

Γραμμικός Προγραμματισμός

Δημήτρης Φωτάκης

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



Γραμμικός Προγραμματισμός

- Ελαχιστοποίηση γραμμικής αντικειμενικής συνάρτησης υπό πεπερασμένο αριθμό γραμμικών περιορισμών (ισότητες ή ανισότητες).
 - **Περιορισμοί:** $(m \times n)$ -πίνακας A , m -διάνυσμα b .
 - **Αντικειμενική:** n -διάνυσμα c .
 - **Άγνωστοι:** n -διάνυσμα x .
 - **Τυπική** μορφή (standard form):

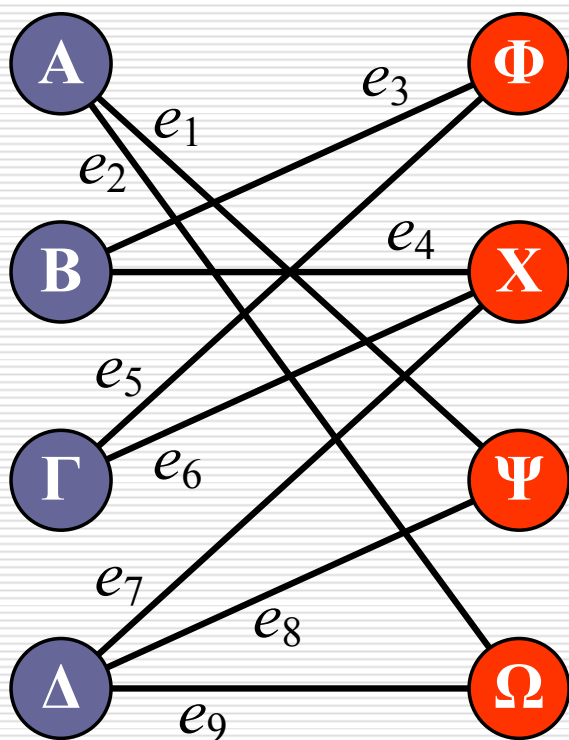
$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{subject to:} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1 \dots m \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1 \dots n \end{aligned}$$

Πρόβλημα Δίαιτας

	Βιτ.Α	Βιτ.Β	Βιτ. C	Θερμ.
Πίτσα	203	92	100	600
Φρούτα	270	80	512	250
Αυγά	90	84	230	350
Σουβλάκι	500	90	210	500
Απαιτήσεις	2000	300	430	

$$\begin{array}{ll}
 \min & 600x_{\pi} + 250x_{\phi} + 350x_{\alpha} + 500x_{\sigma} \\
 \text{s.t.} & 203x_{\pi} + 270x_{\phi} + 90x_{\alpha} + 500x_{\sigma} \geq 2000 \\
 & 92x_{\pi} + 80x_{\phi} + 84x_{\alpha} + 90x_{\sigma} \geq 300 \\
 & 100x_{\pi} + 512x_{\phi} + 230x_{\alpha} + 210x_{\sigma} \geq 430 \\
 & x_{\pi} \geq 0 \quad x_{\phi} \geq 0 \quad x_{\alpha} \geq 0 \quad x_{\sigma} \geq 0
 \end{array}$$

Bipartite Matching



$$\begin{array}{ll}
 \min & -(x_1 + x_2 + \dots + x_9) \\
 \text{s.t.} & x_1 + x_2 \leq 1 \\
 & x_3 + x_4 \leq 1 \\
 & x_5 + x_6 \leq 1 \\
 & x_7 + x_8 + x_9 \leq 1 \\
 & x_3 + x_4 \leq 1 \\
 & x_3 + x_5 \leq 1 \\
 & x_4 + x_6 + x_7 \leq 1 \\
 & x_1 + x_8 \leq 1 \\
 & x_2 + x_9 \leq 1 \\
 & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad \dots \quad x_9 \geq 0
 \end{array}$$

Ισοδύναμες Μορφές

- **Τυπική** μορφή : $\min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$
- **Κανονική** μορφή : $\min\{c^T x : Ax \geq b, x \geq 0\}$
- **Μεγιστοπ.** $\leftrightarrow$ **Ελαχιστοπ.** : $\max c^T x \Leftrightarrow \min -c^T x$
- **Ισότητα** $\leftrightarrow$ Ζευγάρι **ανισότητες**

$$a_i^T x = b_i \Leftrightarrow \begin{cases} a_i^T x \leq b_i \\ a_i^T x \geq b_i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a_i^T x \geq -b_i \\ a_i^T x \geq b_i \end{cases}$$

- **Ανισότητα** $\leftrightarrow$ **Ισότητα** και **slack** μεταβλητή :

$$a_i^T x \geq b_i \Leftrightarrow a_i^T x - s_i = b_i, \quad s_i \geq 0$$

- **Αρνητική** μεταβλητή : $x_j \leq 0 \Leftrightarrow -x_j \geq 0$
- **Όχι πρόσημο** : $x_j \geq 0 \Leftrightarrow x_j^+ - x_j^-, \quad x_j^+, x_j^- \geq 0$

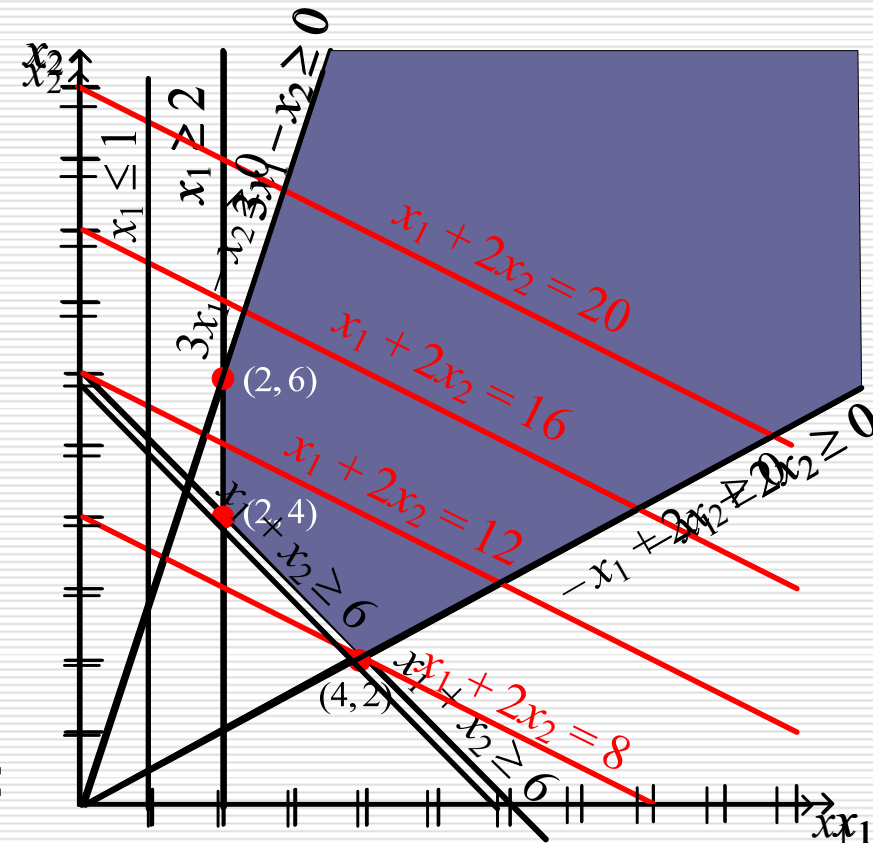
Ορολογία

- Αν x ικανοποιεί $Ax \geq b$ και $x \geq 0$ είναι **αποδεκτή** (feasible) **λύση**.
 - **Εφικτή περιοχή**: $P = \{x : Ax \geq b, x \geq 0\}$
- Γραμμικό Πρόγραμμα (ΓΠ, LP) είναι **επιλύσιμο** αν έχει αποδεκτή λύση και **μη-επιλύσιμο** διαφορετικά.
- **Βέλτιστη λύση** x^* : αποδεκτή λύση με ελάχιστη αντικειμενική τιμή, $c^T x^* = \min\{c^T x : Ax \geq b, x \geq 0\}$
- ΓΠ **μη-φραγμένο** (κάτω) αν $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,
 $\exists$ εφικτή λύση $x : c^T x \leq \lambda$.
 - **Επιλύσιμο και φραγμένο** (κάτω) : **πεπερασμένο**.
- Ένα ΓΠ μπορεί να είναι **μη-επιλύσιμο, μη-φραγμένο, ή πεπερασμένο**.

Παράδειγμα

$$\begin{array}{llll}
 \min & x_1 & + & 2x_2 \\
 \text{s.t.} & -x_1 & & \geq 2 \\
 & 3x_1 & - & x_2 \geq 0 \\
 & x_1 & + & x_2 \geq 6 \\
 & -x_1 & + & 2x_2 \geq 0
 \end{array}$$

- Εφικτή περιοχή : **πολύεδρο P** .
Φραγμένο : **πολύτοπο P** .
- Κορυφή : **ακραίο σημείο**
(όχι κυρτός συνδυασμός άλλων)
 $\forall y \neq 0, x + y \notin P \vee x - y \notin P$
- Φραγμένο πολύεδρο (πεπερασμένο):
Υπάρχει **κορυφή** που αντιστοιχεί σε **βέλτιστη λύση** !



Κορυφές

- Αν $\min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$ είναι επιλύσιμο και φραγμένο, υπάρχει **κορυφή – βέλτιστη λύση**.
- Αν $P = \{x : Ax = b, x \geq 0\} \neq \emptyset$, το P έχει **τουλάχιστον μία κορυφή**.
- $m \times n$ πίνακας A (περιορισμοί) :
 - $\#(\text{ανεξάρτ.})$ εξισώσεων $m < \# \text{μεταβλητών } n$.
 - βαθμό m (m γραμμικά ανεξάρτητες στήλες).
- Εφικτή λύση $x \in P$ είναι **κορυφή** ανν στήλες $\{j \in [n] : x_j > 0\}$ **γραμμικά ανεξάρτητες**.

Βασικές Εφικτές Λύσεις

□ **Βασική (εφικτή) λύση** (basic (feasible) solution):

■ **Βάση** : m γραμμικά ανεξάρτ. στήλες του A .

■ **Βάση** ορίζει **τιμές** για **βασικές** μεταβλητές.

■ **Μη-βασικές** μεταβλητές στο **0**.

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & 7 \\ 2x_1 & + & 0x_2 & - & 7x_3 & + & x_4 & = & 9 \\ x_1 & & x_2 & & x_3 & & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

□ Βασικές λύσεις: $[\frac{9}{2}, \frac{5}{4}, 0, 0]$, $[22, 0, 5, 0]$, $[2, 0, 0, 5]$,
 $[0, \frac{11}{7}, -\frac{9}{7}, 0]$, $[0, -1, 0, 9]$, $[0, 0, -\frac{1}{2}, \frac{11}{2}]$

□ Βασικές εφικτές λύσεις $\leftrightarrow$ κορυφές

Βασικές Εφικτές Λύσεις

- x κορυφή – ΒΕΛ του $P = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$
ανν υπάρχει $B \subseteq [n], |B| = m, (\text{βάση})$:
 - $x_N = 0, N = [n] \setminus B$ (μη-βασικές μεταβλητές).
 - A_B είναι αντιστρέψιμος.
 - $x_B = A_B^{-1}b \geq 0$ (βασικές μεταβλητές).
- Κάθε ΒΕΛ αποτελεί κορυφή του P .
- Υπάρχουν κορυφές που αντιστοιχούν σε πολλές διαφορετικές ΒΕΛ.

Βασικές Εφικτές Λύσεις

- Αν $P = \{x : Ax = b, x \geq 0\} \neq \emptyset$, το P έχει τουλάχιστον μία Βασική Εφικτή Λύση (ΒΕΛ).
- Για κάθε ΒΕΛ x , υπάρχει c_x : x βέλτιστη λύση του $\min\{c_x^T x : Ax = b, x \geq 0\}$
- Υπάρχουν $< \binom{n}{m}$ «υποψήφιος» βέλτιστες λύσεις (κορυφές - ΒΕΛ) του $\min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$
- **Αλγόριθμος** :
 - Δημιούργησε όλες τις βασικές λύσεις.
 - Επέστρεψε τη βασική εφικτή λύση με μικρότερη αντικειμενική τιμή.

Αλγόριθμος Simplex

- [Dantzig, 1947], καλύτερη πρακτική επιλογή.
- Ξεκίνησε από **κορυφή x** (βάση B).
- Υπάρχει **γειτονική κορυφή x'** με **μικρότερο κόστος**:
 - Ναι : μετακινήσου στη x' και συνέχισε.
 - Όχι : βέλτιστη λύση.
- Πως ελέγχουμε αν **ΓΠ επιλύσιμο** και βρίσκουμε **αρχική κορυφή** ;
- Πως καταλαβαίνουμε αν **ΓΠ μη-φραγμένο** ;
- **Pivoting** : γειτονική κορυφή με μικρότερο κόστος.

Εναλλαγή Στηλών

$$\begin{array}{ll}\min & c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ \text{s.t.} & A_B x_B + A_N x_N = b \\ & x_B, x_N \geq 0\end{array}$$

□ Αφού $x_N = 0$, $x_B = A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_N x_N$ και

$$\begin{aligned}c^T x &= c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ &= c_B^T (A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_N x_N) + c_N^T x_N \\ &= c_B^T A_B^{-1}b + (c_N^T - c_B^T A_B^{-1}A_N)x_N\end{aligned}$$

- **Ανηγμένο κόστος** : $\tilde{c}_N^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1}A_N$
- Μη-βασική μετ. με **αρνητικό** ανηγμένο κόστος : μείωση κόστους αν αυξηθεί (**γίνει βασική**).
 - Αύξηση καθορίζεται από $x_B = A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_N x_N$ (μεταβλητές είναι **μη-αρνητικές**).
 - **Μη-αρνητικό** ανηγμένο κόστος : **βέλτιστη λύση**.

Παράδειγμα

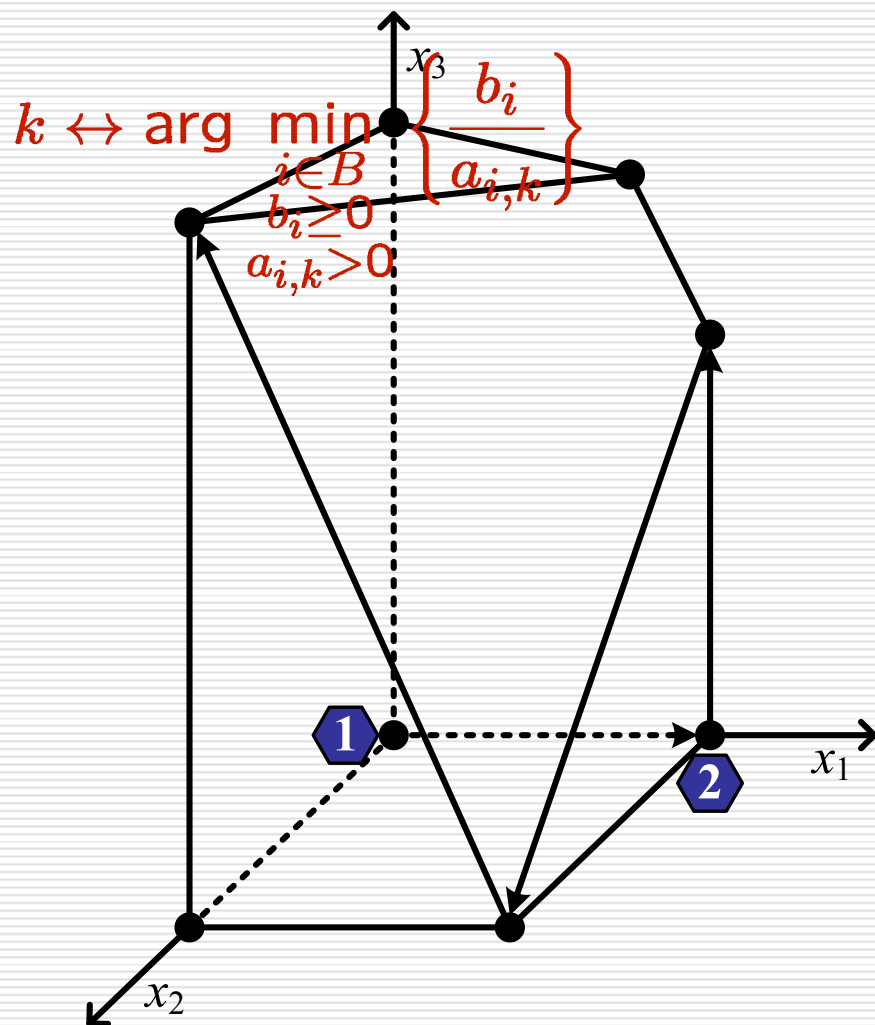
$$k \leftrightarrow \arg \min_{\substack{i \in B \\ b_i \geq 0 \\ a_{i,k} > 0}} \left\{ \frac{b_i}{a_{i,k}} \right\}$$

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_2 + x_4 + 5x_7 \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ & x_1 + x_5 = 2 \\ & x_3 + x_6 = 3 \\ & 3x_2 + x_3 + x_7 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{array}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0	2	0	1	0	0	5
4	1	1	1	1	0	0	0
2	1	0	0	0	1	0	0
3	0	0	1	0	0	1	0
6	0	3	1	0	0	0	1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
-34	-1	-14	-6	0	0	0	0
4	1	1	1	1	0	0	0
2	1	0	0	0	1	0	0
3	0	0	1	0	0	1	0
6	0	3	1	0	0	0	1

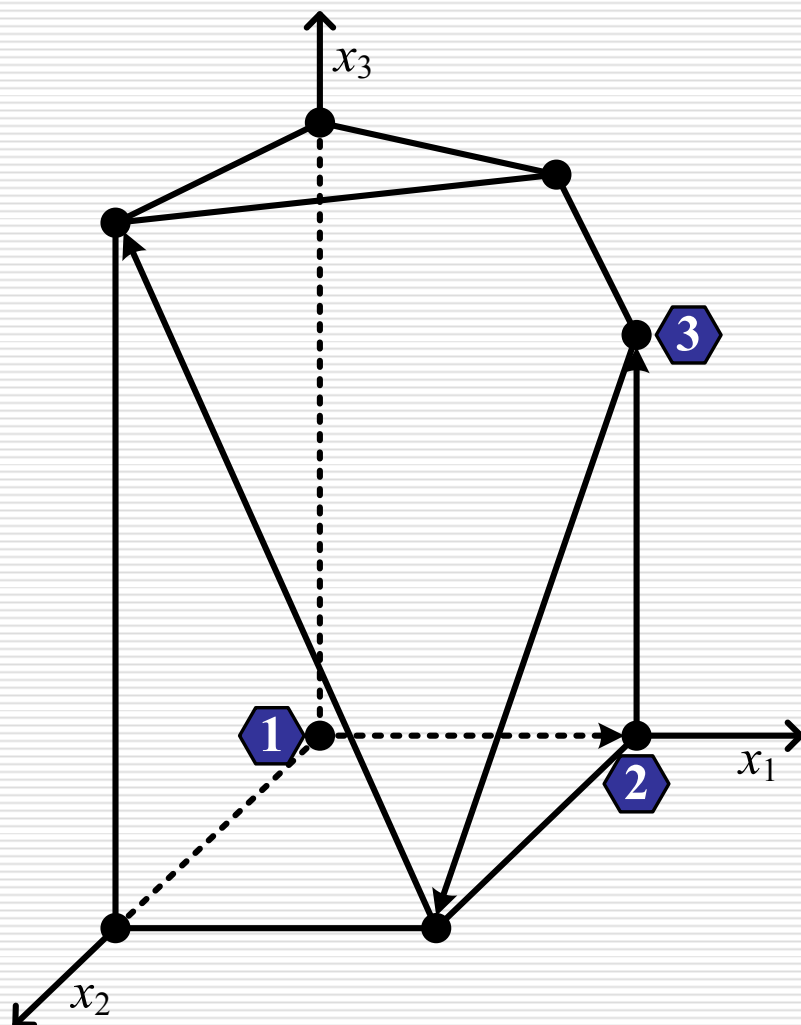
Παράδειγμα



	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
-34	-1	-14	-6	0	0	0	0
4	1	1	1	1	0	0	0
2	1	0	0	0	1	0	0
3	0	0	1	0	0	1	0
6	0	3	1	0	0	0	1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
-32	0	-14	-6	0	1	0	0
2	0	1	1	1	-1	0	0
2	1	0	0	0	1	0	0
3	0	0	1	0	0	1	0
6	0	3	1	0	0	0	1

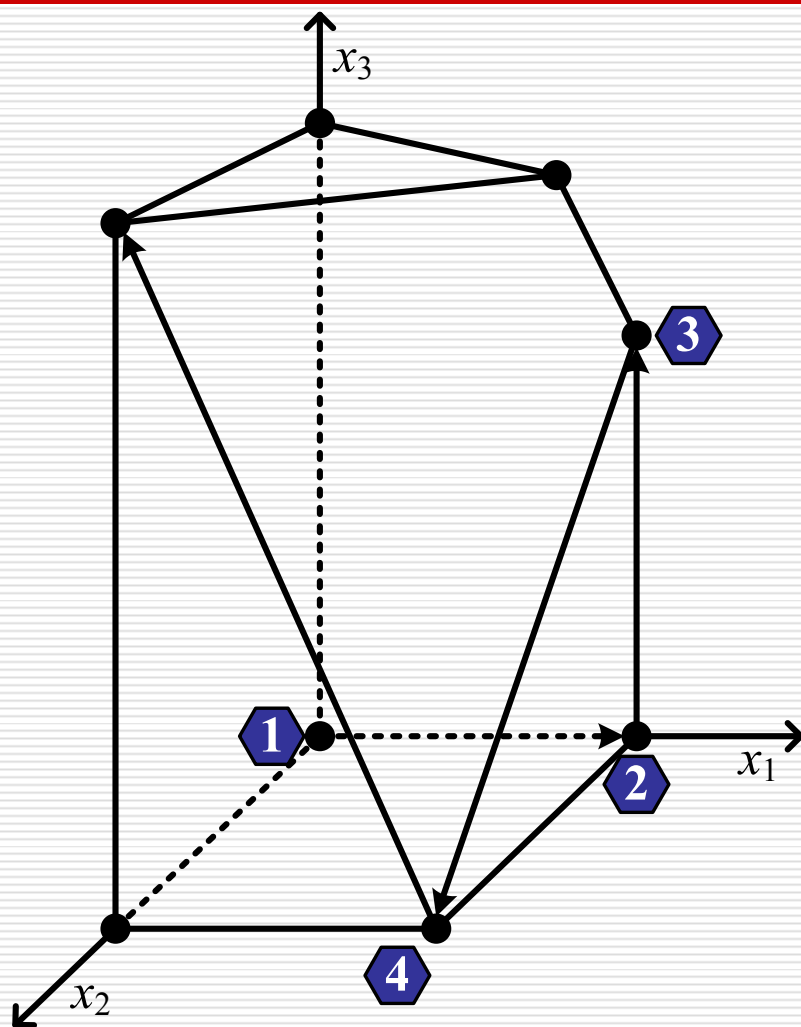
Παράδειγμα



	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
-32	0	-14	-6	0	1	0	0
2	0	1	1	1	-1	0	0
2	1	0	0	0	1	0	0
3	0	0	1	0	0	1	0
6	0	3	1	0	0	0	1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
-20	0	-8	0	6	-5	0	0
2	0	1	1	1	-1	0	0
2	1	0	0	0	1	0	0
1	0	-1	0	-1	1	1	0
4	0	2	0	-1	1	0	1

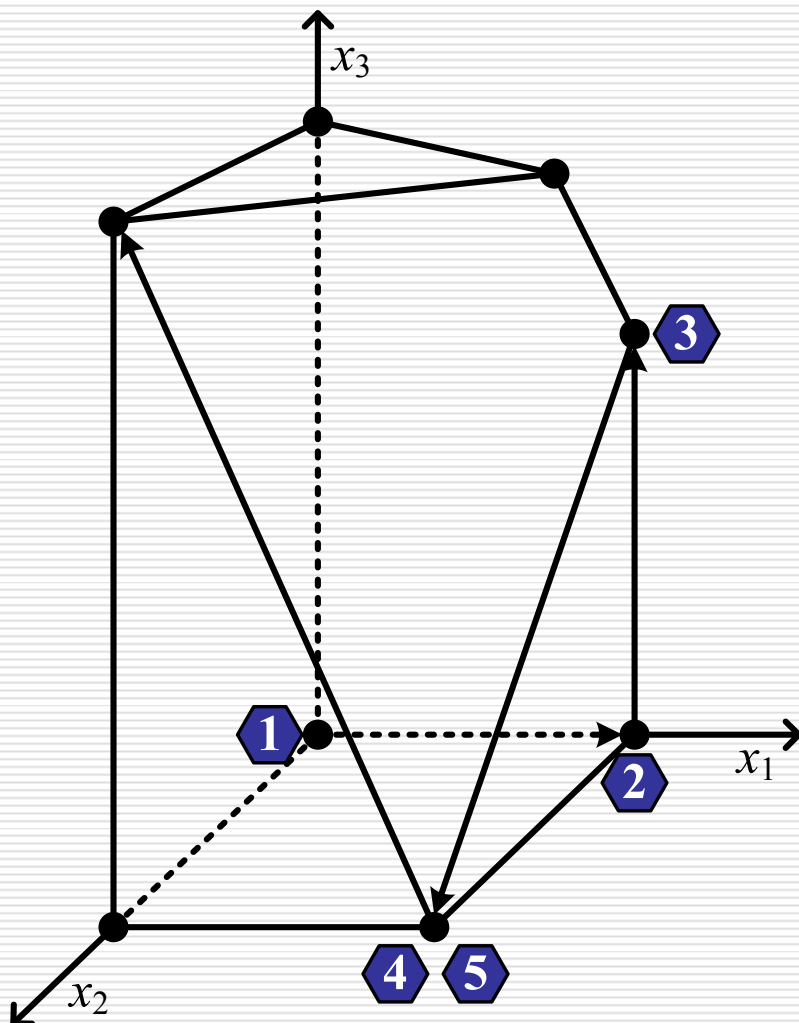
Παράδειγμα



	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
-20	0	-8	0	6	-5	0	0
2	0	1	1	1	-1	0	0
2	1	0	0	0	1	0	0
1	0	-1	0	-1	1	1	0
4	0	2	0	-1	1	0	1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
-4	0	0	8	14	-13	0	0
2	0	1	1	1	-1	0	0
2	1	0	0	0	1	0	0
3	0	0	1	0	0	1	0
0	0	0	-2	-3	3	0	1

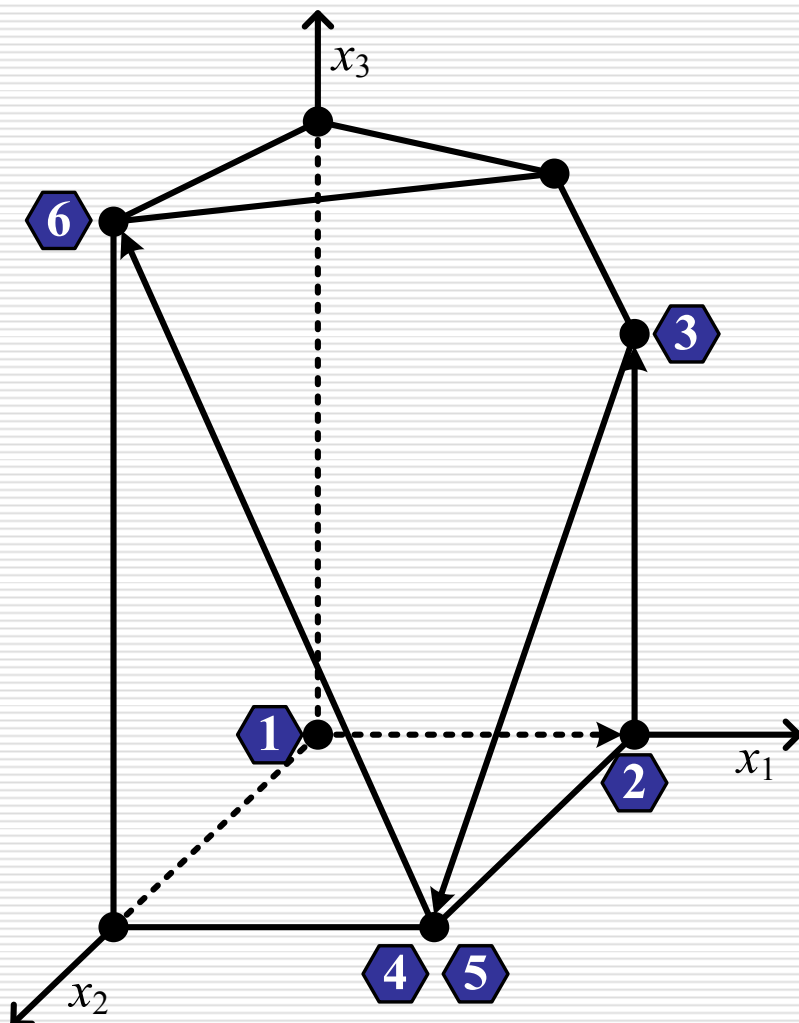
Παράδειγμα



	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
-4	0	0	8	14	-13	0	0
2	0	1	1	1	-1	0	0
2	1	0	0	0	1	0	0
3	0	0	1	0	0	1	0
0	0	0	-2	-3	3	0	1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
-4	0	0	-2/3	1	0	0	13/3
2	0	1	1/3	0	0	0	1/3
2	1	0	2/3	1	0	0	-1/3
3	0	0	1	0	0	1	0
0	0	0	-2/3	-1	1	0	1/3

Παράδειγμα



	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
-4	0	0	-2/3	1	0	0	13/3
2	0	1	1/3	0	0	0	1/3
2	1	0	2/3	1	0	0	-1/3
3	0	0	1	0	0	1	0
0	0	0	-2/3	-1	1	0	1/3

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
-2	1	0	0	2	0	0	4
1	-1/2	1	0	-1/2	0	0	1/2
3	3/2	0	1	3/2	0	0	-1/2
0	-3/2	0	0	-3/2	0	1	1/2
2	1	0	0	0	1	0	0

Παράδειγμα

$$\begin{array}{ll}\min & 2x_2 + x_4 + 5x_7 \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ & x_1 + x_5 = 2 \\ & x_3 + x_6 = 3 \\ & 3x_2 + x_3 + x_7 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0\end{array}$$

$$x^* = [0, 1, 3, 0, 2, 0, 0], \quad c^T x^* = 2$$

Παράδειγμα

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
-4	0	0	-2	1	0	0	13/3
2	0	1	-1	0	0	0	1/3
2	1	0	-2	1	0	0	-1/3
3	0	0	-3	0	0	1	0
0	0	0	-1	-1	1	0	1/3

□ **Μη-φραγμένο** : Το x_3 μεγαλώνει απεριόριστα (μικραίνοντας κόστος) και λύση εφικτή.

Χρόνος Εκτέλεσης Simplex

- Μετακίνηση σε κορυφές με μικρότερο κόστος :
τερματισμός με βέλτιστη λύση (αν υπάρχει).
- Παραμονή σε ίδια κορυφή (ή ίδιο κόστος) :
αέναη ανακύκλωση !
 - Κανόνες εναλλαγής στηλών (π.χ. [Bland 77])
εγγυώνται τερματισμό .
- Πολύ γρήγορος στην πράξη αλλά εκθετικός
(#κορυφών) στη χειρότερη περίπτωση.
- Ανοικτό αν υπάρχει κανόνας εναλλαγής στηλών
που οδηγεί σε πολυωνυμικό χρόνο .

Αλγόριθμοι Πολυωνυμικού Χρόνου

- **Ελλειψοειδές [Khachian 79] :**
 - Δυαδική αναζήτηση: Σταδιακός περιορισμός ενός ελλειψοειδούς που εγγυημένα περιέχει λύση.
 - Πρακτικά μη-εφαρμόσιμος (αργός, αριθμητική αστάθεια).
- **Μέθοδοι Εσωτερικού Σημείου [Karmakar 84] :**
 - Κίνηση στο εσωτερικό του πολυέδρου (κατάλληλους μετασχηματισμούς).
 - Πρακτικά εφαρμόσιμος, αλλά Simplex!
- **Ταχύτερος αλγόριθμος [Ye 91] .**