Προηγμένα Θέματα Αλγορίθμων (ΣΗΜΜΥ ΕΜΠ)
Αλγόριθμοι Δικτύων και Πολυπλοκότητα (ΕΜΠ - ΑΛΜΑ)

Διδάσκοντες: Δημήτρης Φωτάκης - Άρης Παγουρτζής

Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι

Επιμέλεια διαφανειών: Άρης Παγουρτζής

Άνοιξη 2021

Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι

- Αφορούν κυρίως σε προβλήματα βελτιστοποίησης: σε κάθε στιγμιότυπο αντιστοιχούν εφικτές (αποδεκτές / έγκυρες) λύσεις (feasible solutions) που η κάθε μια έχει μια τιμή μέσω μιας αντικειμενικής συνάρτησης (objective function) (συνήθως εκφράζει: κόστος, μήκος, βάρος, κέρδος, κ.λπ.).
  Ζητείται βέλτιστη λύση, δηλαδή εφικτή λύση με βέλτιστη τιμή.
- Προβλήματα ελαχιστοποίησης (minimization): **Shortest Paths, Dominating Set, Vertex Cover, TSP**.
- Προβλήματα μεγιστοποίησης (maximization): **Maximum Matching, Independent Set, Clique**.
- Κλάση **NPO** (**NP**-optimization): κάθε εφικτή λύση έχει πολυωνυμικό μήκος ως προς είσοδο, και επαληθεύεται σε πολυωνυμικό χρόνο.
  Το αντίστοιχο πρόβλημα απόφασης ανήκει στην κλάση **NP**.

Συμβολισμοί

- Π: πρόβλημα βελτιστοποίησης
- I: στιγμιότυπο (είσοδος) του προβλήματος
- $SOL_A(\Pi, I)$: η τιμή της λύσης που επιστρέφει ο αλγόριθμος A για το στιγμιότυπο I του προβλήματος Π.
- $OPT(\Pi, I)$: η τιμή της βέλτιστης λύσης για το στιγμιότυπο I του προβλήματος Π.

Σημείωση: Συχνά Π, A και I παραλείπονται.

Προσεγγισιμότητα: προβλήματα ελαχιστοποίησης

- Λόγος προσέγγισης αλγορίθμου: Το ελάχιστο ρ που ικανοποιεί

$$\frac{SOL_A(I)}{OPT(I)} \leq \rho$$

  για κάθε στιγμιότυπο I ενός προβλήματος ελαχιστοποίησης λέγεται λόγος (ή παράγοντας) προσέγγισης (approximation ratio) του αλγορίθμου A, και ο A λέγεται ρ-προσεγγιστικός αλγόριθμος για το πρόβλημα.
- Λόγος προσέγγισης προβλήματος: Αν για πρόβλημα Π υπάρχει ρ-προσεγγιστικός αλγόριθμος, λέμε ότι το Π προσεγγίζεται με λόγο (ή παράγοντα) ρ. Μας ενδιαφέρει το ελάχιστο ρ μεταξύ όλων των δυνατών προσεγγιστικών αλγορίθμων για το Π.

Σημείωση: συνήθως, ο όρος προσεγγιστικός αλγόριθμος αναφέρεται σε αλγόριθμο πολυωνυμικού χρόνου ως προς το μέγεθος εισόδου $|I|$.

Προσεγγισιμότητα: προβλήματα μεγιστοποίησης

- Προβλήματα μεγιστοποίησης: ο αλγόριθμος A λέγεται ρ-προσεγγιστικός για το Π αν για κάθε I:

$$\frac{SOL_A(I)}{OPT(I)} \geq \rho$$

  (δηλαδή $\rho < 1$ για προβλήματα μεγιστοποίησης)
- Λόγος προσέγγισης αλγορίθμου για πρόβλημα μεγιστοποίησης: το μέγιστο ρ που ικανοποιεί την παραπάνω σχέση (για κάθε I).
- Λόγος προσέγγισης προβλήματος: το μέγιστο ρ μεταξύ όλων των αλγορίθμων που το επιλύουν.

Προσεγγισιμότητα: εναλλακτικοί ορισμοί

- Εναλλακτικός ορισμός του λόγου προσέγγισης, κοινός για προβλήματα ελαχιστοποίησης και μεγιστοποίησης:

  Ενας αλγόριθμος A για ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης Π λέγεται ρ-προσεγγιστικός, αν για κάθε έγκυρο στιγμιότυπο I:

  $$\max\{\frac{SOL_A(I)}{OPT(I)}, \frac{OPT(I)}{SOL_A(I)}\} \leq \rho$$

  Στο πλαίσιο αυτό $\rho > 1$ πάντοτε. Ακολουθείται σε κάποια βιβλιογραφία, εμείς θα χρησιμοποιήσουμε τους προηγούμενους ορισμούς.

- Παλαιότερος ορισμός εξετάζει το *σχετικό σφάλμα*. Ένας αλγόριθμος A έχει σχετικό σφάλμα προσέγγισης ϵ αν $\forall I$:

  $$\frac{|SOL_A(I) - OPT(I)|}{OPT(I)} \leq \epsilon$$

Προσεγγισιμότητα: άλλες έννοιες

- Ο λόγος προσέγγισης στην γενική περίπτωση είναι συνάρτηση του μεγέθους (μήκους) της εισόδου:

$$\forall I: \quad \frac{SOL_A(I)}{OPT(I)} \leq \rho(|I|) \quad (\geq \quad \text{για max})$$

- Ασυμπτωτικός λόγος προσέγγισης: η ανισότητα ισχύει $\forall I, |I| \geq n_0$.
- Πιθανοτικοί προσεγγιστικοί αλγόριθμοι: ο λόγος προσέγγισης επιτυγχάνεται *με μεγάλη πιθανότητα* (τυπικοί ορισμοί αργότερα).

Κλάσεις προσεγγισιμότητας (i)

- **APX**: κλάση προβλημάτων της **NPO** που επιλύονται με σταθερό λόγο προσέγγισης σε πολυωνυμικό χρόνο.

  Παράδειγμα: **Vertex Cover**

- **PTAS**: κλάση προβλημάτων της **NPO** που επιλύονται με οποιοδήποτε σταθερό λόγο προσέγγισης $1+\varepsilon$ (μεγιστ/σης: $1-\varepsilon$) σε πολυωνυμικό χρόνο ως προς $|I|$. Υποκλάση της **APX**.

  Παράδειγμα: **Bin Packing**

- **FPTAS**: κλάση προβλημάτων της **NPO** που επιλύονται με οποιοδήποτε σταθερό λόγο προσέγγισης $1+\varepsilon$ (μεγιστ/σης: $1-\varepsilon$) σε πολυωνυμικό χρόνο ως προς $|I|$ και $\frac{1}{\varepsilon}$. Υποκλάση της **PTAS**.

  Παράδειγμα: **Knapsack**

Κλάσεις προσεγγισιμότητας (ii)

- **log-APX**: κλάση προβλημάτων της **NPO** που επιλύονται με λογαριθμικό (ως προς $|I|$) λόγο προσέγγισης σε πολυωνυμικό χρόνο. Υπερκλάση της **APX**.

  Παράδειγμα: **Set Cover**

- **poly-APX**: κλάση προβλημάτων της **NPO** που επιλύονται με πολυωνυμικό (ως προς $|I|$) λόγο προσέγγισης σε πολυωνυμικό χρόνο. Υπερκλάση της **log-APX**.

  Παράδειγμα: **Max Independent Set**

- Κλάση **NPO** (**NP**-optimization): κάθε εφικτή λύση έχει πολυωνυμικό μήκος ως προς είσοδο, και επαληθεύεται σε πολυωνυμικό χρόνο. Το αντίστοιχο πρόβλημα απόφασης ανήκει στην κλάση **NP**.

  Παράδειγμα: **TSP**

Ιεραρχία προσεγγισιμότητας

$$\mathbf{FP} \subseteq \mathbf{FPTAS} \subseteq \mathbf{PTAS} \subseteq \mathbf{APX} \subseteq$$

$$\mathbf{log\text{-}APX} \subseteq \mathbf{poly\text{-}APX} \subseteq \mathbf{NPO}$$

Το πρόβλημα Vertex Cover (VC)

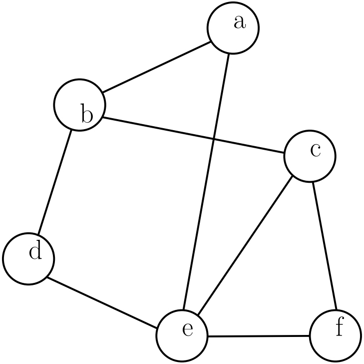
Vertex Cover

Δίνεται: γράφος $G(V,E)$
Ζητείται: Κάλυμμα ή κάλυψη κορυφών (vertex cover) ελάχιστης πληθικότητας, δηλαδή ελάχιστο σύνολο κορυφών V' έτσι ώστε κάθε ακμή να έχει τουλάχιστον μία από τις κορυφές της στο V'.

Weighted Vertex Cover (WVC): οι κορυφές έχουν και βάρος και το ζητούμενο είναι το σύνολο V' να είναι ελαχίστου βάρους.

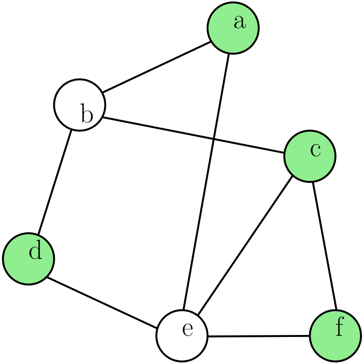
Σημείωση: Συχνά ο όρος **Vertex Cover** χρησιμοποιείται για την weighted εκδοχή του προβλήματος. Τότε για το πρώτο πρόβλημα χρησιμοποιούνται οι όροι “Unweighted” ή “Cardinality”.

Παράδειγμα (**Vertex Cover**)



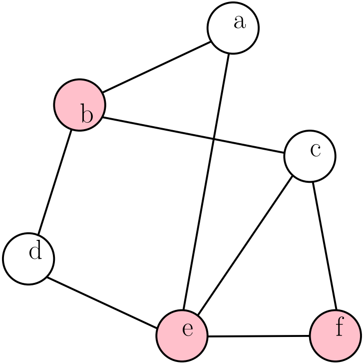
Σχήμα: Ένα στιγμιότυπο του προβλήματος **Vertex Cover**

Παράδειγμα (**Vertex Cover**)



Σχήμα: Μια μη βέλτιστη λύση

Παράδειγμα (**Vertex Cover**)



Σχήμα: Μια βέλτιστη λύση

Άπληστος αλγόριθμος για το Vertex Cover

Αλγόριθμος VC-Greedy

$C \leftarrow \emptyset$

Επανάλαβε για όσο $\exists e = \{u, v\} \in E : \{u, v\} \cap C = \emptyset$

- Βρές κορυφή v που καλύπτει μέγιστο πλήθος ακάλυπτων ακμών
- $C \leftarrow C \cup \{v\}$

Ερώτηση: τι λόγο προσέγγισης επιτυγχάνει ο VC-Greedy ;

Θα το απαντήσουμε σε λίγο ...

Αλγόριθμος VC-Match

- Βρες maximal matching $M_{\max}$ στον γράφο
- Επίστρεψε το σύνολο V' των κορυφών που είναι άκρα ακμών του $M_{\max}$

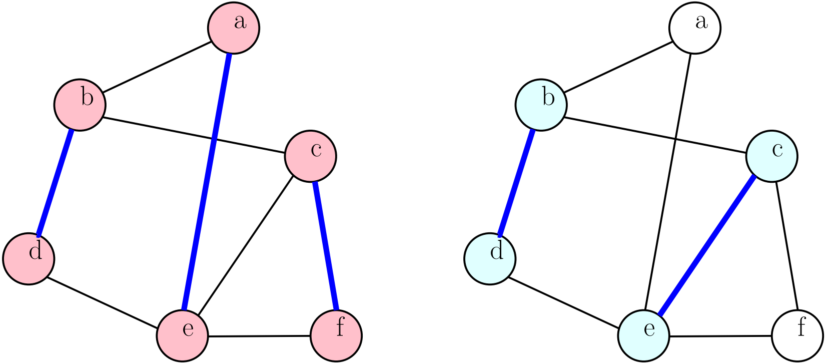
Θεώρημα

Ο αλγόριθμος VC-Match είναι 2-προσεγγιστικός.

Απόδειξη.

1. Το V' είναι εφικτή λύση (γιατί;)
2. $|M_{\max}| \leq OPT$
3. $SOL = |V'| = 2 \cdot |M_{\max}| \leq 2 \cdot OPT$ $\square$

Παράδειγμα εκτέλεσης VC-Greedy



Σχήμα: Δύο εκτελέσεις του VC-Greedy με λύσεις κόστους 6 $(= 2OPT)$ και 4 $(= \frac{4}{3}OPT)$

Ανελαστικά φράγματα (tight bounds)

- Το άνω φράγμα 2 είναι ανελαστικό (tight): αποδεικνύεται ότι ο αλγόριθμος VC-Match δεν μπορεί να πετύχει καλύτερο λόγο προσέγγισης. Δηλαδή, το 2 είναι και κάτω φράγμα για τον λόγο προσέγγισης του αλγορίθμου.
- Συνήθης μέθοδος απόδειξης: εύρεση ανελαστικού παραδείγματος (tight example), δηλαδή άπειρης οικογένειας στιγμιοτύπων για τα οποία ο αλγόριθμος δεν μπορεί να πετύχει λόγο προσέγγισης $2 - \varepsilon$, για οποιοδήποτε σταθερά $\varepsilon > 0$.
- Ένα tight example για αλγόριθμο VC-Match: πλήρεις διμερείς γράφοι $K_{n,n}$.

Κάτω φράγματα προσεγγισιμότητας προβλημάτων

- Δυσκολότερη απόδειξη: πρέπει να ισχύει για κάθε αλγόριθμο.
- Συνήθως υπό συνθήκη, π.χ. $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$.
- Συνήθης μέθοδος: αναγωγές εισαγωγής χάσματος (gap introducing reductions) από γνωστά **NP**-πλήρη προβλήματα στο υπό εξέταση πρόβλημα βελτιστοποίησης.

  Παράδειγμα: **TSP** (πώς;)
- Επίσης: αναγωγές διατήρησης προσεγγισιμότητας (gap preserving reductions) μεταξύ προβλημάτων βελτιστοποίησης.

  Παράδειγμα: **Steiner Tree** (προσεχώς)

Ανελαστικότητα του λόγου $OPT \,/\, |M_{\max}|$

- Ένα διαφορετικό είδος ανελαστικότητας (tightness): αφορά στο λόγο της αντικειμενικής τιμής της βέλτιστης λύσης OPT προς το κάτω φράγμα $|M_{\max}|$ που χρησιμοποιεί ο VC-match.
- Για το **Vertex Cover**, εξετάζοντας πλήρεις γράφους (K_n) προκύπτει ότι το μέγεθος του maximal matching ως κάτω φράγμα για το OPT δεν μπορεί να οδηγήσει σε καλύτερο λόγο προσέγγισης από 2.
- Για παράδειγμα, δεν μπορεί να υπάρχει κανένας αλγόριθμος που να βρίσκει, σε κάθε γράφο, vertex cover μεγέθους $\leq \frac{3}{2}|M_{\max}|$.
- *Φαινομενικά παράδοξο:* ο VC-match επιτυγχάνει (σχεδόν) βέλτιστη λύση για κάθε γράφο K_n.
  Εξήγηση: Η ανελαστικότητα αυτή μας δίνει μια αξιολόγηση του κάτω φράγματος και *όχι κάποιου αλγορίθμου*.

Το πρόβλημα Weighted Vertex Cover (VC)

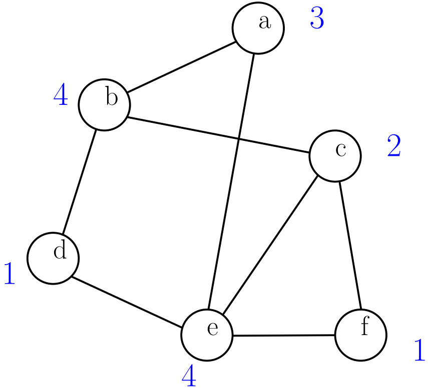
Weighted Vertex Cover

Δίνεται: γράφος $G(V, E)$, συνάρτηση βάρους $w : V \to \mathbb{Q}^+$

Ζητείται: κάλυμμα κορυφών ελάχιστου βάρους, δηλαδή σύνολο κορυφών V^* που να είναι κάλυμμα κορυφών για το G και το συνολικό βάρος των κορυφών του V^* να είναι το ελάχιστο δυνατό:

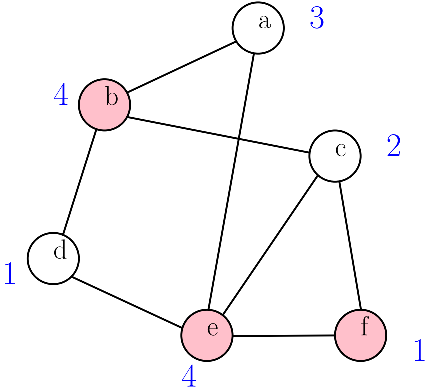
$$V^* = \arg \min_{V' \subseteq V, \forall \{x,y\} \in E:\ x \in V' \vee y \in V'} \sum_{v \in V'} w(v)$$

Παράδειγμα (**Weighted Vertex Cover**)

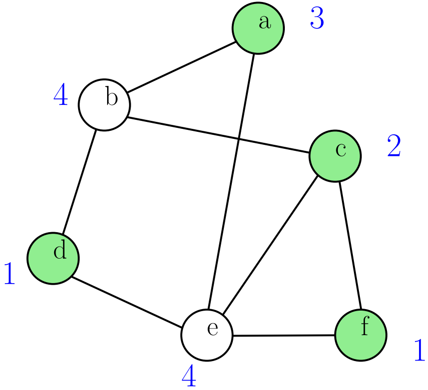


Σχήμα: Στιγμιότυπο του προβλήματος **Weighted Vertex Cover**

Παράδειγμα (**Weighted Vertex Cover**)



Σχήμα: Μια μη βέλτιστη λύση (κόστος 9)



Σχήμα: Μια βέλτιστη λύση (κόστος 7)

Προσεγγίζοντας το **Weighted Vertex Cover (WVC)**

Ορισμός

Degree-weighted συνάρτηση $w : V \rightarrow \mathbf{Q}$ *(σε γράφο* $G(V, E)$*):*
$\exists c > 0, \forall v \in V, w(v) = c \cdot deg(v)$, *όπου* $deg(v)$ *είναι ο βαθμός της κορυφής* v.

Λήμμα

Αν η συνάρτηση βαρών w σε γράφο $G(V,E)$ είναι degree-weighted τότε $w(V) \leq 2 \cdot OPT_{WVC}$

Απόδειξη.

- Αν U είναι vertex cover τότε $deg(U) \geq |E|$ (συμβολισμός: $deg(U) = \sum_{u \in U} deg(u)$)
- Όμως $deg(V) = 2|E| \leq 2deg(U)$
- Επομένως, αν w είναι degree-weighted: $w(V) \leq 2w(U)$
- Αυτό ισχύει και για vertex cover U_{OPT} ελαχίστου βάρους. Αρα:
$$w(V) \leq 2w(U_{OPT}) = 2OPT_{WVC}$$

$\square$

Ερώτηση: τι συμπεραίνουμε από το παραπάνω λήμμα;

Ιδέα: διάσπαση της δοθείσης συνάρτησης βάρους σε degree-weighted συναρτήσεις.

Αλγόριθμος Degree-Weighted-WVC (layering)

Επανάλαβε για όσο υπάρχουν κορυφές στο γράφο
- αφαίρεσε κορυφές μηδενικού βαθμού
- βρές μέγιστο c τ.ώ. $\forall v \in V,\ c \cdot deg(v) \leq w(v)$ (όπου w η τρέχουσα συνάρτηση βάρους)
- $\forall v \in V$ θέσε $w(v) \leftarrow w(v) - c \cdot deg(v)$
- πρόσθεσε κορυφές βάρους 0 στην κάλυψη και αφαίρεσέ τες από το γράφο.

Θεώρημα

Ο παραπάνω αλγόριθμος είναι 2-προσεγγιστικός για το πρόβλημα **WVC**.

Το πρόβλημα **Set Cover**

Set Cover

Δίνεται: σύνολο U με n στοιχεία και συλλογή υποσυνόλων του U, $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_k\},\ S_i \subseteq U$
Ζητείται: ελάχιστης πληθικότητας συλλογή $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ τ.ώ. κάθε στοιχείο του U να ανήκει σε τουλάχιστον ένα σύνολο της $\mathcal{S}'$: $\bigcup_{S \in \mathcal{S}'} S = U$.

Weighted Set Cover: τα υποσύνολα έχουν βάρος (κόστος) και το ζητούμενο είναι η $\mathcal{S}'$ να είναι ελαχίστου βάρους.

Σημείωση: Συχνά ο όρος **Set Cover** χρησιμοποιείται για την weighted εκδοχή του προβλήματος. Τότε για το πρώτο πρόβλημα χρησιμοποιούνται οι όροι “Unweighted” ή “Cardinality”.

Ο άπληστος αλγόριθμος για το **Set Cover**

Αλγόριθμος SC-Greedy

$C \leftarrow \emptyset$
Επανάλαβε για όσο $C \neq U$:
- Βρες $S_i \in S$ που μεγιστοποιεί $|S_i \setminus C|$
- $C \leftarrow C \cup S_i$

Θεώρημα

Ο αλγόριθμος SC-Greedy *είναι* log *n-προσεγγιστικός για το πρόβλημα* **Set Cover**.

Ιδέα απόδειξης: μετά από $k = OPT$ επαναλήψεις καλύπτονται τουλάχιστον τα μισά (ακάλυπτα) στοιχεία του U.
Αν όχι, $\exists S^* \in C_{opt}$, που δεν επιλέχθηκε στις πρώτες k επαναλήψεις, που καλύπτει τουλάχιστον $\frac{n}{2k}$ ακάλυπτα στοιχεία. Άτοπο!

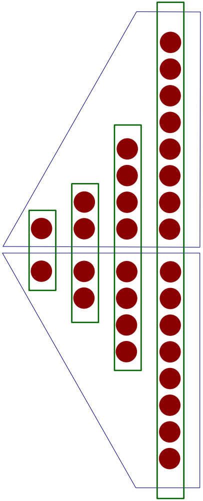
Tight example για τον αλγόριθμο SC-Greedy

$U = \bigcup_{i=1}^{t} \{a_{2^{i-1}}, \ldots a_{2^i-1}\} \cup \bigcup_{i=1}^{t} \{a'_{2^{i-1}}, \ldots a'_{2^i-1}\}$

$S_i = \{a_{2^{i-1}}, \ldots a_{2^i-1}\} \cup \{a'_{2^{i-1}}, \ldots a'_{2^i-1}\}$, $i = 1, \ldots, t$

$S_{k+1} = \bigcup_{i=1}^{t} \{a_{2^{i-1}}, \ldots a_{2^i-1}\}$

$S_{k+2} = \bigcup_{i=1}^{t} \{a'_{2^{i-1}}, \ldots a'_{2^i-1}\}$



$SOL = t \approx \log n, \quad OPT = 2$

Λόγος προσέγγισης: $\Theta(\log n)$

Αλγόριθμος Weighted SC-Greedy

$C \leftarrow \emptyset$

Επανάλαβε για όσο $C \neq U$:

- Βρές S_i με ελάχιστο $\alpha_i = cost(S_i) \,/\, |S_i - C|$
- $\forall e \in S_i - C$ θέσε $price(e) \leftarrow \alpha_i$
- $C \leftarrow C \cup S_i$

Σημείωση: $price(e_k)$ είναι η τιμή που “πληρώσαμε” για να καλυφθεί το στοιχείο e_k.

Συνολικό κόστος κάλυψης: $SOL = \sum_{k=1}^{n} price(e_k)$.

Ανάλυση του Weighted SC-Greedy

Θεώρημα

Ο αλγόριθμος Weighted SC-Greedy είναι H_n-προσεγγιστικός, όπου $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots \frac{1}{n} < \ln n + 1$.

Απόδειξη.

Υποθέτουμε ότι τα στοιχεία του U αριθμούνται με τη σειρά που καλύπτονται από τον αλγόριθμο. Παρατηρούμε ότι:

- Σε οποιαδήποτε επανάληψη του αλγορίθμου μπορούμε να καλύψουμε όλα τα ακάλυπτα στοιχεία με κόστος το πολύ OPT (γιατί;).
- Επομένως υπάρχει πάντα σύνολο με κόστος / νέο στοιχείο το πολύ $OPT \,/\, |U - C|$ (C: η τρέχουσα κάλυψη).
- Πριν καλυφθεί το στοιχείο e_k για πρώτη φορά ισχύει $|U - C| \geq n - k + 1$. Άρα $price(e_k) \leq \frac{OPT}{n-k+1}$.

Συνολικό κόστος: $SOL \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{OPT}{n-k+1} = H_n \cdot OPT$ $\square$

Tight example

$U = \{a_1, \dots, a_n\}$

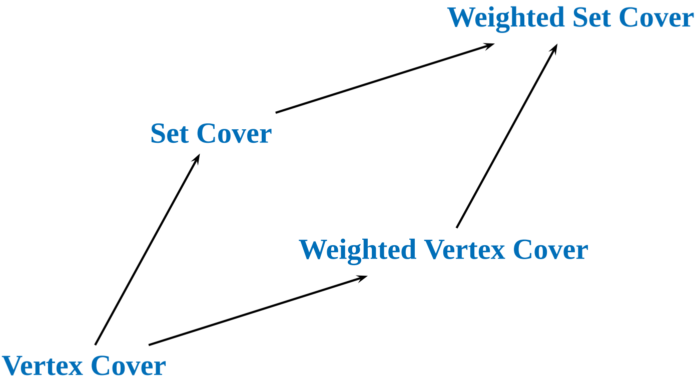
$\forall i \in \{1, \dots, n\},\ S_i = \{a_i\},\ cost(S_i) = \frac{1}{i}$

$S_{n+1} = U,\ cost(S_{n+1}) = 1 + \varepsilon$, για $\varepsilon > 0$

$SOL = H_n, \quad OPT = 1 + \varepsilon$

Επομένως $\rho(n) > H_n - \varepsilon'$ για οποιοδήποτε ε'.

Σημείωση: Αποδεικνύεται ότι ο αλγόριθμος έχει το ίδιο κάτω φράγμα λόγου προσέγγισης και για το **(Cardinality) Set Cover** και για το **Vertex Cover**!



Σημείωση: κάτω φράγματα στο λόγο προσέγγισης ‘διαδίδονται’ προς τα πάνω, άνω φράγματα προς τα κάτω

Μερικά γνωστά φράγματα

- **Weighted Set Cover**: H_n-προσεγγιστικός αλγόριθμος (ειδικότερα: $H_{|S_{\max}|}$).
- **Weighted Set Cover**: f-προσεγγιστικός αλγόριθμος.
- **(Weighted) Set Cover**: μη προσεγγίσιμο με λόγο $(1 - o(1)) \ln n$ εκτός εάν $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ [Dinur-Steurer 2013].
- **(Weighted) Vertex Cover**: μη προσεγγίσιμο με λόγο 1.3606 εκτός εάν $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ [Dinur-Safra 2005].

  Μη προσεγγίσιμο με λόγο $2 - \varepsilon$ αν ισχύει η εικασία Unique Games Conjecture [Khot-Regev 2008].

  Καλύτερο γνωστό άνω φράγμα: $2 - \Theta(\frac{1}{\sqrt{\log n}})$ [Karakostas 2004].

Πρόβλημα μεγιστοποίησης: **Maximum Coverage**

Δίνεται: σύνολο U με n στοιχεία, συλλογή $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_l\}$ υποσυνόλων του U, και ακέραιος k.

Ζητείται: Μία συλλογή $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ αποτελούμενη από k σύνολα τ.ώ. το πλήθος των στοιχείων που καλύπτει η $\mathcal{S}'$ να είναι μέγιστο.

Θεώρημα

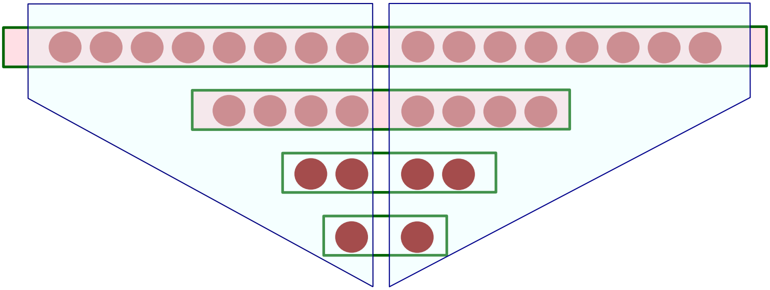
Ο άπληστος αλγόριθμος SC-Greedy που κάθε φορά επιλέγει το μεγαλύτερο, ως προς πλήθος νέων στοιχείων, σύνολο επιτυγχάνει (με k επαναλήψεις) λόγο προσέγγισης

$$1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k > 1 - \frac{1}{e}$$

για το πρόβλημα **Maximum Coverage**.

Σημείωση: Το πρόβλημα ανήκει στην κλάση **APX**, παρ'ότι το **Set Cover** δεν ανήκει!

Παράδειγμα



Εκτέλεση SC-Greedy για **Maximum Coverage** με $k = 2$:

$$n_{opt} = 30, \;\; n_{sol} = 24$$

Γενική περίπτωση, $|U| = 2 \cdot (2^t - 1)$:

$$n_{opt} = |U|, \;\; n_{sol} = 3 \cdot 2^{t-1} > \frac{3}{4} n_{opt}$$

Απόδειξη λόγου προσέγγισης $1 - \frac{1}{e}$ για το **Maximum Coverage** (i)

- Έστω $\mathcal{S}_{opt}$ μια βέλτιστη λύση που καλύπτει πλήθος στοιχείων n_{opt}. Αφού το πλήθος των συνόλων της $\mathcal{S}_{opt}$ είναι k θα πρέπει να υπάρχει σύνολο στην $\mathcal{S}$ με πληθικότητα $\geq \frac{n_{opt}}{k}$. Επομένως, ο άπληστος αλγόριθμος στο 1ο βήμα θα βρεί και θα επιλέξει σύνολο τουλάχιστον τόσων στοιχείων.
- Με άλλα λόγια, στο 1ο βήμα, καλύπτεται πλήθος στοιχείων που αντιπροσωπεύουν τουλάχιστον το $\frac{1}{k}$ του n_{opt} ή, ισοδύναμα, μένει ακάλυπτο το πολύ ένα μέρος $1 - \frac{1}{k}$ των στοιχείων της βέλτιστης λύσης $\mathcal{S}_{opt}$.

  Σημείωση: Κάθε φορά που ο άπληστος αλγόριθμος καλύπτει στοιχεία εκτός βέλτιστης λύσης μπορούμε (για την απόδειξη) να ‘διαγράφουμε’ ισάριθμο πλήθος στοιχείων από τη βέλτιστη λύση, θεωρώντας ότι το αντίστοιχο μέρος έχει καλυφθεί.

Απόδειξη λόγου προσέγγισης $(1 - \frac{1}{e})$– για το **Maximum Coverage** (ii)

- Με ανάλογα επιχειρήματα, μπορούμε να δείξουμε ότι στο i-οστό βήμα το ακάλυπτο μέρος της βέλτιστης λύσης μειώνεται τουλάχιστον κατά $\frac{1}{k}$ (αφού τα k σύνολα της $\mathcal{S}_{opt}$ αρκούν για να το καλύψουν πλήρως) και επομένως (επαγωγικά) απομένει ακάλυπτο το πολύ ένα μέρος $(1 - \frac{1}{k})^i$ της βέλτιστης λύσης.
- Τελικά, σε k βήματα έχει καλυφθεί τουλάχιστον το $1 - (1 - \frac{1}{k})^k$ της βέλτιστης λύσης. Επομένως:

$$SOL \geq (1 - (1 - \frac{1}{k})^k)n_{opt} > (1 - \frac{1}{e})n_{opt}$$

(Χρήσιμη ιδιότητα: $\forall x \in \mathbb{R}, 1 + x \leq e^x$)

Γενικεύσεις

- Το αποτέλεσμα ισχύει και στην περίπτωση που τα στοιχεία έχουν βάρος και ζητείται λύση που καλύπτει μέγιστο βάρος στοιχείων.
- Το αποτέλεσμα ισχύει ακόμη και σε περιπτώσεις όπου δεν δίνονται τα σύνολα της $\mathcal{S}$ αναλυτικά (μπορεί να είναι και εκθετικά πολλά), αλλά μπορούμε να βρίσκουμε το “καλύτερο” σύνολο σε πολυωνυμικό χρόνο.

  Εφαρμογή: ***k*-Activity Selection** (aka **Max Interval (Graph) Coloring**).
- Εάν μπορούμε να βρίσκουμε το “καλύτερο” σύνολο σε πολυωνυμικό χρόνο με προσέγγιση ρ (≤ 1) τότε ο άπληστος αλγόριθμος επιτυγχάνει λόγο προσέγγισης

  $$1 - (1 - \tfrac{\rho}{k})^k > 1 - \tfrac{1}{e^\rho}$$

  για το πρόβλημα **Maximum Coverage**.
- Ενδιαφέρουσα γενίκευση: monotone submodular functions.

Το Πρόβλημα του Πλανόδιου Πωλητή
Traveling Salesman problem (TSP)

Ορισμός του προβλήματος TSP

Δίνεται: *πλήρης γράφος* $G(V, E)$ *με μη αρνητικά κόστη (βάρη) στις ακμές του.*

Ζητείται: *κύκλος ελαχίστου κόστους που να επισκέπτεται κάθε κόμβο ακριβώς μία φορά (Hamilton Cycle).*

Μη-προσεγγισιμότητα του TSP

Θεώρημα

Το πρόβλημα TSP δεν μπορεί να προσεγγιστεί με παράγοντα $\alpha(n)$, *όπου* $n = |V|$, *για οποιαδήποτε πολυωνυμικά υπολογιστή συνάρτηση* $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$, *εκτός εάν* **P** $=$ **NP**.

Απόδειξη.

Αναγωγή από το **Hamilton Cycle**: συμπληρώνουμε τον αρχικό γράφο G με ακμές ώστε να κατασκευάσουμε πλήρη γράφο G'. Στις αρχικές ακμές δίνουμε βάρος 1, στις υπόλοιπες δίνουμε βάρος $\alpha(n) \cdot n$. Ισχύει ότι:

- Αν ο G είναι Hamilton τότε υπάρχει κύκλος TSP κόστους n στον G', ενώ
- Αν ο G δεν είναι Hamilton τότε ο βέλτιστος κύκλος TSP στον G' έχει κόστος $> \alpha(n) \cdot n$.

□

Αναγωγές Εισαγωγής Χάσματος (i) (Gap Introducing Reductions)

Μια αναγωγή h από το πρόβλημα απόφασης Π στο πρόβλημα ελαχιστοποίησης Π' (που απεικονίζει κάθε στιγμιότυπο I του Π σε κάποιο στιγμιότυπο $I' = h(I)$ του Π') λέγεται *αναγωγή εισαγωγής χάσματος* όταν υπάρχουν συναρτήσεις f, α ώστε:

- Αν το I είναι ‘yes’-instance του Π τότε $OPT_{\Pi'}(I') \leq f(I')$, ενώ
- Αν το I είναι ‘no’-instance του Π τότε $OPT_{\Pi'}(I') > \alpha(|I'|) \cdot f(I')$.

Θεώρημα

Αν το πρόβλημα Π *είναι* **NP**-*complete και υπάρχει αναγωγή εισαγωγής χάσματος με παραμέτρους* f, α *από το* Π *στο πρόβλημα* Π' *τότε το* Π' *δεν προσεγγίζεται με παράγοντα* $\alpha(n)$, *εφ'όσον* $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ *(όπου* n *το μήκος της αναπαράστασης της εισόδου του* Π'*).*

Αναγωγές Εισαγωγής Χάσματος (ii) (Gap Introducing Reductions)

Μια αναγωγή h από το πρόβλημα απόφασης Π στο πρόβλημα μεγιστοποίησης Π' (που απεικονίζει κάθε στιγμιότυπο I του Π σε κάποιο στιγμιότυπο $I' = h(I)$ του Π') λέγεται *αναγωγή εισαγωγής χάσματος* όταν υπάρχουν συναρτήσεις f, α ώστε:

- Αν το I είναι ‘yes’-instance του Π τότε $OPT_{\Pi'}(I') \geq f(I')$, ενώ
- Αν το I είναι ‘no’-instance του Π τότε $OPT_{\Pi'}(I') < \alpha(|I'|) \cdot f(I')$.

Το πρόβλημα Metric TSP

Επιπλέον υπόθεση: βάρη ικανοποιούν τριγωνική ανισότητα.

Το πρόβλημα παραμένει **NP**-complete (γιατί;)

2-προσεγγιστικός αλγόριθμος για το Metric TSP

```
- Βρες ελάχιστο συνδετικό δέντρο T στον G.
- Διπλασίασε ακμές του T.
- Βρες κύκλο Euler C στο διπλασιασμένο T.
- Επίστρεψε κύκλο που επισκέπτεται κόμβους με
σειρά εμφάνισής τους στον C (short-cutting).
```

Ο παραπάνω αλγόριθμος είναι 2-προσεγγιστικός:

$$cost(C) \leq cost(C_T) \leq 2cost(T) \leq 2OPT$$

Καλύτερη προσέγγιση για το Metric TSP (Christofides' algorithm)

$\frac{3}{2}$-προσεγγιστικός αλγόριθμος για το Metric TSP

```
/* Εύρεση ακόμη 'φτηνότερου' κύκλου Euler */
- Βρες Eulerian completion του δέντρου T, μέσω
minimum cost perfect matching M πάνω στους
κόμβους περιττού βαθμού του T.
- Συνέχισε όπως στον προηγούμενο αλγόριθμο.
```

Λήμμα: $cost(M) \leq \frac{1}{2}OPT$
Απόδειξη: με short-cutting στον βέλτιστο κύκλο, παίρνουμε κύκλο C_{odd} κόστους $\leq OPT$ στους κόμβους περιττού βαθμού του T. Κόστος M το πολύ το μισό του κόστους του C_{odd} (*γιατί;*).

$$cost(C) \leq cost(C_{T,M}) = cost(T) + cost(M) \leq \frac{3}{2}OPT$$

Το πρόβλημα **Metric TSP**$_{(s,t)-path}$

Ορισμός του προβλήματος Metric TSP$_{(s,t)-path}$

Δίνονται: γράφος με βάρη (όπως για το **Metric TSP**) και επιπλέον 2 κόμβοι s, t.
Ζητείται: Hamilton path ελαχίστου κόστους από s σε t.

Αλγόριθμος: συνδυασμός 2 ανεξάρτητων αλγορίθμων, καθένας δημιουργεί γράφο με μονοπάτι Euler με διαφορετικό τρόπο (βλ. επόμενη διαφάνεια).
Η επιλογή της καλύτερης από τις 2 λύσεις δίνει $\frac{5}{3}$-προσεγγιστικό αλγόριθμο:

$$\min\{SOL_1, SOL_2\} \leq \frac{5}{3} OPT_{s,t}$$

$\frac{5}{3}$-προσεγγιστικός αλγόριθμος για το **Metric TSP**$_{(s,t)-path}$

1. Βρες ελάχιστο συνδετικό δέντρο T στον γράφο G. Διπλασίασε τις ακμές του T. Αφαίρεσε (s,t)-path από το διπλασιασμένο δένδρο. Βρες (s,t)-Euler path $P_{s,t}$, εκτέλεσε short-cutting για να βρείς (s,t)-Hamilton path κόστους:

$$SOL_1 \leq 2OPT_{s,t} - c_{s,t}$$

2. Με μικρή παραλλαγή του αλγόριθμου του Χριστοφίδη (Eulerian completion ώστε να προκύπτει (s,t)-Euler path με short-cutting), βρες (s,t)-Hamilton path με κόστος

$$SOL_2 \leq (3OPT_{s,t} + c_{s,t})/2$$

3. Επίστρεψε $SOL = \min(SOL_1, SOL_2)$

Ορισμός του προβλήματος

Δίνεται: *γράφος* $G(V, E)$ *με μη αρνητικά βάρη στις ακμές του οι κόμβοι του οποίου χωρίζονται σε δύο σύνολα:* απαραίτητοι *και* Steiner.

Ζητείται: *δέντρο ελαχίστου κόστους που να περιέχει όλους τους απαραίτητους κόμβους.*

Επιπλέον υπόθεση: ο γράφος είναι πλήρης και τα δοθέντα βάρη ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα.

Ισοδυναμία προσεγγισιμότητας **Steiner Tree** και **Metric Steiner Tree**

Θεώρημα

Δοθέντος ρ-προσεγγιστικού αλγορίθμου για το **Metric Steiner Tree** *μπορούμε να κατασκευάσουμε ρ-προσεγγιστικό αλγόριθμο για το* **Steiner Tree**.

Απόδειξη: με αναγωγή διατήρησης του παράγοντα προσέγγισης από το **Steiner Tree** στο **Metric Steiner Tree**.

- Συμπλήρωση του αρχικού γράφου G σε πλήρη γράφο G'. Οι ακμές του G' έχουν το βάρος των συντομότερων μονοπατιών στον G (*metric closure*). Οι απαραίτητοι κόμβοι είναι ίδιοι.
- $OPT(I') \leq OPT(I)$ (γιατί;)
- Κάθε λύση του I' με κόστος $SOL(I')$ δίνει λύση του I με κόστος $SOL(I) \leq SOL(I')$ (πώς;).

  Επομένως:

$$SOL(I) \leq SOL(I') \leq \rho OPT(I') \leq \rho OPT(I)$$

Σημείωση: Ισχύει επιπλέον ότι $OPT(I) = OPT(I')$, αλλά δεν το χρειαζόμαστε.

Αναγωγές Διατήρησης Παράγοντα Προσέγγισης (Approximation Factor Preserving Reductions)

Μια *αναγωγή διατήρησης παράγοντα προσέγγισης* από το πρόβλημα ελαχιστοποίησης Π στο πρόβλημα ελαχιστοποίησης Π' είναι ένα ζεύγος συναρτήσεων πολυωνυμικού χρόνου h, g, όπου η h απεικονίζει κάθε στιγμιότυπο I του Π σε κάποιο στιγμιότυπο $I' = h(I)$ του Π' και η g απεικονίζει λύσεις του I' σε λύσεις του I, ώστε:

- $OPT(I') \leq OPT(I)$
- για κάθε λύση S' του I' με κόστος $SOL(I', S')$ η $S = g(S')$ είναι λύση του I με κόστος $SOL(I, S) \leq SOL(I', S')$.

Θεώρημα

Μια αναγωγή διατήρησης παράγοντα προσέγγισης από το πρόβλημα Π *στο πρόβλημα* Π' *μαζί με έναν* ρ*-προσεγγιστικό αλγόριθμο για το* Π' *δίνουν έναν* ρ*-προσεγγιστικό αλγόριθμο για το* Π.

2-προσεγγιστικός αλγόριθμος για το **Metric Steiner Tree** (και το **Steiner Tree**)

Αλγόριθμος

`Βρες και επίστρεψε ελάχιστο συνδετικό δένδρο στον παραγόμενο (node-induced) υπογράφο των απαραίτητων κόμβων (`R`).`

Απόδειξη λόγου προσέγγισης: η λύση είναι εφικτή για το **Metric Steiner Tree**, για προσεγγισιμότητα παίρνουμε κάτω φράγμα στο OPT με χρήση short-cutting:

Από οποιαδήποτε λύση για το **Metric Steiner Tree** μπορούμε να κατασκευάσουμε συνδετικό δέντρο στους κόμβους του R μόνο, διπλάσιου το πολύ κόστους (short-cutting στον αντίστοιχο κύκλο Euler). Επομένως και στη βέλτιστη λύση αντιστοιχεί ένα συνδετικό δέντρο T_R^*, με κόστος το πολύ $2 \cdot OPT$. Αρα:

$$cost(\mathrm{MST}_R) \leq cost(T_R^*) \leq 2 \cdot OPT$$

Multiway Cut και **Minimum *k*-Cut**

Είναι γενικεύσεις του προβλήματος min-cut (θυμηθείτε το θεώρημα max-flow / min-cut):

Στο πρόβλημα **Multiway Cut** δίνεται γράφος G και k κόμβοι (terminals). Ζητείται η ελάχιστη τομή τέτοια ώστε κάθε terminal να βρίσκεται σε διαφορετική συνεκτική συνιστώσα (connected component). **NP**-hard, ακόμη και για fixed $k \geq 3$. Για $k = 2$;

Στο πρόβλημα **Minimum *k*-Cut** δίνεται γράφος G και ζητείται η ελάχιστη τομή τέτοια ώστε ο γράφος να διασπάται σε k συνεκτικές συνιστώσες. Πολυωνυμικά επιλύσιμο για fixed k, **NP**-hard για k που είναι μέρος της εισόδου.

Αλγόριθμος για το **Multiway Cut**

```
- Βρες isolating cut C_i για κάθε terminal s_i
- Επίστρεψε την ένωση των isolating cuts,
εκτός από την βαρύτερη
```

Ορθότητα και λόγος προσέγγισης: Έστω A η βέλτιστη λύση, χωρίζοντας τον γράφο σε συνιστώσες $V_1, \ldots, V_k$. Αν A_i είναι η τομή/υποσύνολο της A που χωρίζει το V_i από τις υπόλοιπες συνιστώσες, τότε είναι isolating cut για το s_i.

Άρα, $w(C_i) \leq w(A_i)$.

Κάθε edge της A, περιλαμβάνεται σε δύο τομές A_i, A_j, οπότε

$$\sum_{i=1}^{k} w(A_i) = 2w(A) = 2OPT$$

Επομένως:

$$w(C) \leq (1 - 1/k) \sum_{i=1}^{k} w(C_i) \leq (1 - 1/k) \sum_{i=1}^{k} w(A_i) = 2(1 - 1/k)OPT$$

Αλγόριθμος GH-*k*-cut

```
1. Compute Gomory-Hu tree T.
2. Output the union of cuts corresponding to
lightest k−1 edges of T.
```

Με απόδειξη παρόμοια (κάπως πιο δύσκολη) αυτής για το multiway cut αποδεικνύεται ότι η λύση είναι $\leq 2(1-1/k)OPT$.

Δένδρο Gomory-Hu

Σημαντικές ιδιότητες: κάθε ακμή του αντιστοιχεί σε μια ελάχιστη τομή στον γράφο, και για κάθε ζεύγος (u,v) υπάρχει μια ακμή του δένδρου που αντιστοιχεί στην ελάχιστη (u,v)-cut

Κατασκευή δένδρου Gomory-Hu

1. construct tree T with unique vertex $S_0 = V$
2. while $\exists S_i \in T : |S_i| \geq 2$ do
    - choose two vertices x, y in S_i
    - compute minimum $x - y$ cut $C_{x,y}$ in G'
        /* $G' = G$ with subtrees of S_i in T collapsed */
    - split S_i accordingly to S_i^x, S_i^y
    - add edge (S_i^x, S_i^y) to T
    - $w(S_i^x, S_i^y) \leftarrow w(C_{x,y})$ /* weight of edge (S_i^x, S_i^y) */
    - attach each subtree of S_i in T to S_i^x or S_i^y according to the cut