

Δυσικότητα

Δημήτρης Φωτάκης

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



Πιστοποίηση Άνω Φράγματος

□ Έχει το ΓΠ **εφικτή λύση** με κόστος ≤ 2 ;

$$\begin{array}{ll}\min & 2x_2 + x_4 + 5x_7 \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ & x_1 + x_5 = 2 \\ & x_3 + x_6 = 3 \\ & 3x_2 + x_3 + x_7 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0\end{array}$$

□ **Ναι**, π.χ. $[0, 1, 3, 0, 2, 0, 0]$.

Πιστοποίηση Κάτω Φράγματος;

- Έχει το ΓΠ **εφικτή λύση** με κόστος < 2 ;
- Έχουν **όλες** οι εφικτές λύσεις **κόστος ≥ 2** ;

$$\begin{array}{ll}\min & 2x_2 + x_4 + 5x_7 \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ & x_1 + x_5 = 2 \\ & x_3 + x_6 = 3 \\ & 3x_2 + x_3 + x_7 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0\end{array}$$

- Αν όλες οι εφικτές λύσεις έχουν κόστος ≥ 2 , πως θα το **πιστοποιήσουμε**;

Πιστοποίηση Κάτω Φράγματος

$$\begin{array}{ll}\min & 2x_2 + x_4 + 5x_7 \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ & x_1 + x_5 = 2 \\ & x_3 + x_6 = 3 \\ & 3x_2 + x_3 + x_7 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0\end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -4 \\ 3x_2 + x_3 + x_7 = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 2 = -x_1 + 2x_2 - x_4 + x_7 \\ \leq 2x_2 + x_4 + 5x_7 \end{array}$$

□ Το $[0, 1, 3, 0, 2, 0, 0]$ (κόστος 2) είναι
βέλτιστη λύση (με απόδειξη) !

Υπολογισμός Κάτω Φράγματος

$$\begin{array}{ll}\min & 7x_1 + x_2 + 5x_3 \\ \text{s.t.} & x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 10 \\ & 5x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{array}$$

□ Λύση $[1.8, 0, 3]$ με κόστος 27.6 . Καλύτερη;

$$\left. \begin{array}{ll} 2x_1 - 2x_2 + 6x_3 & \geq 20 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 & \geq 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{ll} 26 & \leq 7x_1 + 5x_3 \\ & \leq 7x_1 + x_2 + 5x_3 \end{array}$$

Υπολογισμός Κάτω Φράγματος

$$\begin{array}{ll} \min & 7x_1 + x_2 + 5x_3 \\ \text{s.t.} & x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 10 \\ & 5x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & 10y_1 + 6y_2 \\ \text{s.t.} & y_1 + 5y_2 \leq 7 \\ & -y_1 + 2y_2 \leq 1 \\ & 3y_1 - y_2 \leq 5 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$

□ Λύση $[1.8, 0, 3]$ με κόστος 27.6. Καλύτερη;

$$\left. \begin{array}{l} y_1(x_1 - x_2 + 3x_3) \geq 10y_1 \\ y_2(5x_1 + 2x_2 - x_3) \geq 6y_2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10y_1 + 6y_2 \leq (y_1 + 5y_2)x_1 + (-y_1 + 2y_2)x_2 + (3y_1 - y_2)x_3$$

□ **Πρωτεύον** (primal) και **δυϊκό** (dual) ΓΠ.

Υπολογισμός Κάτω Φράγματος

$$\begin{array}{ll} \min & 7x_1 + x_2 + 5x_3 \\ \text{s.t.} & x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 10 \\ & 5x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & 10y_1 + 6y_2 \\ \text{s.t.} & y_1 + 5y_2 \leq 7 \\ & -y_1 + 2y_2 \leq 1 \\ & 3y_1 - y_2 \leq 5 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$

- Δυϊκό λύση $y = [2, 1]$ ωφέλειας 26 (κάτω φράγμα στο πρωτεύον).
- Πρωτεύον λύση $x = [1.75, 0, 2.75]$ κόστους 26 !
- Ισότητα δεν είναι τυχαία !

Θεώρημα Δυϊκότητας στο ΓΠ.

Άλλο Παράδειγμα

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_2 + x_4 + 5x_7 \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ & x_1 + x_5 = 2 \\ & x_3 + x_6 = 3 \\ & 3x_2 + x_3 + x_7 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \max & 4y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 6y_4 \\ \text{s.t.} & y_1 + y_2 \leq 0 \\ & y_1 + 3y_4 \leq 2 \\ & y_1 + y_3 + y_4 \leq 0 \\ & y_1 \leq 1 \\ & y_2 \leq 0 \\ & y_3 \leq 0 \\ & y_4 \leq 5 \end{array}$$

- Πρωτεύον λύση $[0, 1, 3, 0, 2, 0, 0]$ κόστους 2.
- Δυϊκό λύση $[-1, 0, 0, 1]$ ωφέλειας 2.

Δυσικότητα

- Πρωτεύον: $p = \min\{c^T x : Ax \geq b, x \geq 0\}$
- Δυσικό : $d = \max\{b^T y : A^T y \leq c, y \geq 0\}$
 $d = \min\{(-b^T)y : (-A^T)y \geq -c, y \geq 0\}$
- Δυσικό του δυσικού :
 $\max\{(-c^T)z : (-A^T)^T z \leq -b, z \geq 0\}$
 $= \min\{c^T z : Az \geq b, z \geq 0\} = p$
- ... είναι το **πρωτεύον!**

Ασθενής Δυϊκότητα

- Πρωτεύον: $p = \min\{c^T x : Ax \geq b, x \geq 0\}$
- Δυϊκό : $d = \max\{b^T y : A^T y \leq c, y \geq 0\}$
- Ασθενής Δυϊκότητα : αν x και y εφικτές λύσεις για το πρωτεύον και δυϊκό, $c^T x \geq b^T y$
$$c \geq A^T y \Leftrightarrow c^T \geq (A^T y)^T = y^T A$$
$$c^T x \geq (y^T A)x = y^T (Ax) \geq y^T b = b^T y$$
- Αν πρωτεύον και δυϊκό εφικτά, $p \geq d$

Ισχυρή Δυϊκότητα

- Πρωτεύον: $p = \min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$
- Δυϊκό : $d = \max\{b^T y : A^T y \leq c\}$
- Ισχυρή Δυϊκότητα : αν πρωτεύον βέλτιστη λύση, δυϊκό βέλτιστη λύση και $p = d$

$$\left. \begin{array}{l} x_B^* = A_B^{-1}b \\ x_N^* = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} c^T x^* = c_B^T x_B^* = c_B^T (A_B^{-1}b) \\ = (c_B^T A_B^{-1})b = y^T b \end{array}$$

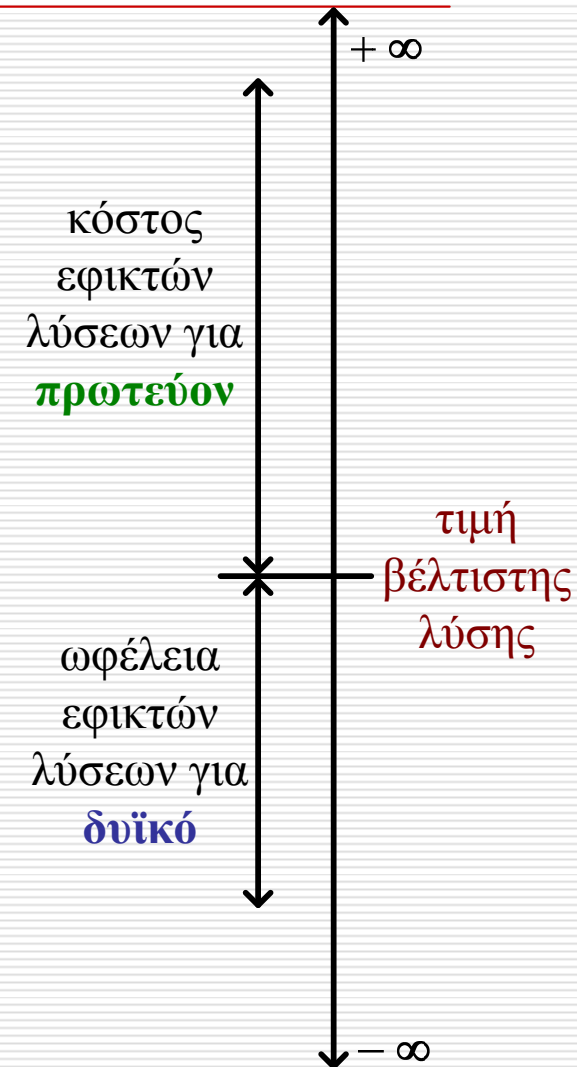
- $y = (A_B^{-1})^T c_B$ εφικτή και βέλτιστη λύση για δυϊκό.

$$0 \leq c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N = c_N^T - y^T A_N \Rightarrow A_N^T y \leq c_N$$

- Βέλτιστη για δυϊκό εύκολα από ταμπλό Simplex.

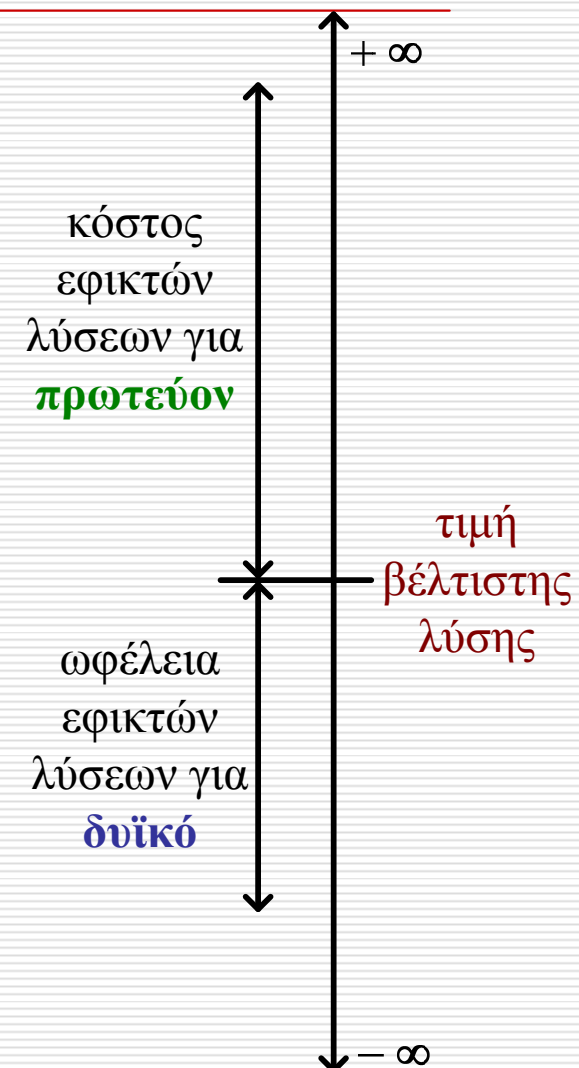
ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ

- Αν πρωτεύον και δυϊκό **επιλύσιμα**, **βέλτιστες** λύσεις με **ίδια τιμή**.
- Αν πρωτεύον **μη-φραγμένο**, δυϊκό **μη-επιλύσιμο**.
- Αν δυϊκό **μη-φραγμένο**, πρωτεύον **μη-επιλύσιμο**.
- Πρωτεύον και δυϊκό **μη-επιλύσιμα**.



Συνέπειες

	Βέλτιστη	Μη-φραγμ	Μη-επιλυσ
Βέλτιστη	☒	☒	☒
Μη-φραγμ	☒	☒	☒
Μη-επιλυσ	☒	☒	☒



Κατασκευή Δυϊκού

- $\min \leftrightarrow \max$
- Ισότητα $\leftrightarrow$ Μεταβλητή μη-περιορισμένο πρόσημο
- Ανισότητα $\leftrightarrow$ Μεταβλητή μη-αρνητική

$\min cx$		$\max by$
$A_i x = b_i$	$i \in M_e$	$y_i \geq 0$
$A_i x \geq b_i$	$i \in M_i$	$y_i \geq 0$
$x_j \geq 0$	$j \in N_r$	$A^j y \leq c_j$
$x_j \leq 0$	$j \in N_u$	$A^j y = c_j$

Complementary Slackness

- Εφικτές λύσεις x (πρωτεύον) και y (δυσικό) είναι βέλτιστες ανν
 - Συνθήκες πρωτεύοντος:
 $\forall j \in [m] \ x_j(c_j - A^j y) = 0 \ (x_j \neq 0 \Rightarrow A^j y = c_j)$
 - Συνθήκες δυσικού:
 $\forall i \in [n] \ y_i(A_i x - b_i) = 0 \ (y_i \neq 0 \Rightarrow A_i x = b_i)$
$$\begin{aligned} c^T x - b^T y &= c^T x - y^T A x + y^T A x - y^T b \\ &= x^T (c - A^T y) + y^T (A x - b) \geq 0 \end{aligned}$$
$$c^T x = b^T y \Leftrightarrow x^T (c - A^T y) = 0 \wedge y^T (A x - b) = 0$$

Παράδειγμα

$$\begin{array}{ll} \min & 7x_1 + x_2 + 5x_3 \\ \text{s.t.} & x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 10 \\ & 5x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & 10y_1 + 6y_2 \\ \text{s.t.} & y_1 + 5y_2 \leq 7 \\ & -y_1 + 2y_2 \leq 1 \\ & 3y_1 - y_2 \leq 5 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$

- Πρωτεύον λύση $x = [1.75, 0, 2.75]$ κόστους 26 .
- Δυϊκό λύση $y = [2, 1]$ ωφέλειας 26 .
 - Αλλαγή b σε $b' = [10.5, 6.5]$. Πως μεταβάλλεται το κόστος της βέλτιστης λύσης.

Παράδειγμα

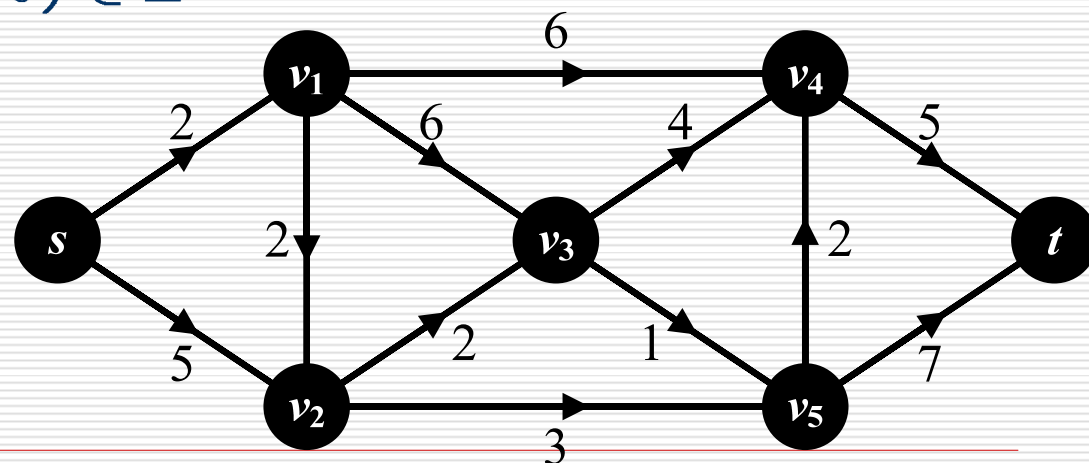
$$\begin{array}{ll} \min & 2x_2 + x_4 + 5x_7 \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ & x_1 + x_5 = 2 \\ & x_3 + x_6 = 3 \\ & 3x_2 + x_3 + x_7 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & 4y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 6y_4 \\ \text{s.t.} & y_1 + y_2 \leq 0 \\ & y_1 + 3y_4 \leq 2 \\ & y_1 + y_3 \leq 0 \\ & y_1 \leq 1 \\ & y_2 \leq 0 \\ & y_3 \leq 0 \\ & y_4 \leq 5 \end{array}$$

- Πρωτεύον λύση $[0, 1, 3, 0, 2, 0, 0]$ κόστους 2.
- Δυϊκό λύση $[-1, 0, 0, 1]$ ωφέλειας 2.

Primal-Dual

$$\begin{array}{ll}\min & \sum_{e \in E} w(e)x_e \\ \text{s.t.} & \sum_{e \in \text{out}(v)} x_e - \sum_{e \in \text{in}(v)} x_e = 0 \quad \forall v \in V \setminus \{s, t\} \\ & \sum_{e \in \text{in}(t)} x_e - \sum_{e \in \text{out}(t)} x_e = 1 \\ & x_e \geq 0 \quad \forall e \in E\end{array}$$

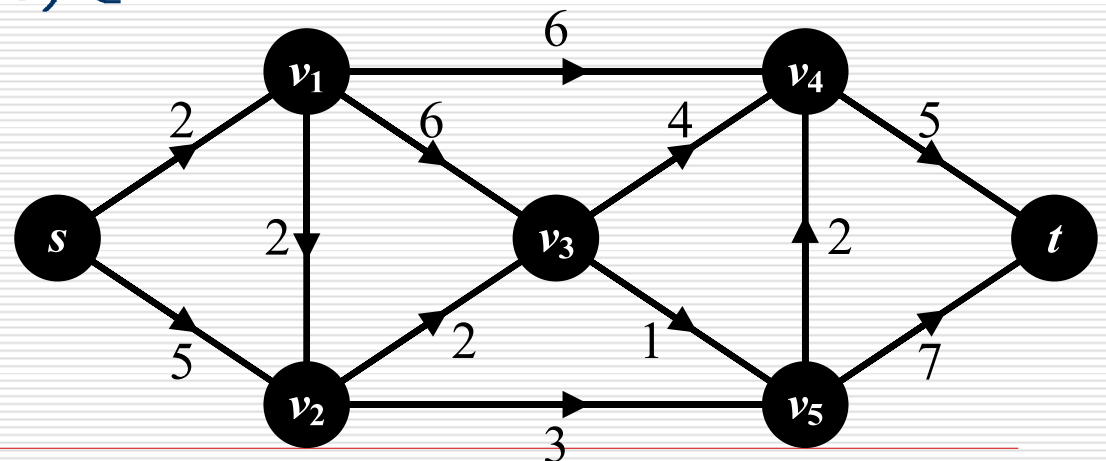
$$\begin{array}{ll}\max & y_t \\ \text{s.t.} & y_v - y_u \leq w(u, v) \quad \forall (u, v) \in E \\ & y_s = 0\end{array}$$



Αλγόριθμος Dijkstra

$$\begin{array}{ll}\min & \sum_{e \in E} w(e)x_e \\ \text{s.t.} & \sum_{e \in \text{out}(v)} x_e - \sum_{e \in \text{in}(v)} x_e = 0 \quad \forall v \in V \setminus \{s, t\} \\ & \sum_{e \in \text{in}(t)} x_e - \sum_{e \in \text{out}(t)} x_e = 1 \\ & x_e \geq 0 \quad \forall e \in E\end{array}$$

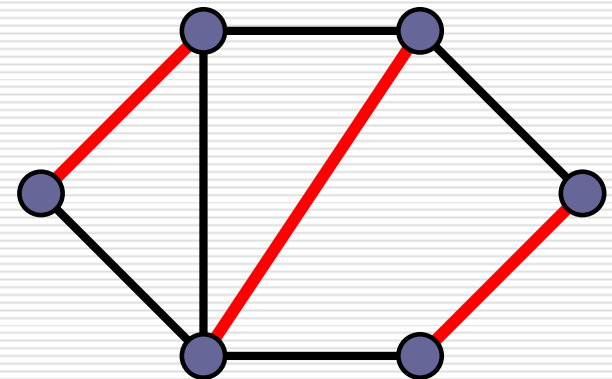
$$\begin{array}{ll}\max & y_t \\ \text{s.t.} & y_v - y_u \leq w(u, v) \quad \forall (u, v) \in E \\ & y_s = 0\end{array}$$



Μέγιστο Ταίριασμα

□ **Ταίριασμα** : ακμές χωρίς κοινά άκρα.

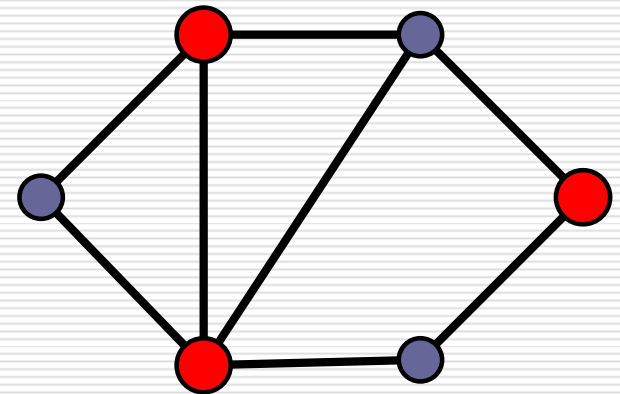
$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{e \in E} x_e \\ \text{s.t.} & \sum_{e: v \in e} x_e \leq 1 \quad \forall v \in V \\ & x_e \in \{0, 1\} \quad \forall e \in E \end{array}$$



Ελάχιστο Κάλυμμα Κορυφών

- **Κάλυμμα Κορυφών** : σύνολο κορυφών ώστε κάθε ακμή έχει ένα τουλάχιστον άκρο της σε αυτό.

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{v \in V} y_v \\ \text{s.t.} & y_v + y_u \geq 1 \quad \forall \{v, u\} \in E \\ & y_v \in \{0, 1\} \quad \forall v \in V \end{array}$$

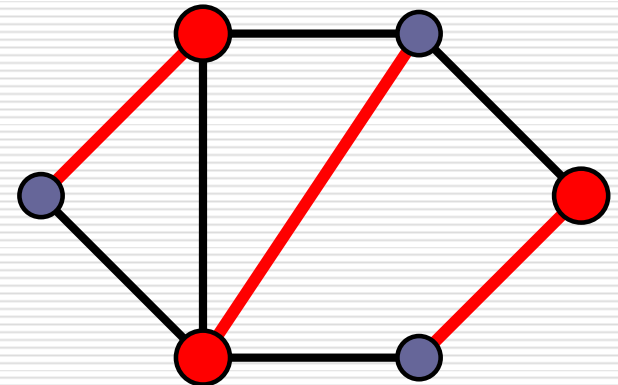


Δυϊκότητα

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{v \in V} y_v \\ \text{s.t.} & y_v + y_u \geq 1 \quad \forall \{v, u\} \in E \\ & y_v \geq 0 \quad \forall v \in V \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{e \in E} x_e \\ \text{s.t.} & \sum_{e: v \in e} x_e \leq 1 \quad \forall v \in V \\ & x_e \geq 0 \quad \forall e \in E \end{array}$$

- Ταίριασμα M και κάλυμμα κορυφών C , $|C| \geq |M|$
- Ταίριασμα M και κάλυμμα κορυφών C : $|C| = |M| \Rightarrow M$ μέγιστο και C ελάχιστο.



Αντιμετώπιση NP-Δυσκολίας

- Αν $P \neq NP$, όχι αλγόριθμος που για **όλα τα στιγμιότυπα NP-δύσκολου** προβλήματος υπολογίζει βέλτιστη λύση σε πολυωνυμικό χρόνο.
- **Ευρετικές τεχνικές:** συχνά γρήγορα βέλτιστη λύση αλλά και **δύσκολα στιγμιότυπα** (αργά ή / και όχι βέλτιστη λύση).
 - Τοπική αναζήτηση.
 - Simulated annealing.
 - Γενετικοί αλγόριθμοι.
 - Branch-and-Bound, Branch-and-Cut.
 - ...

Αντιμετώπιση NP-Δυσκολίας

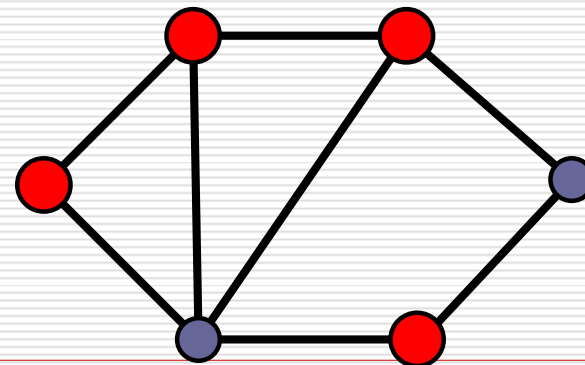
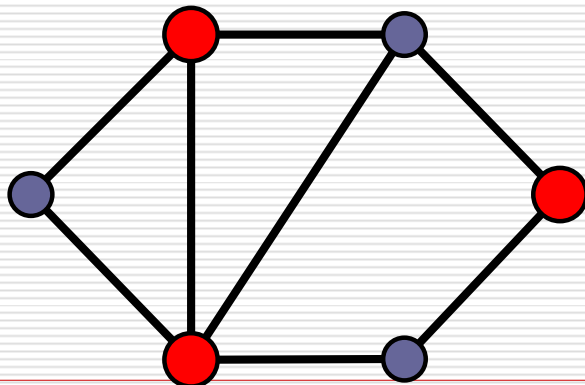
- «Εύκολες» περιπτώσεις.
- Ανάλυση μέσης περίπτωσης / πιθανοτική ανάλυση.
 - Γρήγοροι σε στιγμιότυπα που εμφανίζονται συχνότερα (αργοί μόνο για στιγμιότυπα με μικρή πιθανότητα).
 - Διαφορά από ευρετικές τεχνικές: θεωρητική ανάλυση.
 - Γνωρίζουμε πιθανότητα και πότε καλή / κακή απόδοση.
- Αλγόριθμοι προσέγγισης [Johnson, Sahni and Gonzalez, ..., 70's]
 - Αλγόριθμοι πολυωνυμικού χρόνου (χ.π.).
 - Όχι (πάντα) βέλτιστη λύση.
 - Ανάλυση χειρότερης περίπτωσης ως προς ποιότητα λύσης.

Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι

- Απόδοση χειρότερης περίπτωσης γνωστών ευρετικών αλγόριθμων (αρχικά κυρίως άπληστων).
- Σχεδιασμός poly-time αλγόριθμων που συμπεριφέρονται **αποδεδειγμένα καλά** για κάθε στιγμιότυπο.
- **Λόγος προσέγγισης**
 - Αλγόριθμου A για πρόβλημα Π: $\gamma_{\Pi}(A) = \max_{\sigma \in S_{\Pi}} \frac{f_{\sigma}(\lambda_A(\sigma))}{f_{\sigma}(\lambda^*(\sigma))}$
 - Προβλήματος Π: $\gamma_{\Pi} = \min_{A \text{ poly-time alg}} \{\gamma_{\Pi}(A)\}$

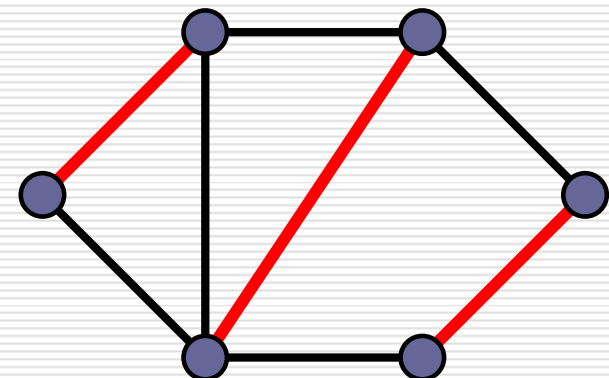
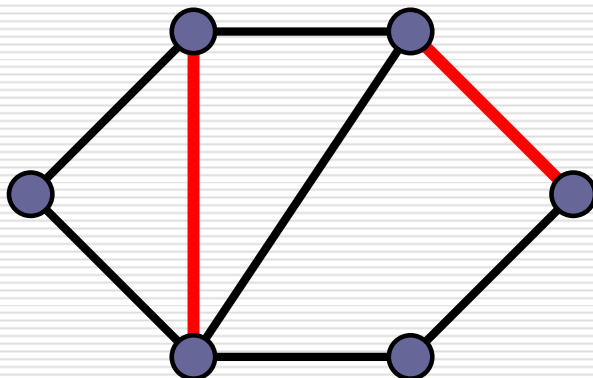
Ελάχιστο Κάλυμμα Κορυφών

- **Είσοδος:** γράφημα $G(V, E)$
- **Εφικτή λύση:** υποσύνολο κορυφών $C \subseteq V$:
κάθε ακμή τουλάχιστον ένα άκρο στο C
 - C είναι **κάλυμμα κορυφών** (vertex cover).
- **Στόχος:** κάλυμμα κορυφών με **ελάχιστο #κορυφών**.
- **NP-δύσκολο** πρόβλημα.



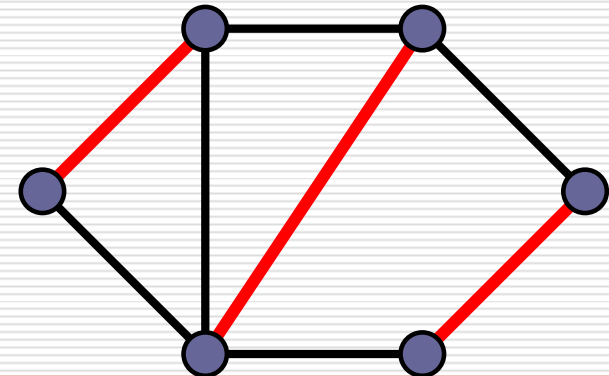
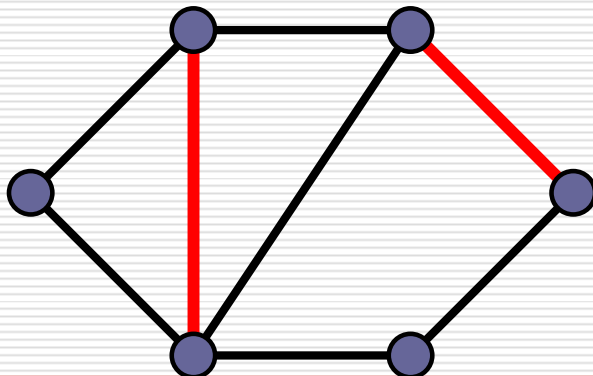
Ταίριασμα

- Ταίριασμα : υποσύνολο ακμών $M \subseteq E$ χωρίς κοινά άκρα.
- Για κάθε ταίριασμα M , τουλάχιστον ένα από τα άκρα ακμών M ανήκει σε κάθε κάλυμμα κορυφών:
 - $\forall$ ταίριασμα M , ελάχιστο κάλυμμα κορυφών $|C^*| \geq |M|$



Μεγιστοτικό Ταίριασμα

- **Μεγιστικό ταίριασμα** : ταίριασμα που αν προσθέσουμε ακμή παύει να είναι ταίριασμα.
- Μεγιστικό ταίριασμα M : κάθε **ακμή εκτός M** έχει **κοινό άκρο** με ακμή του M .
- Άκρα ακμών μεγιστικού ταίριασματος M συγκροτούν κάλυμμα κορυφών C .
- $|C| = 2|M| \leq 2|C^*|$



Αλγόριθμος MM

- Υπολογισμός **μεγιστικού ταιριάσματος** M .
 - **Προσθήκη ακμών** ενόσω υπάρχουν ακμές που προσθήκη τους δίνει ταίριασμα.
- Κάλυμμα κορυφών C : όλα τα **άκρα ακμών** M .
- Πολυωνυμικός χρόνος.
- **Ορθότητα** : ιδιότητα μεγιστοποιητικού ταιριάσματος.
- **Λόγος προσέγγισης = 2.**
 - $|C| = 2|M| \leq 2|C^*|$ (πάνω φράγμα).
 - Παραδείγματα όπου κόστος MM διπλάσιο βέλτιστου.