις βαθμού 5.

Θέμα 8 (Χρωματικός Αριθμός, 0.8 μον.). Να δείξετε ότι για τον χρωματικό αριθμό του καρτεσιανού γινομένου κάθε γραφήματος G με το πλήρες γράφημα K_q ισχύει ότι $\chi(G \times K_q) = \max\{\chi(G), q\}$.

Παράδοση. Οι εργασίες πρέπει να αναρτηθούν στο `courses.corelab.ntua.gr/discrete` μέχρι τα μεσάνυχτα της Δευτέρας 24/5.

Καλή Επιτυχία!